



طريقك نحو البكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد



سلسلة الخليل

في

المتتاليات العددية

- ملخص شامل
- تمارين محلولة

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 21



ملخص شامل حول:

المتتاليات العددية

دراسة اتجاه تغير متتالية U_n

1

ندرس إشارة الفرق $(U_{n+1} - U_n)$:

- في حالة: $U_{n+1} - U_n > 0$ فإن: (U_n) متزايدة تماما.
- في حالة: $U_{n+1} - U_n < 0$ فإن: (U_n) متناقصة تماما.
- في حالة: $U_{n+1} - U_n = 0$ فإن: (U_n) ثابتة

في حالة كانت حدود المتتالية موجبة يمكن أن ندرس إشارة النسبة (u_{n+1}/u_n)

- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} > 1$ فإن: (U_n) متزايدة تماما.
- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$ فإن: (U_n) متناقصة تماما.
- في حالة: $\frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$ فإن: (U_n) ثابتة

متتالية ثابتة

(U_n) ثابتة معناه:

$$U_{n+1} = U_n = \alpha$$

حيث: $\alpha \in \mathbb{R}$

(كل الحدود متساوية
وتساوي الحد الأول)

تقارب وتباعد متتالية

2

● إذا كانت $\lim U_n = l$ حيث: $(l \in \mathbb{R})$ فإن: (U_n) متقاربة.

● في الحالات الأخرى (U_n) متباعدة.

نتائج (حول تقارب متتالية):

- إذا كانت (U_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى $(U_n \leq A)$ فهي متقاربة.
- إذا كانت (U_n) متناقصة تماما و محدودة من الأسفل $(U_n \geq A)$ فهي متقاربة

المتتالية الحسابية

3

1 طريقة اثبات أن المتتالية (U_n) حسابية:

● الفرق $(U_{n+1} - U_n)$ عدد ثابت، أي $U_{n+1} - U_n = r$

● أو نكتب U_{n+1} بدلالة U_n ، فنجد: $U_{n+1} = U_n + r$

يكفي أن نثبت أن:

حيث: r عدد حقيقي: يسمى أساس المتتالية الحسابية (U_n)

(2) عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

U_n بدلالة n يسمى الحد العام

● بصفة عامة: $U_n = u_p + (n - p)r$ علاقة تربط بين حدين مختلفين.

● $U_n = u_0 + nr$ ، في حالة u_0 هو الحد الأول.

● $U_n = u_1 + (n - 1)r$ ، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة (حول عبارة الحد العام لمتتالية حسابية):

● هذه العلاقات يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض U_n بأي حد مُعطى في التمرين.

● نستعمل العلاقة $U_n = U_p + (n - p)r$ إذا كانت (U_n) حسابية ومعرفة بحدين مختلفين

وباستعمال العلاقة نقوم بحساب الأساس فنجد: $r = \frac{U_n - U_p}{n - p}$

(3) مجموع حدود متتابعة من متتالية حسابية:

بصفة عامة يُحسب المجموع باستعمال العلاقة:

$$\text{المجموع} = \left(\text{عدد الحدود} \right) \left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right)$$

حيث: (عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1)

(4) خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية حسابية إذا وفقط إذا كان: $a + c = 2b$

المتتالية الهندسية

4

(1) طريقة اثبات أن المتتالية (U_n) هندسية:

● الحاصل $\left(\frac{U_{n+1}}{U_n} \right)$ عدد ثابت، أي $\frac{U_{n+1}}{U_n} = r$

يكفي أن نثبت أن:

● أو نكتب U_{n+1} بدلالة U_n ، فنجد: $U_{n+1} = qU_n$

حيث: q عدد حقيقي: يسمى أساس المتتالية الهندسية (U_n)

(2) عبارة الحد العام لمتتالية هندسية:

U_n بدلالة n يسمى الحد العام

● بصفة عامة: $U_n = u_p \times q^{n-p}$ علاقة تربط بين حدين مختلفين.

● في حالة u_0 هو الحد الأول. $U_n = u_0 \times q^n$

● في حالة u_1 هو الحد الأول. $U_n = u_1 \times q^{n-1}$

ملاحظة (حول عبارة الحد العام لمتتالية هندسية):

● هذه العلاقات يُمكن استعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض U_n بأي حد مُعطى في التمرين.

● نستعمل العلاقة $U_n = u_p \times q^{n-p}$ إذا كانت (U_n) هندسية ومعرفة بحدين مختلفين وباستعمال

العلاقة نقوم بحساب الأساس فنجد: $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$

(3) مجموع حدود متتابعة من متتالية هندسية:

بصفة عامة يُحسب المجموع باستعمال العلاقة:

$$\text{المجموع} = (\text{الحد الأول}) \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right)$$

حيث: (عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1)

(4) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية a, b, c بهذا الترتيب حدودا متتابعة لمتتالية هندسية إذا وفقط إذا كان: $a \times c = b^2$

(5) قوانين النهايات المتعلقة بالمتتاليات الهندسية:

● إذا كان: $q > 1$ فإن: $\lim(q^n) = +\infty$

● إذا كان: $-1 < q < 1$ فإن: $\lim(q^n) = 0$

● إذا كان: $q \leq -1$ فإن: $\lim(q^n)$ غير موجودة



تمارين محلولة في:

المتتاليات العددية

التمرين 01

(u_n) متتالية حسابية، عين عبارة (u_n) بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية:

$$u_0 = -2 \quad , \quad r = 3 \quad \textcircled{1}$$

$$u_1 = -2 \quad , \quad r = -\frac{1}{2} \quad \textcircled{2}$$

$$u_3 = -2 \quad , \quad u_5 = 4 \quad \textcircled{3}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad r = \frac{1}{4} \quad \textcircled{4}$$

$$u_0 = -1 \quad , \quad u_5 = -\frac{9}{4} \quad \textcircled{5}$$

حل التمرين 01

تُعطى عبارة الحد العام لمتتالية حسابية بـ: $u_n = u_p + r(n - p)$

ومنه:

①

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + r(n - 0) \\ &= -2 + 3n \end{aligned}$$

②

$$\begin{aligned} u_n &= u_1 + r(n - 1) \\ &= -2 - \frac{1}{2}(n - 1) \\ &= -2 - \frac{1}{2}n + 1 \\ &= -1 - \frac{1}{2}n \end{aligned}$$

③ لدينا:

$$\begin{aligned} u_5 &= u_3 + r(5 - 3) \Rightarrow 4 = -2 + r(2) \\ &\Rightarrow r = 3 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_n &= u_3 + 3(n - 3) \\ &= -2 + 3n - 9 \\ &= -11 + 3n \end{aligned}$$

④

$$u_n = u_2 + \frac{1}{4}(n - 2)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2}{3} + \frac{1}{4}n - \frac{1}{2} \\
 &= \frac{1}{6} + \frac{1}{4}n
 \end{aligned}$$

5 لدينا:

$$\begin{aligned}
 u_5 = u_0 + r(5 - 0) &\Rightarrow -\frac{9}{4} = -1 + 5r \\
 &\Rightarrow 5r = -\frac{9}{4} + 1 \\
 &\Rightarrow 5r = -\frac{5}{4} \\
 &\Rightarrow r = -\frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_0 - \frac{1}{4}n \\
 &= -1 - \frac{1}{4}n
 \end{aligned}$$

التمرين 02

(v_n) متتالية هندسية، عين عبارة (v_n) بدلالة n في كل حالة من الحالات التالية:

$$u_0 = -1 \quad , \quad q = -2 \quad \text{1}$$

$$u_2 = \frac{2}{3} \quad , \quad q = \frac{1}{4} \quad \text{2}$$

$$u_2 = 2 \quad , \quad u_4 = 18 \quad \text{3}$$

$$u_1 = -2 \quad , \quad q = -\frac{3}{2} \quad \text{4}$$

$$u_{p-1} = 2 \quad , \quad u_{p+2} = -16 \quad \text{5}$$

حل التمرين 02

نُعطى عبارة الحد العام لمتتالية هندسية بـ: $u_n = u_p \times q^{(n-p)}$

ومنه:

1

$$\begin{aligned}
 u_n &= u_0 \times q^{n-0} \\
 &= -1 \times (-2)^n
 \end{aligned}$$

2

$$\begin{aligned}
u_n &= u_2 \times q^{n-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{n-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^{-2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \frac{1}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} \\
&= \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 16 \\
&= \frac{32}{3} \times \left(\frac{1}{4}\right)^n
\end{aligned}$$

3 لدينا:

$$\begin{aligned}
u_4 &= u_2 \times q^{4-2} \Rightarrow 18 = 2 \times q^2 \\
&\Rightarrow q^2 = 9 \\
&\Rightarrow q = 3
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
u_n &= u_2 \times q^{n-2} \\
&= 2 \times 3^n \times 3^{-2} \\
&= 2 \times 3^n \times \frac{1}{3^2} \\
&= \frac{2}{9} \times 3^n
\end{aligned}$$

4

$$\begin{aligned}
u_n &= u_1 \times q^{n-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{n-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n \times \left(-\frac{3}{2}\right)^{-1} \\
&= -2 \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n \times \frac{1}{-\frac{3}{2}} \\
&= \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{2}\right)^n
\end{aligned}$$

5

لدينا:

$$\begin{aligned}
u_{p+2} &= u_{p-1} \times q^{p+2-(p-1)} \Rightarrow -16 = 2 \times q^3 \\
&\Rightarrow q^3 = -8
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow q = -2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} u_n &= u_{p-1} \times q^{n-(p-1)} \\ &= 2 \times (-2)^{(n-p)} \times (-2)^1 \\ &= -4 \times (-2)^{(n-p)} \end{aligned}$$

التمرين 03

احسب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة مما يلي:

$$u_n = -2 + 3n \quad ①$$

$$u_n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ②$$

$$u_n = \frac{1}{1+n} \quad ③$$

$$u_n = \frac{1+2n}{1-n} \quad ④$$

$$u_n = -\frac{3}{4} \left(\frac{7}{5}\right)^n \quad ⑤$$

$$u_n = \left(\frac{3n^2+3}{n^2+4}\right)^n \quad ⑥$$

حل التمرين 03

حساب نهاية المتتالية (u_n) في كل حالة مما يلي:

$$u_n = -2 + 3n \quad ①$$

$$\begin{aligned} \lim[u_n] &= \lim[-2 + 3n] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

$$u_n = 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \quad ②$$

$$\begin{aligned} \lim[u_n] &= \lim \left[3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\text{لأن: } \left(-1 < \frac{2}{3} < 1\right) \\ u_n &= \frac{1}{1+n} \quad ③ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim[u_n] &= \lim \left[\frac{1}{1+n} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$u_n = \frac{1+2n}{1-n} \quad ④$$

$$\begin{aligned}\lim[u_n] &= \lim \left[\frac{1+2n}{1-n} \right] \\ &= \lim \left[\frac{2n}{-n} \right] \\ &= \lim[-2] \\ &= -2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim[u_n] &= \lim \left[-\frac{3}{4} \left(\frac{7}{5} \right)^n \right] \\ &= -\infty\end{aligned}$$

$$u_n = -\frac{3}{4} \left(\frac{7}{5} \right)^n \quad \text{5}$$

$$\begin{aligned}\text{لأن: } \left(\frac{7}{5} > 1 \right) \\ u_n = \left(\frac{3n^2+3}{n^2+4} \right)^n \quad \text{6}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lim[u_n] &= \lim \left[\left(\frac{3n^2+3}{n^2+4} \right)^n \right] \\ &= \lim \left[e^{n \ln \left(\frac{3n^2+3}{n^2+4} \right)} \right] \\ &= +\infty\end{aligned}$$

التمرين 04

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases}$$

• عين: u_1 ، u_2 و u_3

حل التمرين 04

• تعيين: u_1 ، u_2 و u_3 :

لدينا:

$$u_1 + u_3 = 2u_2$$

ومنه:

$$\begin{aligned}u_1 + u_2 + u_3 = 36 &\Rightarrow 2u_2 + u_2 = 36 \\ &\Rightarrow 3u_2 = 36 \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = 12}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} u_1 + u_2 + u_3 = 36 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 1428 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 12 + u_3 = 36 \\ u_1 \times 12 \times u_3 = 1428 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} u_1 + u_3 = 24 \dots (*) \\ u_1 \times u_3 = 119 \dots (**) \end{cases}$$

لدينا من (*):

$$u_1 = 24 - u_3$$

نعوض في (**): نجد:

$$\begin{aligned} u_1 \times u_3 = 119 &\Rightarrow (24 - u_3) \times u_3 = 119 \\ &\Rightarrow 24u_3 - (u_3)^2 - 119 = 0 \\ &\Rightarrow -(u_3 - 7)(u_3 - 17) = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} u_3 - 7 = 0 \\ \text{أو} \\ u_3 - 17 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_3 = 7 \\ \text{أو} \\ u_3 = 17 \end{cases}$$

نعوض قيمة u_3 في (*): نجد:

$$u_1 + u_3 = 24 \Rightarrow \begin{cases} u_1 + 7 = 24 \\ \text{أو} \\ u_1 + 17 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 = 17 \\ \text{أو} \\ u_1 = 7 \end{cases}$$

إذن:

$$(u_1; u_2; u_3) \in \{(17; 12; 7); (7; 12; 17)\}$$

التمرين 05

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 4n - 1$

- 1 بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .
- 2 هل العدد 2021 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟ برر اجابتك.
- 3 ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- 4 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 05

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 4n - 1$

- 1 تبين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r :

لدينا:

$$u_{n+1} = 4(n+1) - 1$$

$$= 4n + 4 - 1$$

$$= 4 + u_n$$

ولدينا:

$$u_0 = 4(0) - 1 = -1$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها 4 وحدها الأول -1

② هل العدد 2021 حد من حدود المتتالية (u_n) ؟

$$u_n = 2021 \Rightarrow 4n - 1 = 2021$$

$$\Rightarrow 4n = 2022$$

$$\Rightarrow n = \frac{1011}{2}$$

لدينا: $\frac{1011}{2} \notin \mathbb{N}$ ومنه العدد 2021 ليس حد من حدود المتتالية (u_n) .

③ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 4(n+1) - 1 - (4n - 1)$$

$$= 4n + 4 - 1 - 4n + 1$$

$$= 4 > 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$= \frac{n+1}{2} (u_0 + u_n)$$

$$= \frac{n+1}{2} (-1 + 4n - 1)$$

$$= \frac{n+1}{2} (4n - 2)$$

$$= (n+1)(4n - 1)$$

التمرين 06

(v_n) المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث:

$$\begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 63 \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 \end{cases}$$

• عين v_1 ، v_2 و v_3

حل التمرين 06

• تعيين v_1 ، v_2 و v_3 :

لدينا:

$$v_1 \times v_3 = (v_2)^2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 &\Rightarrow (v_2)^2 \times v_2 = 1728 \\ &\Rightarrow (v_2)^3 = 1728 \\ &\Rightarrow \boxed{v_2 = 12} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \begin{cases} v_1 + v_2 + v_3 = 63 \\ v_1 \times v_2 \times v_3 = 1728 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} v_1 + 12 + v_3 = 63 \\ v_1 \times 12 \times v_3 = 1728 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_1 + v_3 = 51 \dots (*) \\ v_1 \times v_3 = 144 \dots (**) \end{cases} \end{aligned}$$

من (*) لدينا:

$$v_1 = 51 - v_3$$

نعوض في (**) نجد:

$$\begin{aligned} v_1 \times v_3 = 144 &\Rightarrow (51 - v_3)v_3 = 144 \\ &\Rightarrow -(v_3)^2 + 51v_3 - 144 = 0 \\ &\Rightarrow -(v_3 - 3)(v_3 - 48) = 0 \\ &\Rightarrow \begin{cases} v_3 - 3 = 0 \\ \text{أو} \\ v_3 - 48 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_3 = 3} \\ \text{أو} \\ \boxed{v_3 = 48} \end{cases} \end{aligned}$$

نعوض قيمة v_3 في (*) نجد:

$$v_1 + v_3 = 51 \Rightarrow \begin{cases} v_1 + 3 = 51 \\ \text{أو} \\ v_1 + 48 = 51 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{v_1 = 48} \\ \text{أو} \\ \boxed{v_1 = 3} \end{cases}$$

ومنه:

$$(v_1; v_2; v_3) \in \{(48; 12; 3); (3; 12; 48)\}$$

التمرين 07

من أجل $\alpha \in \mathbb{R}$ ، نعتبر المتتالية الهندسية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_n = \alpha u_{n-1} + 2 \end{cases}$$

1

① عين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة.

② ما هو نوع المتتالية (u_n) في حالة $\alpha = 1$ ؟

② نفرض فيما يلي: $\alpha \neq 1$ و $\alpha \neq -1$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:

$$v_n = u_n - \frac{2}{1 - \alpha}$$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q .

② عين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة.

حل التمرين 07

1

① تعيين قيمة α حتى تكون (u_n) متتالية ثابتة:

(u_n) ثابتة معناه:

$$u_n = u_0 = u_{n-1}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \alpha u_{n-1} + 2 &= u_0 \Rightarrow \alpha(1) + 2 = 1 \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = -1} \end{aligned}$$

② إيجاد نوع المتتالية (u_n) في حالة $\alpha = 1$ ؟

لما $\alpha = 1$ لدينا:

$$u_n = u_{n-1} + 2$$

لدينا:

$$u_{n+1} = u_n + 2$$

ومنه $(u_n)_{\alpha=1}$ متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول $u_0 = 1$

2

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين حدها الأول v_0 وأساسها q :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{1 - \alpha} \\ &= \alpha u_n + 2 - \frac{2}{1 - \alpha} \\ &= \alpha u_n + \frac{2 - 2\alpha - 2}{1 - \alpha} \\ &= \alpha u_n - \frac{2\alpha}{1 - \alpha} \\ &= \alpha \left(u_n - \frac{2}{1 - \alpha} \right) \end{aligned}$$

$$= \alpha v_n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= u_0 - \frac{2}{1-\alpha} \\ &= 1 - \frac{2}{1-\alpha} \\ &= -\frac{1+\alpha}{1-\alpha} \end{aligned}$$

ومنه المتتالية (v_n) هندسية أساسها α وحدها الأول v_0 حيث:

$$v_0 = -\frac{1+\alpha}{1-\alpha}$$

إذن:

$$v_n = -\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)(\alpha)^n$$

② تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (v_n) متقاربة:

(v_n) متقاربة معناه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [v_n] = l \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}\right)(\alpha)^n \right] = l$$

وهذا لا تحقق إلا إذا كان: $-1 < \alpha < 1$

ومنه (v_n) متقاربة لما $\alpha \in]-1; 1[$.

التمرين 08

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ 4u_{n+1} = u_n + 9 \end{cases}$$

① عين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة.

② نفرض في كل ما يلي: $\alpha \neq 3$

① احسب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 .

③ لكل $n \in \mathbb{N}$ نعرف المتتالية (v_n) كما يلي: $v_n = u_n - 3$.

① اثبت ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها.

② اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

حل التمرين 08

1 تعيين قيمة α حتى تكون المتتالية (u_n) ثابتة:

$$u_{n+1} = u_n = u_0 \quad \text{ثابتة معناه:}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} 4u_{n+1} &= u_n + 9 \Rightarrow 4\alpha = \alpha + 9 \\ &\Rightarrow 3\alpha = 9 \\ &\Rightarrow \boxed{\alpha = 3} \end{aligned}$$

2

1 حساب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\begin{aligned} \bullet \quad 4u_{0+1} &= u_0 + 9 \Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{\alpha + 9}{4}} \\ \bullet \quad 4u_{1+1} &= u_1 + 9 \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{\alpha + 9}{4} + 9}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{\alpha + 45}{16}} \\ \bullet \quad 4u_{2+1} &= u_2 + 9 \Rightarrow u_3 = \frac{\frac{\alpha + 45}{16} + 9}{4} \\ &\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{\alpha + 189}{64}} \end{aligned}$$

3

1 اثبات ان (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 3 \\ &= \frac{u_n + 9}{4} - 3 \\ &= \frac{u_n - 3}{4} \\ &= \frac{1}{4} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 3 = \alpha - 3$$

ومنه (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول v_0 حيث: $v_0 = \alpha - 3$.

2 كتابة v_n بدلالة n :

$$v_n = (\alpha - 3) \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

• استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = u_n - 3 \Rightarrow u_n = v_n + 3$$

$$\Rightarrow u_n = (\alpha - 3) \left(\frac{1}{4}\right)^n + 3$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[(\alpha - 3) \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_0 + 3 \right] = \boxed{3}$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= (\alpha - 3) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= (\alpha - 3) \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) \\ &= \frac{4}{3} (\alpha - 3) \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{(\alpha - 3)}{3} \left(4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right)$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 3 + v_1 + 3 + \dots + v_n + 3 \\ &= \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_n} + 3(n+1) \end{aligned}$$

$$S'_n = \frac{(\alpha - 3)}{3} \left(4 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right) + 3(n+1)$$

التمرين 09

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 6 \\ u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6 \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $v_n = u_n - 4$

1 احسب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 .

2 بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن:

$$u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$$

3 بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v₀ .

4

1 اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2 اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3 احسب نهاية المتتالية (u_n)

5 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

6 استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

حل التمرين 09

1 حساب الحدود: u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\begin{aligned} \bullet u_{0+1} &= -\frac{1}{2}u_0 + 6 \Rightarrow u_1 = -\frac{1}{2}(6) + 6 \\ &\Rightarrow \boxed{u_1 = 3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet u_{1+1} &= -\frac{1}{2}u_1 + 6 \Rightarrow u_2 = -\frac{1}{2}(3) + 6 \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{9}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet u_{2+1} &= -\frac{1}{2}u_2 + 6 \Rightarrow u_3 = -\frac{1}{2}\left(\frac{9}{2}\right) + 6 \\ &\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{15}{4}} \end{aligned}$$

2 تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= -\frac{1}{2}u_n + 6 \Rightarrow u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 \\ &\Rightarrow u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}u_n + 2 \\ &\Rightarrow \boxed{u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)} \end{aligned}$$

3 تبين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v₀ .

لدينا:

$$\begin{aligned}v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\&= -\frac{1}{2}u_n + 6 - 4 \\&= -\frac{1}{2}u_n + 2 \\&= -\frac{1}{2}(u_n - 4) \\&= -\frac{1}{2}v_n\end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = 2$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $-\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = 2$

① كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

② كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4$$

$$\Rightarrow u_n = 2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[2 \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 4 \right] = 4$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$\begin{aligned}S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\&= 2 \left(\frac{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)} \right) \\&= \left(\frac{2 - 2 \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{3}{2}} \right)\end{aligned}$$

$$S_n = \frac{2}{3} [2 + (-2)^{-n}]$$

⑤ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n :

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$$\begin{aligned}
&= v_0 + 4 + v_1 + 4 + \cdots + v_n + 4 \\
&= \underbrace{v_0 + v_1 + \cdots + v_n}_{S_n} + 4(n+1)
\end{aligned}$$

$$S'_n = \frac{2}{3} [2 + (-2)^{-n}] + 4(n+1)$$

التمرين 10

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + 2} \end{cases}$$

1

① في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$ ، أنشئ (C_f) التمثيل البياني للدالة f حيث:

$$f: x \rightarrow \sqrt{x+2} \quad \text{والمستقيم } (\Delta) \text{ الذي معادلته: } y = x$$

② أنشئ على محور الفواصل الحدود u_0, u_1, u_2 و u_3 دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

③ ما هو تخمينك حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) ؟

2

① بين بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$.

② بين أن (u_n) متناقصة. ماذا تستنتج؟

3

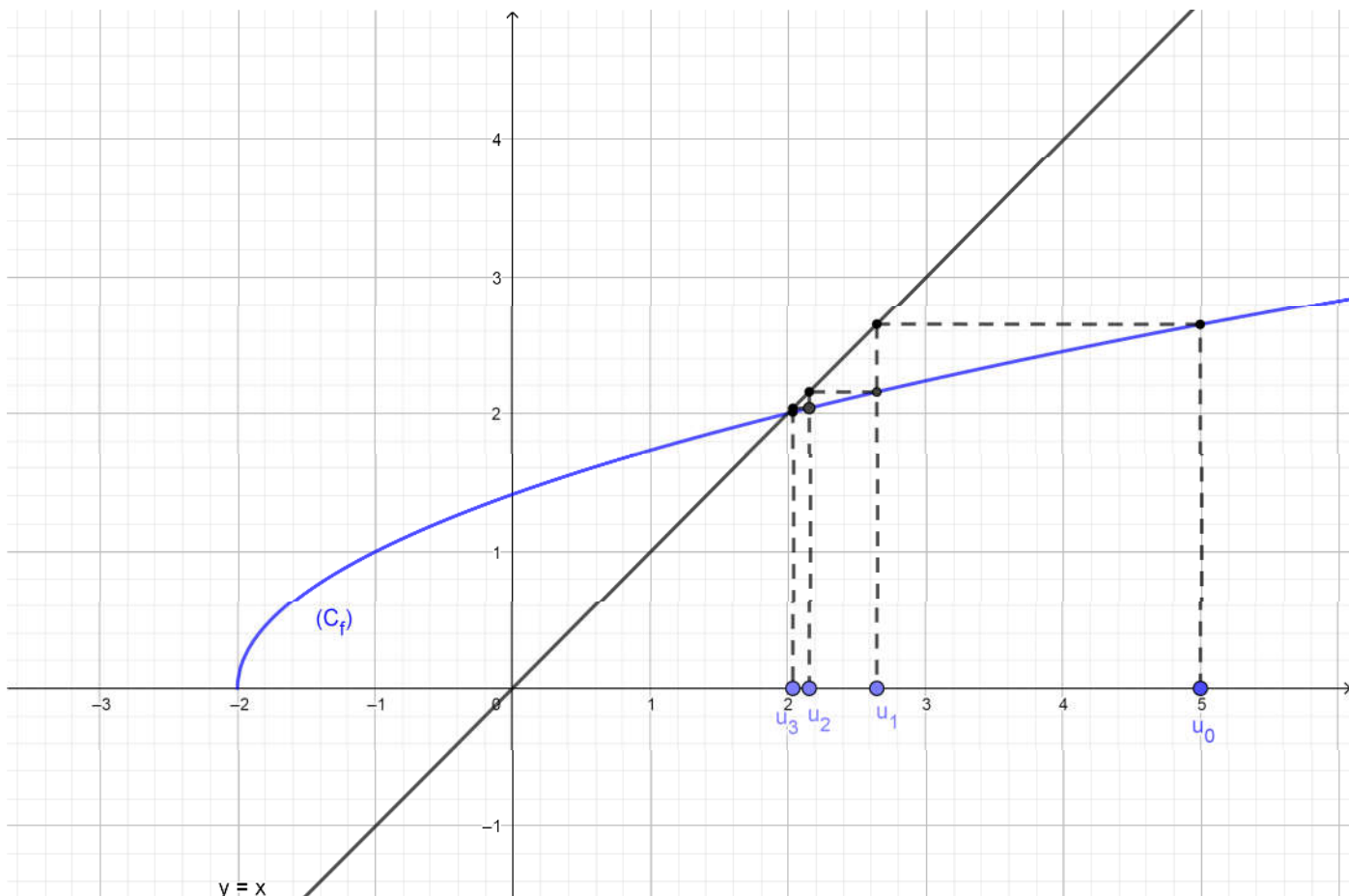
① بين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l = \sqrt{l+2}$.

② استنتج قيمة l .

حل التمرين 10

1

① التمثيل البياني:



② تمثيل الحدود الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 (في التمثيل البياني السابق).

③ التخمين حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية (u_n) :

من التمثيل البياني لدينا $u_0 > u_1 > u_2 > u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متناقصة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 2

②

① تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq 2$:

• لدينا من أجل $n = 0$:

$$u_0 = 5 \geq 2 \dots (*)$$

• نفرض أن $u_n \geq 2$ صحيحة ، ونثبت أن $u_{n+1} \geq 2$:

لدينا:

$$u_n \geq 2 \Rightarrow u_n + 2 \geq 4$$

$$\Rightarrow \sqrt{u_n + 2} \geq 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 2 \dots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n \geq 2}$$

② تبين أن (u_n) متناقصة:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \sqrt{u_n + 2} - u_n \\
 &= \frac{(\sqrt{u_n + 2} - u_n)(\sqrt{u_n + 2} + u_n)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\
 &= \frac{u_n + 2 + u_n\sqrt{u_n + 2} - u_n\sqrt{u_n + 2} - (u_n)^2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\
 &= \frac{-(u_n)^2 + u_n + 2}{\sqrt{u_n + 2} + u_n} \\
 &= \frac{-(u_n - 2)(u_n + 1)}{\sqrt{u_n + 2} + u_n}
 \end{aligned}$$

لدينا: $0 < \sqrt{u_n + 2} + u_n$ ومنه إشارة $(u_{n+1} - u_n)$ من إشارة البسط:

u_n	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$-$	0	$+$	$-$

ومنه (u_n) متناقصة تماما.

• الاستنتاج:

بما أن (u_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بـ 2 فهي متقاربة.

3

① تبين أن النهاية l للمتتالية (u_n) تحقق: $l = \sqrt{l + 2}$:

لدينا (u_n) متقاربة ومنه:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_{n+1}] = l \end{cases}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \sqrt{u_n + 2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_{n+1}] = \lim_{n \rightarrow +\infty} [\sqrt{u_n + 2}] \\
 &= l \\
 \Rightarrow l &= \sqrt{\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] + 2} \\
 &= \sqrt{l + 2} \\
 \Rightarrow l &= \sqrt{l + 2}
 \end{aligned}$$

② استنتاج قيمة l :

لدينا:

$$\begin{aligned}
 l &= \sqrt{l + 2} \Rightarrow l^2 = l + 2 \\
 &\Rightarrow l^2 - l - 2 = 0 \\
 &\Rightarrow (l - 2)(l + 1) = 0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} l - 2 = 0 \\ \text{أو} \\ l + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} l = 2 \\ \text{أو} \\ l = -1 \text{ (مرفوض)} \end{cases}$$

ومنه:

$$\boxed{l = 2}$$

التمرين 11

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{2u_n + 2}{u_n + 3} \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

1 بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 .

2

1 اكتب عبارة v_n بدلالة n .

2 اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3 احسب نهاية المتتالية (u_n)

3

1 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

2 تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3} (1 - v_n)$$

3 استنتج بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$S'_n = \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2}$$

حل التمرين 11

1 تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_0 :

لدينا:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2} \\
&= \frac{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} - 1\right)}{\left(\frac{2u_n + 2}{u_n + 3} + 2\right)} \\
&= \frac{2u_n + 2 - u_n - 3}{2u_n + 2 + 2u_n + 6} \\
&= \frac{u_n - 1}{4u_n + 8} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 1}{u_n + 2}\right) \\
&= \frac{1}{4} v_n
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{-1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول $-\frac{1}{2}$

②

① كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

② كتابة عبارة u_n بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow v_n(u_n + 2) - (u_n - 1) = 0 \\
&\Rightarrow v_n u_n + 2v_n - u_n + 1 = 0 \\
&\Rightarrow u_n(v_n - 1) = -(2v_n + 1) \\
&\Rightarrow u_n = -\frac{2v_n + 1}{v_n - 1} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}{1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^n} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-(2^{-2})^n + 1}{1 + (2^{-1})(2^{-2})^n} \\
&\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{1 - 2^{-2n}}{1 + 2^{-2n-1}}}
\end{aligned}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{-\overbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}^0 + 1}{1 + \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^n}_0} \right] \\ &= \frac{1}{1} = \boxed{1} \end{aligned}$$

3

① التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2^2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right) \\ &= -\frac{2}{3} (1 - (2^{-2})^{n+1}) \\ &= \boxed{\frac{2}{3} (2^{-2(n-1)} - 1)} \end{aligned}$$

② التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{u_{n+2}} = \frac{1}{3} (1 - v_n)$

لدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \Rightarrow 1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 2} \\ &\Rightarrow 1 - v_n = \frac{u_n + 2 - u_n + 1}{u_n + 2} \\ &\Rightarrow 1 - v_n = \frac{3}{u_n + 2} \\ &\Rightarrow \boxed{\frac{1}{3} (1 - v_n) = \frac{1}{u_n + 2}} \end{aligned}$$

③ استنتاج بدلالة n المجموع S'_n

$$\begin{aligned} S'_n &= \frac{1}{u_0 + 2} + \frac{1}{u_1 + 2} + \dots + \frac{1}{u_n + 2} \\ &= \frac{1}{3} (1 - v_0) + \frac{1}{3} (1 - v_1) + \dots + \frac{1}{3} (1 - v_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{3}(1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n) \\
&= \frac{1}{3} \left[1(n+1) - \underbrace{(v_0 + v_1 + \dots + v_n)}_{S_n} \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[n+1 - \frac{2}{3}(2^{-2(n-1)} - 1) \right] \\
&= \frac{1}{3} \left[\frac{3n}{3} + \frac{3}{3} - \frac{2^{-2(n-1)+1}}{3} + \frac{2}{3} \right]
\end{aligned}$$

$$S'_n = \frac{1}{9}[3n + 5 - 2^{3-2n}]$$

التمرين 12

① (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة:

$$f(x) = \frac{2}{3}x + 2$$

و (D) المستقيم ذو المعادلة $y = x$

ولنعبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 2 \end{cases}$$

① مثل بيانيا (C_f) و (D) ، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

② ضع تخمينا حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

③ برهن بالتراجع أن: $u_n \leq 6$ مهما كان $n \in \mathbb{N}$.

④ ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) . هل هي متقاربة؟ برر اجابتك.

② نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$

① اثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

④ عبر بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n حيث:

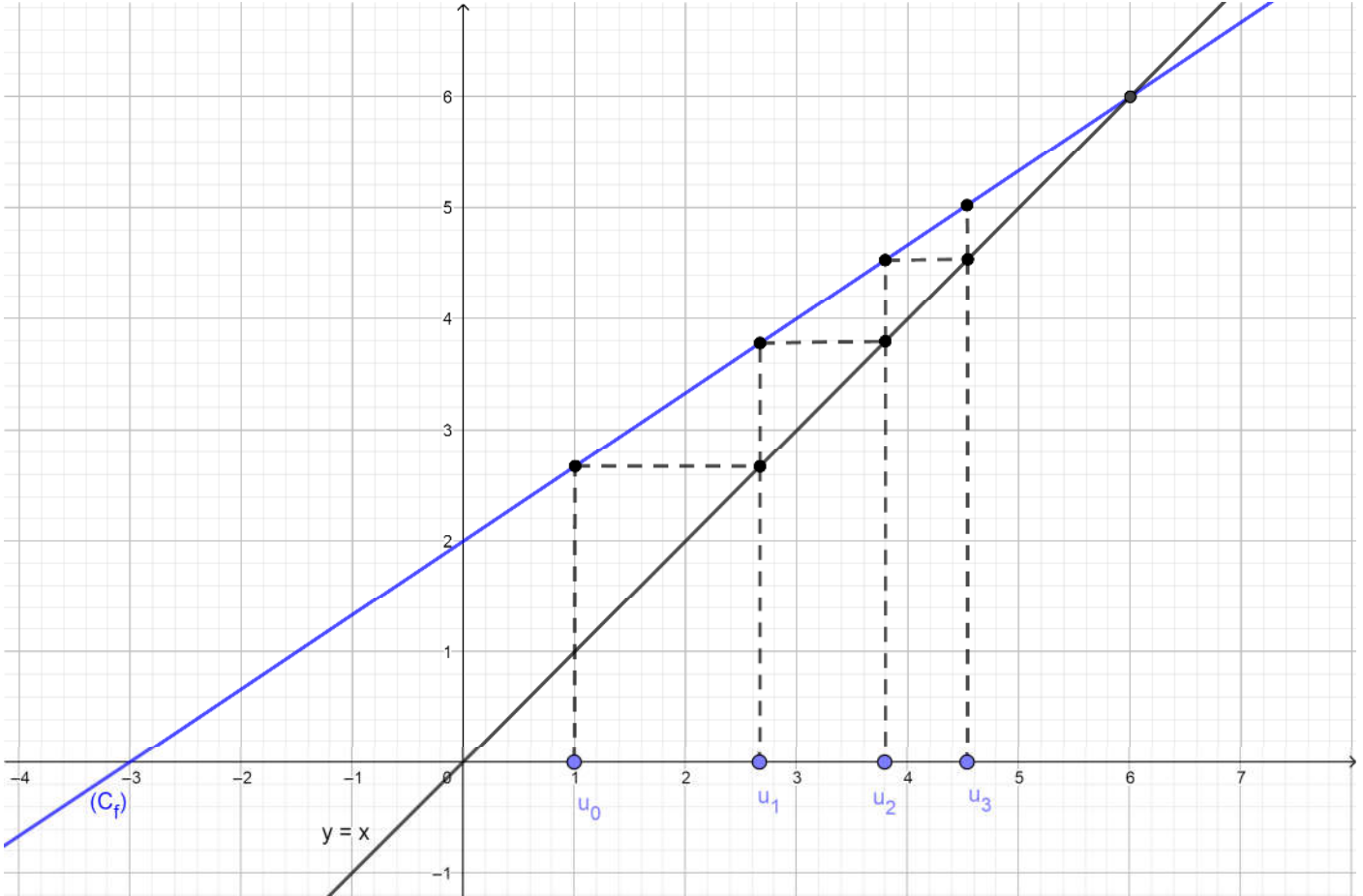
$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$$

$$S'_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

⑤ عبر بدلالة n عن المجموع Q_n حيث: $Q_n = v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2$

⑥ عبر بدلالة n عن الجداء P_n حيث: $P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$

① التمثيل البياني للدالة f وتمثيل الحدود u_0, u_1, u_2, u_3 دون حسابها:



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة، وتتقارب نحو نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 6

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N} : u_n \leq 6$

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 6 \dots (*)$$

• نفرض أن $[u_n \leq 6]$ ونثبت أن $[u_{n+1} \leq 6]$:

$$u_n \leq 6 \Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq 4$$

$$\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + 2 \leq 6$$

$$\Rightarrow u_{n+1} \leq 6 \dots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من (*) و (**) نجد أن: $u_n \leq 6$

④ دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + 2 - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + 2 \end{aligned}$$

لدينا:

$$-\frac{1}{3}u_n + 2 = 0 \Rightarrow u_n = 6$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	6	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

لدينا من الجدول لما $(u_n \leq 6)$ تكون (u_n) متزايدة.

وبما أن (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 6 فهي متقاربة.

②

① اثبات أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n + 2 - 6 \\ &= \frac{2}{3}u_n - 4 \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 6) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 6 = -5$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول -5 .

② كتابة عبارة v_n بدلالة n واستنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$v_n = -5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

لدينا:

$$v_n = u_n - 6 \Rightarrow u_n = v_n + 6$$

$$\Rightarrow u_n = 6 - 5 \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[6 - 5 \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] = 6$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموعين S_n و S'_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_n \\ &= -5 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} \right) \\ &= -5 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{\frac{1}{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\boxed{S_n = 15 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)}$$

$$\begin{aligned} S'_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= v_0 + 6 + v_1 + 6 + \dots + v_n + 6 \\ &= 6(n+1) + \underbrace{v_0 + v_1 + \dots + v_n}_{S_n} \end{aligned}$$

$$\boxed{S'_n = 6(n+1) + 15 \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{n+1} - 1 \right)}$$

⑤ التعبير بدلالة n عن المجموع Q_n :

$$\begin{aligned} Q_n &= v_0^2 + v_1^2 + \dots + v_n^2 \\ &= (-5)^2 \left(\frac{1 - \left(\left(\frac{2}{3} \right)^2 \right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2} \right) \\ &= 25 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2(n+1)}}{\frac{5}{9}} \right) \\ Q_n &= 45 \left(1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{2(n+1)} \right) \end{aligned}$$

⑥ التعبير بدلالة n عن الجداء P_n :

$$\begin{aligned} P_n &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^0 \times (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \dots \times (-5) \left(\frac{2}{3} \right)^n \end{aligned}$$

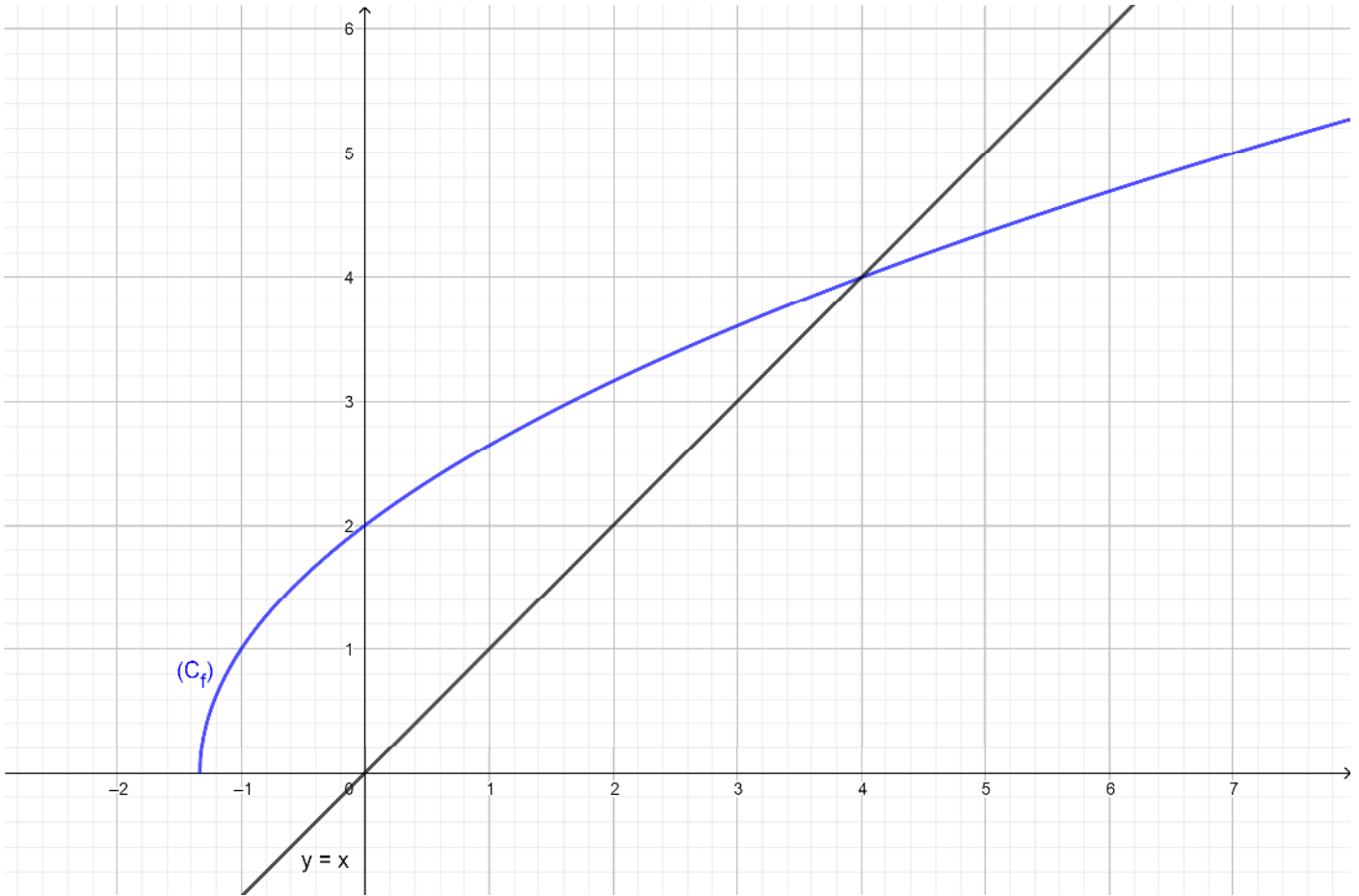
$$= (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^0 \times \left(\frac{2}{3} \right)^1 \times \dots \times \left(\frac{2}{3} \right)^n \right)$$

$$= (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{0+1+\dots+n} \right)$$

$$P_n = (-5)^{n+1} \left(\left(\frac{2}{3} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right)$$

التمرين 13

(C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على $\left[-\frac{4}{3}; +\infty\right[$ بالعلاقة: $f(x) = \sqrt{3x+4}$ ، و (d) المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، كما هو موضح في الشكل التالي:



ولنعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4} \end{cases}$$

1

① أعد رسم الشكل، ثم مثل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها مبررا خطوط الانشاء.

② ضع تخميناً حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها.

③ برهن بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن: $0 < u_n < 4$.

2

① بين أنه من أجل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

② استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

3

① بين أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$:

$$4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$$

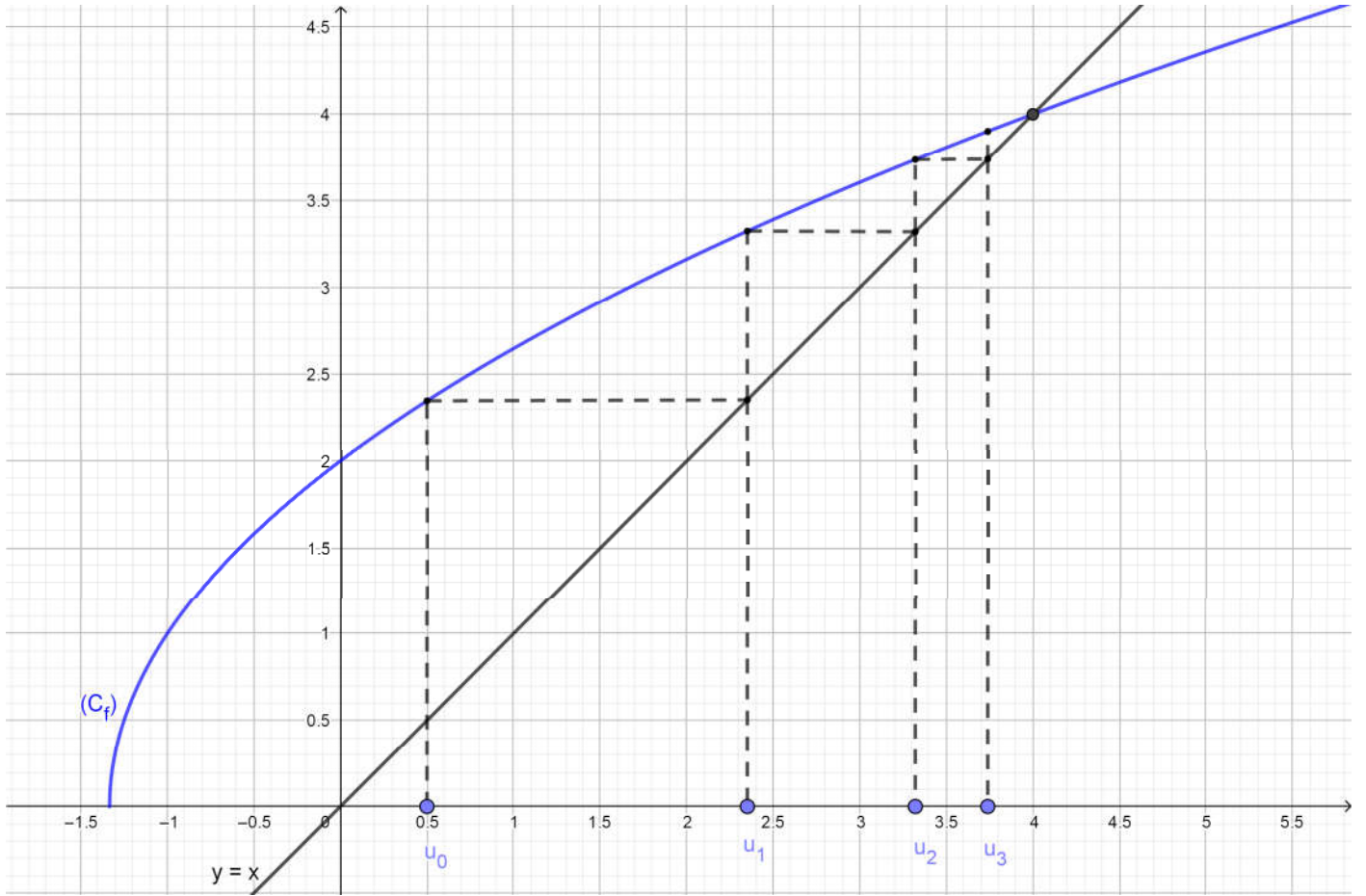
② احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

③ هل توجد طريقة أخرى لحساب نهاية المتتالية (u_n) ؟

حل التمرين 13

1

① تمثيل الحدود u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 على محور الفواصل دون حسابها :



② التخمين حول اتجاه تغير (u_n) وتقاربها:

من التمثيل البياني لدينا $u_0 < u_1 < u_2 < u_3$ ، ومنه نستنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة ، وتتقارب نحو

نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم (Δ) أي في النقطة ذات الفاصلة 4

③ البرهان بالتراجع أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$: فإن: $0 < u_n < 4$

• لما $n = 0$ نجد:

$$0 < u_0 < 4 \Rightarrow 0 < \frac{1}{2} < 4 \dots (1)$$

• نفرض أن $0 < u_n < 4$ ونبرهن أن $0 < u_{n+1} < 4$:

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 4 &\Rightarrow 0 < 3u_n < 12 \\ &\Rightarrow 4 < 3u_n + 4 < 16 \\ &\Rightarrow 2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4 \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 4 \dots (2) \end{aligned}$$

من (1) و (2) نجد أن:

$$0 < u_n < 4$$

②

① تبين أنه من أجل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{(4-u_n)(u_n+1)}{\sqrt{3u_n+4}+u_n}$

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= \sqrt{3u_n + 4} - u_n \\
&= \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\
&= \frac{3u_n + 4 + u_n\sqrt{3u_n + 4} - u_n\sqrt{3u_n + 4} - (u_n)^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\
&= \frac{3u_n + 4 - (u_n)^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\
&= \frac{-(u_n - 4)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} \\
&= \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}
\end{aligned}$$

② استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(4 - u_n)(u_n + 1)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

ولدينا: $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$

ومنه إشارة $(u_{n+1} - u_n)$ من إشارة البسط:

$$(4 - u_n)(u_n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 4 - u_n = 0 \\ \text{أو} \\ u_n + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_n = 4 \\ \text{أو} \\ u_n = -1 \end{cases}$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	-1	4	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	$-$	0	$+$	0

من الجدول نجد أن (u_n) متزايدة في المجال $0 < u_n < 4$

③

① تبين أنه مهما كان $n \in \mathbb{N}$ فإن: $4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

• لما $n = 0$ لدينا:

$$4 - u_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 (4 - u_0) \Rightarrow 4 - u_0 \leq 4 - u_0 \dots (3)$$

• نفرض أن $\left[4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)\right]$ ونبرهن أن: $\left[4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (4 - u_0)\right]$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
4 - u_{n+1} &= 4 - \sqrt{3u_n + 4} \\
&= \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\
&= \frac{12 - 3u_n}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} \\
&= \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} (4 - u_n) \dots (*)
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
0 < u_n < 4 &\Rightarrow 0 < 3u_n < 12 \\
&\Rightarrow 4 < 3u_n + 4 < 16 \\
&\Rightarrow 2 < \sqrt{3u_n + 4} < 4 \\
&\Rightarrow 6 < 4 + \sqrt{3u_n + 4} < 8 \\
&\Rightarrow \frac{1}{8} < \frac{1}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} < \frac{1}{6} \\
&\Rightarrow \frac{3}{8} < \frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} < \frac{1}{2} \dots (**)
\end{aligned}$$

لدينا من (*) و (**):

$$\begin{aligned}
4 - u_{n+1} &= \underbrace{\frac{3}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}}_{(**)} (4 - u_n) \\
&\Rightarrow 4 - u_{n+1} < \frac{1}{2} (4 - u_n) \dots (***)
\end{aligned}$$

ولدينا حسب فرض التراجع:

$$\left[4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0) \right]$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\underbrace{4 - u_{n+1} < \frac{1}{2} (4 - u_n)}_{(***)} &\Rightarrow 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)}_{(4-u_n)} \right) \\
&\Rightarrow 4 - u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} (4 - u_0) \dots (4)
\end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من (3) و (4) نجد أن:

$$\boxed{4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)}$$

② حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$:

لدينا:

$$0 < 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$$

لما $n \rightarrow +\infty$ لدينا:

$$\begin{aligned} 0 < 4 - u_n &\leq 0 \\ \Rightarrow -4 < -u_n &\leq -4 \\ \Rightarrow 4 &\leq u_n < 4 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = 4}$$

③ ايجاد طريقة أخرى لحساب نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = l \end{cases}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \sqrt{3u_n + 4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3u_n + 4}) \\ \Rightarrow \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1})}_{=l} &= \left(\sqrt{3 \underbrace{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)}_{=l} + 4} \right) \\ \Rightarrow l &= \sqrt{3l + 4} \\ \Rightarrow l^2 &= 3l + 4 \\ \Rightarrow l^2 - 3l - 4 &= 0 \\ \Rightarrow (l + 1)(l - 4) &= 0 \\ \Rightarrow \begin{cases} l + 1 = 0 \\ \text{أو} \\ l - 4 = 0 \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} l = -1 \text{ (مرفوض)} \\ \text{أو} \\ l = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

$l = -1$ مرفوض لأن: $0 < u_n < 4$

ومنه:

$$\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l = 4}$$

التمرين 14

1 نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية بحددها العام: $u_n = e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}$

① بين أن (u_n) متتالية هندسية، مبينا أساسها وحددها الأول.

② احسب نهاية المتتالية (u_n) . ماذا تستنتج؟

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

② نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n)$.

① عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج نوع المتتالية (v_n) .

② عبر بدلالة n العدد P_n حيث: $P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$

③ عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

حل التمرين 14

1

① تبين أن (u_n) متتالية هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= e^{\left(\frac{1}{2}-(n+1)\right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-n-1\right)} \\ &= e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)} e^{-1} \\ &= e^{-1} u_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$u_0 = e^{\left(\frac{1}{2}-0\right)} = \sqrt{e}$$

ومنه (u_n) متتالية هندسية e^{-1} أساسها e^{-1} وحددها الأول $\sqrt{e}$

② حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)} \right) = \boxed{0}$$

ماذا تستنتج؟

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \sqrt{e} \left(\frac{1 - (e^{-1})^n}{1 - e^{-1}} \right)$$

$$= \boxed{\sqrt{e} \left(\frac{1 - e^{-n}}{1 - e^{-1}} \right)}$$

④ التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = \ln(u_n)$$

$$\boxed{v_n = \frac{1}{2} - n}$$

- استنتاج نوع المتتالية (v_n) :

(u_n) متتالية حسابية حدها الأول $\frac{1}{2}$ وأساسها -1 .

⑤ التعبير بدلالة n العدد P_n :

$$P_n = \ln(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)$$

$$= \ln \left(e^{\left(\frac{1}{2}-0\right)} \times e^{\left(\frac{1}{2}-1\right)} \times \dots \times e^{\left(\frac{1}{2}-n\right)} \right)$$

$$= \ln \left(e^{\left(\frac{1}{2}-0\right) + \left(\frac{1}{2}-1\right) + \dots + \left(\frac{1}{2}-n\right)} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{2} - 0 \right) + \left(\frac{1}{2} - 1 \right) + \dots + \left(\frac{1}{2} - n \right)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1) - (0 + 1 + 2 + \dots + n)$$

$$= \frac{1}{2} (n+1) - \frac{n+1}{2} (n+0)$$

$$= \boxed{\frac{(1+n)(1-n)}{2}}$$

⑥ تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $P_n + 4n > 0$

$$P_n + 4n > 0 \Rightarrow \frac{(1+n)(1-n)}{2} + 4n > 0$$

$$\Rightarrow (1+n)(1-n) + 4n > 0$$

$$\Rightarrow 1 - n + n - n^2 + 4n > 0$$

$$\Rightarrow -n^2 + 4n + 1 > 0$$

لدينا:

$$\Delta = 16 - 4(-1)(1) = 20 = (2\sqrt{5})^2$$

$$\begin{cases} n_1 = 2 - \sqrt{5} \\ n_2 = 2 + \sqrt{5} \end{cases}$$

ومنه:

$$P_n + 4n > 0 \Rightarrow -n^2 + 4n + 1 > 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow -(n-2-\sqrt{5})(n-2+\sqrt{5}) > 0 \\
&\Rightarrow (2+\sqrt{5}-n)(n-2+\sqrt{5}) > 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} 2+\sqrt{5}-n > 0 \\ n-2+\sqrt{5} > 0 \end{cases} \quad \text{أو} \quad \Rightarrow \begin{cases} n < 2+\sqrt{5} \\ n > 2-\sqrt{5} \end{cases} \\
&\Rightarrow \boxed{n \in]2-\sqrt{5}; 2+\sqrt{5}[}
\end{aligned}$$

التمرين 15

(u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{cases}$$

و (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = u_n - 4$$

- ① بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$
- ② ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$.
- ③ بين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
- ④ اكتب كل من (v_n) و (u_n) بدلالة n .
- ⑤ احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$
- ⑥ لتكن (w_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ:
$$w_n = 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right)$$
- ① بين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

$$\textcircled{2} \text{ احسب } \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n]$$

حل التمرين 15

- ① تبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ فإن: $u_n \leq 4$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

- من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 \leq 4 \dots (*)$$

الخاصية محققة من أجل $n = 0$

• نفرض أن $u_n \leq 4$ محققة ونثبت أن $u_{n+1} \leq 4$:

$$\begin{aligned} u_n \leq 4 &\Rightarrow \frac{2}{3}u_n \leq \frac{8}{3} \\ &\Rightarrow \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} \leq 4 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq 4 \dots (**) \end{aligned}$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n \leq 4}$$

② دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) على $\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - u_n \\ &= -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{3}u_n + \frac{4}{3} &= 0 \\ &\Rightarrow u_n = 4 \end{aligned}$$

u_n	$-\infty$	4	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

ومنه لما $u_n \leq 4$ لدينا (u_n) متزايدة تماماً.

③ تبين أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 4 \\ &= \frac{2}{3}u_n + \frac{4}{3} - 4 \\ &= \frac{2}{3}u_n - \frac{8}{3} \\ &= \frac{2}{3}(u_n - 4) \\ &= \frac{2}{3}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - 4 = -3$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $v_0 = -3$.

④ كتابة كلا من (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = -3 \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}v_n &= u_n - 4 \Rightarrow u_n = v_n + 4 \\&\Rightarrow \boxed{u_n = 4 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n}\end{aligned}$$

⑤ حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$\begin{aligned}S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\&= v_1 + 4 + v_2 + 4 + \dots + v_n + 4 \\&= 4n + (v_1 + v_2 + \dots + v_n) \\&= 4n - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^1 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}}\right) \\&= 4n - 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}}\right) \\&= \boxed{4n - 6 \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)}\end{aligned}$$

⑥

① تبين أن المتتالية (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}w_{n+1} - w_n &= 5 \left(\frac{1}{v_{n+1} + 5} - 1 \right) - 5 \left(\frac{1}{v_n + 5} - 1 \right) \\&= 5 \left(\frac{1}{\underbrace{5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}_{v_{n+1}}} - 1 - \frac{1}{\underbrace{5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n}_{v_n}} + 1 \right) \\&= 5 \left(\frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n} \right)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} < \left(\frac{2}{3}\right)^n &\Rightarrow -3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > -3 \left(\frac{2}{3}\right)^n \\&\Rightarrow 5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} > 5 - 3 \left(\frac{2}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} < \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n} \\ &\Rightarrow \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n} < 0 \\ &\Rightarrow 5 \left(\frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}} - \frac{1}{5 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n} \right) < 0 \\ &\Rightarrow w_{n+1} - w_n < 0 \end{aligned}$$

ومنه (w_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$

② حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n]$:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n - w_n] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\underbrace{4 - 3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_0 - 5 \left(\frac{1}{\underbrace{-3\left(\frac{2}{3}\right)^n}_0 + 5} - 1 \right) \right] \\ &= 4 - 5 \left(\frac{1}{5} - 1 \right) \\ &= \boxed{8} \end{aligned}$$

التمرين 16

① (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2 - \frac{1}{u_n} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

② برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

③ استنتج ان المتتالية (u_n) متقاربة.

② نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1}$$

① برهن أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② اكتب عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) .

③ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، استنتج أن:

$$u_n = \frac{n+2}{n+1}$$

④ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 16

1

① البرهان بالتراجع أنه من أجل عدد طبيعي n : $u_n > 1$

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 2 > 1 \dots (*)$$

• نفرض أن $(u_n > 1)$ صحيحة ونثبت أن $(u_{n+1} > 1)$:

لدينا:

$$u_n > 1 \Rightarrow \frac{1}{u_n} < 1$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u_n} > -1$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{1}{u_n} > -1 + 2$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 1 \dots (**)$$

حسب البرهان بالتراجع من $(*)$ و $(**)$ نجد أن: $(u_n > 1)$.

② برهان أن المتتالية (u_n) متناقصة:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 2 - \frac{1}{u_n} - u_n \\ &= \frac{2u_n - 1 - (u_n)^2}{u_n} \end{aligned}$$

لدينا $u_n > 1$ معناه $(u_n > 0)$ ومنه إشارة $(u_{n+1} - u_n)$ من إشارة البسط:

$$-(u_n)^2 + 2u_n - 1 = 0$$

لدينا:

$$\Delta = 2^2 - 4(-1)(-1) = 0$$

ومنه:

u_n	$-\infty$	1	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

ومنه لما $u_n > 1$ تكون (u_n) متناقصة تماما.

③ استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة:

بما أن (u_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 1 فهي متقاربة.

① برهان أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= 3 + \frac{1}{u_{n+1} - 1} \\
 &= 3 + \frac{1}{2 - \frac{1}{u_n} - 1} \\
 &= 3 + \frac{1}{\frac{u_n - 1}{u_n}} \\
 &= 3 + \frac{u_n}{u_n - 1} \\
 &= 3 + \frac{u_n + 1 - 1}{u_n - 1} \\
 &= 3 + \frac{1}{u_n - 1} + \frac{u_n - 1}{u_n - 1} \\
 &= 3 + \frac{1}{u_n - 1} + 1 \\
 &= \underbrace{3 + \frac{1}{u_n - 1}}_{v_n} + 1 \\
 &= v_n + 1
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = 3 + \frac{1}{u_0 - 1} = 4$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها 1 وحدها الأول 4.

② كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) :

$$\boxed{v_n = 4 + n}$$

③ من أجل كل n من $\mathbb{N}$ ، استنتاج أن: $u_n = \frac{n+2}{n+1}$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 v_n = 3 + \frac{1}{u_n - 1} &\Rightarrow 4 + n = 3 + \frac{1}{u_n - 1} \\
 &\Rightarrow 1 + n = \frac{1}{u_n - 1} \\
 &\Rightarrow u_n - 1 = \frac{1}{1 + n} \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{1}{1 + n} + 1 \\
 &\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{2 + n}{1 + n}}
 \end{aligned}$$

④ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2+n}{1+n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{n} \right) \\ &= \boxed{1}\end{aligned}$$

التمرين 17

① المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{4u_n}{1+u_n} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2 .

② برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$

② لتكن (v_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_n - 3}{u_n}$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$

② اكتب (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n .

③ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

③ (w_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n :

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

نضع: $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

① اثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$$

③ احسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n/n]$

حل التمرين 17

1

① حساب u_1 و u_2 :

$$\begin{aligned} u_{0+1} &= \frac{4u_0}{1+u_0} \Rightarrow u_1 = \frac{4}{2} \\ &\Rightarrow \boxed{u_1 = 2} \\ u_{1+1} &= \frac{4u_1}{1+u_1} \Rightarrow u_2 = \frac{4 \times 2}{1+2} \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{8}{3}} \end{aligned}$$

② البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$0 < 1 < 3 \Rightarrow 0 < u_0 < 3 \dots (*)$$

• نفرض أن $0 < u_n < 3$ صحيحة ونثبت أن $0 < u_{n+1} < 3$:

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{4u_n}{1+u_n} \\ &= \frac{4u_n + 4 - 4}{1+u_n} \\ &= \frac{4(u_n + 1)}{1+u_n} - \frac{4}{1+u_n} \\ &= 4 - \frac{4}{1+u_n} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} 0 < u_n < 3 &\Rightarrow 1 < 1 + u_n < 4 \\ &\Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{1+u_n} < 1 \\ &\Rightarrow 1 < \frac{4}{1+u_n} < 4 \\ &\Rightarrow -4 < -\frac{4}{1+u_n} < -1 \\ &\Rightarrow 0 < 4 - \frac{4}{1+u_n} < 3 \\ &\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 3 \dots (**) \end{aligned}$$

حسب البرهان بالتراجع من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{0 < u_n < 3}$$

②

① تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1}} \\
&= \frac{\frac{4u_n}{1+u_n} - 3}{\frac{4u_n}{1+u_n}} \\
&= \frac{4u_n - 3 - 3u_n}{4u_n} \\
&= \frac{u_n - 3}{4u_n} \\
&= \frac{1}{4} \left(\frac{u_n - 3}{u_n} \right) \\
&= \frac{1}{4} v_n
\end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_0 - 3}{u_0} = \frac{1 - 3}{1} = -2$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول -2

② كتابة (v_n) بدلالة n ثم استنتج (u_n) بدلالة n :

$$v_n = -2 \left(\frac{1}{4} \right)^n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - 3}{u_n} \Rightarrow v_n u_n - u_n = -3 \\
&\Rightarrow u_n (v_n - 1) = -3 \\
&\Rightarrow u_n = \frac{-3}{v_n - 1} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 - v_n} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{3}{1 + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n}
\end{aligned}$$

③ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(u_n = \frac{3}{1 + 2 \left(\frac{1}{4} \right)^n} \right)$$

$$= \frac{3}{1 + 2(0)}$$

$$= \boxed{3}$$

3

① اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $w_n = 1 - v_n$

$$w_n = \frac{3}{u_n}$$

$$= \frac{3}{\frac{3}{1 - v_n}}$$

$$= 3 \times \frac{1 - v_n}{3}$$

$$= \boxed{1 - v_n}$$

② تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = n + 1 + \frac{8}{3} \left[1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right]$

$$S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$$

$$= 1 - v_0 + 1 - v_1 + \dots + 1 - v_n$$

$$= 1(n + 1) - (v_0 + v_1 + \dots + v_n)$$

$$= n + 1 + 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} \right)$$

$$= n + 1 + 2 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \right)$$

$$= \boxed{n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)}$$

③ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n/n]$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [S_n/n] = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n + 1 + \frac{8}{3} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right)}{n} \right]$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{8}{3n} \left(1 - \left(\frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \right]$$

$$= \boxed{1}$$

التمرين 18

1 (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = u_n + \ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) \end{cases}$$

① احسب u_1, u_2 و u_3 .

② بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$\frac{2n+3}{2n+1} > 1$$

③ استنتج اتجاه تغير (u_n) .

2 (v_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ: $v_n = 2n + 1$.

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $e^{u_n} = v_n$.

② استنتج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

④ احسب المجموع (T_n) حيث:

$$T_n = e^{u_{1439}} + e^{u_{1440}} + \dots + e^{u_{2018}}$$

حل التمرين 18

1

① حساب u_1, u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = u_0 + \ln\left(\frac{2(0)+3}{2(0)+1}\right) \Rightarrow \boxed{u_1 = \ln(3)}$$

$$\begin{aligned} u_{1+1} &= u_1 + \ln\left(\frac{2(1)+3}{2(1)+1}\right) \Rightarrow u_2 = \ln(3) + \ln\left(\frac{5}{3}\right) \\ &\Rightarrow \boxed{u_2 = \ln(5)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_{2+1} &= u_2 + \ln\left(\frac{2(2)+3}{2(2)+1}\right) \Rightarrow u_3 = \ln(5) + \ln\left(\frac{7}{5}\right) \\ &\Rightarrow \boxed{u_3 = \ln(7)} \end{aligned}$$

② تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$:

$$2n + 3 > 2n + 1 \Rightarrow \boxed{\frac{2n + 3}{2n + 1} > 1}$$

③ استنتاج اتجاه تغير (u_n) :

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= u_n + \ln\left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right) - u_n \\ &= \ln\left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right) \end{aligned}$$

وبما أن $\frac{2n+3}{2n+1} > 1$ فإن $\ln\left(\frac{2n+3}{2n+1}\right) > 0$

ومنه $u_{n+1} - u_n > 0$

اذن: (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

②

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $e^{u_n} = v_n$

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$e^{u_0} = v_0 \Rightarrow e^0 = 1 \Rightarrow 1 = 1 \dots (*)$$

• نفرض أن $e^{u_n} = v_n$ ونثبت أن $e^{u_{n+1}} = v_{n+1}$

$$e^{u_n} = v_n \Rightarrow u_n = \ln(v_n)$$

$$\Rightarrow u_n + \ln\left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right) = \ln\left(\frac{2n + 1}{v_n}\right) + \ln\left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \ln\left((2n + 1) \times \left(\frac{2n + 3}{2n + 1}\right)\right)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} = \ln(2n + 3)$$

$$\Rightarrow e^{u_{n+1}} = 2n + 3$$

$$\Rightarrow e^{u_{n+1}} = 2(n + 1) + 1$$

$$\Rightarrow e^{u_{n+1}} = v_{n+1} \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{e^{u_n} = v_n}$$

② استنتاج عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) :

$$e^{u_n} = v_n \Rightarrow u_n = \ln(v_n)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \ln(2n + 1)}$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = \ln\left(\frac{v_1}{v_0}\right) + \ln\left(\frac{v_2}{v_1}\right) + \dots + \ln\left(\frac{v_n}{v_{n-1}}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= \ln \left(\frac{v_1}{v_0} \times \frac{v_2}{v_1} \times \dots \times \frac{v_n}{v_{n-1}} \right) \\
&= \ln \left(\frac{v_n}{v_0} \right) \\
&= \ln \left(\frac{2n+1}{1} \right) \\
&= \boxed{\ln(2n+1)}
\end{aligned}$$

④ حساب المجموع T_n :

نلاحظ أن (v_n) متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول 1 ومنه:

$$\begin{aligned}
T_n &= e^{u_{1996}} + e^{u_{1997}} + \dots + e^{u_{2021}} \\
&= v_{1996} + v_{1997} + \dots + v_{2021} \\
&= (2021 - 1996 + 1) \frac{(2(2021) + 1 + 2(1996) + 1)}{2} \\
&= 26 \times \frac{8036}{2} \\
&= \boxed{104468}
\end{aligned}$$

التمرين 19

① (u_n) المتتالية العددية المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + n - 1 \end{cases}$$

① احسب u_1, u_2 و u_3 .

② هل المتتالية u_n حسابية ؟ هندسية ؟

② نضع من أجل كل عدد n : $v_n = u_n - 2n + 6$

① احسب v_0, v_1, v_2 و v_3 .

② اثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها.

③ اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

④ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

⑤ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

حل التمرين 19

1

① حساب u_1, u_2 و u_3 :

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + 0 - 1 \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} - 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = -\frac{1}{2}}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + 1 - 1 \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = -\frac{1}{4}}$$

$$u_{2+1} = \frac{1}{2}u_2 + 2 - 1 \Rightarrow u_3 = \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right) + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{7}{8}}$$

② هل المتتالية u_n حسابية ؟ هندسية ؟

• (u_n) متتالية حسابية معناه:

$$u_3 - u_2 = u_2 - u_1 = u_1 - u_0 = r$$

لدينا:

$$\begin{cases} u_3 - u_2 = \frac{9}{8} \\ u_2 - u_1 = \frac{1}{4} \\ u_1 - u_0 = -1 \end{cases}$$

$$u_3 - u_2 \neq u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$$

ومنه (u_n) ليست حسابية.

• (u_n) متتالية هندسية معناه:

$$\frac{u_3}{u_2} = \frac{u_2}{u_1} = \frac{u_1}{u_0} = q$$

لدينا:

$$\begin{cases} \frac{u_3}{u_2} = -\frac{7}{2} \\ \frac{u_2}{u_1} = \frac{1}{2} \\ \frac{u_1}{u_0} = -1 \end{cases}$$

$$\frac{u_3}{u_2} \neq \frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$$

ومنه (u_n) ليست هندسية.

③ حساب v_0, v_1, v_2 و v_3 :

$$v_0 = u_0 - 2(0) + 6 \Rightarrow \boxed{v_0 = 7}$$

$$v_1 = u_1 - 2(1) + 6 \Rightarrow \boxed{v_1 = \frac{7}{2}}$$

$$v_2 = u_2 - 2(2) + 6 \Rightarrow \boxed{v_2 = \frac{7}{4}}$$

$$v_3 = u_3 - 2(3) + 6 \Rightarrow \boxed{v_3 = \frac{7}{8}}$$

④ اثبات أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n + n - 1 - 2n - 2 + 6 \\ &= \frac{1}{2}u_n - n + 3 \\ &= \frac{1}{2}(u_n - 2n + 6) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا: $v_0 = 7$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 7 .

⑤ كتابة عبارة (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= u_n - 2n + 6 \Rightarrow u_n = v_n + 2n - 6 \\ &\Rightarrow u_n = 7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 \end{aligned}$$

⑥ حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(7 \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2n - 6 \right) \\ &= +\infty \end{aligned}$$

لأن: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

⑦ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 6 = v_n + w_n$$

حيث (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 + 2(0) - 6 + v_1 + 2(1) - 6 + \dots + v_n + 2n - 6$$

$$w_n = 2n - 6 \text{ نضع}$$

نلاحظ أن w_n عبارة متتالية حسابية أساسها 2 وحدها الأول -6 ومنه:

$$S_n = (v_0 + v_1 + \dots + v_n) + (w_0 + w_1 + \dots + w_n)$$

$$= 7 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right) + (n+1) \frac{(2n - 6 - 6)}{2}$$

$$= 7 \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} \right) + (n+1) \frac{(2n - 12)}{2}$$

$$= \boxed{14 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \right) + (n+1)(n-6)}$$

التمرين 20

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} \end{cases}$$

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$.

② بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما.

③ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة.

④ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} \leq \frac{1}{3} u_n$$

⑤ استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

⑥ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

1 تبين أنه من أجل كل عدد طبيعي $n: u_n \geq 0$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 1 > 1 \dots (*)$$

• نفرض أن $(u_n > 0)$ ونثبت صحة $(u_{n+1} > 0)$:

نضع من أجل كل $x \in \mathbb{R}$:

$$u_{n+1} = f(x) = f(u_n)$$

أي:

$$f(x) = \frac{x^3}{3x^2 + 1}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{3x^2(3x^2 + 1) - 6x^4}{(3x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(3x^2 + 1 - 2x^2)}{(3x^2 + 1)^2} \\ &= \frac{3x^2(x^2 + 1)}{(3x^2 + 1)^2} \end{aligned}$$

لدينا: $f'(x) > 0$ و $f(0) = 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ولدينا من فرض البرهان:

$$u_n > 0 \Rightarrow f(u_n) > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n > 0}$$

2 تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} - u_n \\ &= \frac{(u_n)^3 - 3(u_n)^3 - u_n}{3(u_n)^2 + 1} \\ &= \frac{-2(u_n)^3 - u_n}{3(u_n)^2 + 1} \\ &= \frac{-u_n(2(u_n)^2 + 1)}{3(u_n)^2 + 1} \end{aligned}$$

لدينا: $(3(u_n)^2 + 1 > 0)$ و $(2(u_n)^2 + 1 > 0)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة $(-u_n)$

ومنه:

$$u_{n+1} - u_n < 0$$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

3 استنتاج ان المتتالية (u_n) متقاربة:

لدينا (u_n) متناقصة تماما ، ولدينا $u_n > 0$ فهي محدودة من الأسفل بـ 0

إذن: المتتالية (u_n) متقاربة .

4 تبين انه من اجل كل عدد طبيعي $n : u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n &= \frac{(u_n)^3}{3(u_n)^2 + 1} - \frac{1}{3}u_n \\ &= \frac{3(u_n)^3 - 3(u_n)^3 - u_n}{3(3(u_n)^2 + 1)} \\ &= \frac{-u_n}{3(3(u_n)^2 + 1)} \end{aligned}$$

لدينا $(3(u_n)^2 + 1 > 0)$ ومنه إشارة $(u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n)$ من إشارة $(-u_n)$

لدينا:

$$u_n > 0 \Rightarrow -u_n \leq 0$$

اذن:

$$u_{n+1} - \frac{1}{3}u_n \leq 0 \Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{3}u_n$$

5 استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$

لدينا:

$$\begin{aligned} u_1 &\leq \frac{1}{3}u_0 \leq \frac{1}{3} \\ u_2 &\leq \frac{1}{3}u_1 \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^2 \\ u_3 &\leq \frac{1}{3}u_2 \leq \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^3 \\ &\vdots \\ u_n &\leq \frac{1}{3}u_{n-1} \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{aligned}$$

اذن:

$$u_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

6 حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right) = \boxed{0}$$

التمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \\ v_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

و (v_n) متتالية معرفة بالشكل:

1 احسب u_2 و v_0 .

2 بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$.

3 اكتب عبارة (v_n) بدلالة n .

4 عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

5 عبر عن (u_n) بدلالة n ثم استنتج نهايتها.

حل التمرين 21

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{4} \\ u_1 = \frac{1}{2} \\ 4u_{n+2} = 7u_{n+1} - 3u_n \\ v_n = u_{n+1} - u_n \end{cases}$$

و (v_n) متتالية معرفة بالشكل:

1 حساب u_2 و v_0 :

$$4u_{0+2} = 7u_{0+1} - 3u_0 \Rightarrow u_2 = \frac{7\left(\frac{1}{2}\right) - 3\left(\frac{1}{4}\right)}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{11}{16}}$$

$$v_0 = u_{0+1} - u_0 \Rightarrow v_0 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_0 = \frac{1}{4}}$$

② تبين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+2} - u_{n+1} \\ &= \frac{7u_{n+1} - 3u_n}{4} - u_{n+1} \\ &= \frac{7u_{n+1} - 3u_n - 4u_{n+1}}{4} \\ &= \frac{3u_{n+1} - 3u_n}{4} \\ &= \frac{3}{4}(u_{n+1} - u_n) \\ &= \frac{3}{4}v_n \end{aligned}$$

ولدينا: $v_0 = \frac{1}{4}$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ وحدها الأول $\frac{1}{4}$

③ التعبير عن (v_n) بدلالة n :

$$\boxed{v_n = \frac{1}{4} \left(\frac{3}{4} \right)^n}$$

④ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 - \frac{3}{4}} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{\frac{1}{4}} \right) \\ &= \boxed{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n} \end{aligned}$$

⑤ التعبير عن (u_n) بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{cases} v_0 = u_1 - u_0 \\ v_1 = u_2 - u_1 \\ v_2 = u_3 - u_2 \\ \vdots \\ v_{n-1} = u_n - u_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع طرفاً لطرف نجد:

$$\underbrace{v_0 + v_1 + v_2 + \cdots + v_{n-1}}_{S_n} = u_1 - u_0 + u_2 - u_1 + u_3 - u_2 + \cdots + u_n - u_{n-1}$$

$$\Rightarrow 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = u_n - u_0$$

$$\Rightarrow u_n - \frac{1}{4} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

$$\Rightarrow u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n}$$

- استنتاج نهايتها:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{5}{4} - \left(\frac{3}{4}\right)^n \right) \\ &= \boxed{\frac{5}{4}} \end{aligned}$$

لأن: $-1 < \frac{3}{4} < 1$.

التمرين 22

① نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

② لتكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = u_n + \lambda n - 1$ حيث λ عدد طبيعي.

① أثبت أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها

وحدها الأول v_0 .

② نضع $\lambda = 2$ ، اكتب عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \cdots + v_n$

1

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي $n : u_n = 2^{-n} - 2n + 1$

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 2^{-0} - 2(0) + 1 \dots (*)$$

• نفرض أن $u_n = 2^{-n} - 2n + 1$ ونثبت أن $u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2(n+1) + 1$

لدينا:

$$u_n - 2u_{n+1} = 2n + 3 \Rightarrow u_{n+1} = \frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} u_n = 2^{-n} - 2n + 1 &\Rightarrow \frac{u_n}{2} = \frac{2^{-n}}{2} - n + \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{2} - n = 2^{-n-1} - 2n + \frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2} = 2^{-(n+1)} - 2n - \frac{3}{2} \\ &\Rightarrow u_{n+1} = 2^{-(n+1)} - 2n - 1 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n = 2^{-n} - 2n + 1}$$

2

① اثبات أنه يوجد عدد طبيعي λ تكون من أجله المتتالية (v_n) هندسية :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + \lambda(n+1) - 1 \\ &= \underbrace{\frac{u_n}{2} - n - \frac{3}{2}}_{u_{n+1}} + \lambda n + \lambda - 1 \\ &= \frac{1}{2}(u_n + \lambda n - 1) + \frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2 \\ &= \frac{1}{2}v_n + \left(\frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2\right) \end{aligned}$$

لكي تكون (v_n) متتالية هندسية يجب أن $\left(\frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2\right) = 0$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\lambda(n+2) - n - 2 &= 0 \Rightarrow \frac{1}{2}\lambda(n+2) = n + 2 \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}\lambda = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda = 2}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 + \lambda(0) - 1 = 1$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول 1 من أجل $\lambda = 2$.

② كتابة عبارة (v_n) :

$$\boxed{v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة (u_n) :

لدينا:

$$v_n = u_n + 2n - 1 \Rightarrow u_n = v_n - 2n + 1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n - 2n + 1}$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} \\ &= \frac{1 - (2^{-1})^{n+1}}{\frac{1}{2}} \\ &= 2(1 - 2^{-n-1}) \\ &= \boxed{2 - 2^{-n}} \end{aligned}$$

④ حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n)$:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (S_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (2 - 2^{-n}) = \boxed{2}$$

لأن: $-1 < 2^{-1} < 1$

التمرين 23

① نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} \end{cases}$$

① احسب u_1 و u_2

② نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{2}{3}n$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول

② عين عبارة (v_n) بدلالة n ، ثم استنتج عبارة (u_n) بدلالة n .

③ عبر بدلالة n عن المجموع S_n حيث: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$

③ ليكن S'_n حيث: $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ، بين أن:

$$S'_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{3}n(n+1)$$

④ ليكن الجداء P_n حيث: $P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$ ، بين أن: $P_n = (\sqrt{2})^{-n(n+1)}$

حل التمرين 23

1

① حساب u_1 و u_2 :

$$u_{0+1} = \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{3}(0) + \frac{2}{3} \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{11}{12}$$

$$u_{1+1} = \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{3}(1) + \frac{2}{3} \Rightarrow u_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{11}{12}\right) + \frac{1}{3} + \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{9}{8}$$

2

① تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \frac{2}{3}(n+1) \\ &= \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{3}n + \frac{2}{3} - \frac{2}{3}n - \frac{2}{3} \\ &= \frac{1}{2}u_n - \frac{1}{3}n \\ &= \frac{1}{2}\left(u_n - \frac{2}{3}n\right) \\ &= \frac{1}{2}v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = u_0 - \frac{2}{3}(0)$$

$$= \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.

② تعيين عبارة (v_n) و (u_n) بدلالة n :

$$v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1}$$

ولدينا:

$$v_n = u_n - \frac{2}{3}n \Rightarrow u_n = v_n + \frac{2}{3}n$$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{2}{3}n$$

③ التعبير بدلالة n عن المجموع S_n :

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{1+1} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{4} \left(\frac{1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n}{\frac{1}{2}} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 - \left(\frac{1}{2} \right)^n \right)$$

$$= \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right]$$

③ تبين عبارة S'_n :

$$u_n = v_n + \frac{2}{3}n$$

ومنه:

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_1 + \frac{2}{3}(1) + v_2 + \frac{2}{3}(2) + \dots + v_n + \frac{2}{3}n$$

$$= v_1 + v_2 + \dots + v_n + \frac{2}{3}(1 + 2 + \dots + n)$$

$$= S_n + \frac{2}{3} \left(\frac{n}{2} (n+1) \right)$$

$$= \boxed{\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} + \frac{1}{3} n(n+1)}$$

4 تبين أن: $P_n = (\sqrt{2})^{-n(n+1)}$

$$P_n = v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^2 \times \left(\frac{1}{2} \right)^3 \times \dots \times \left(\frac{1}{2} \right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{2} \right)^{2+3+\dots+n}$$

$$= (2^{-1})^{\frac{1}{2}n(n+2)}$$

$$= \left(2^{\left(-\frac{1}{2}\right)} \right)^{n(n+1)}$$

$$= \left(2^{\left(\frac{1}{2}\right)} \right)^{-n(n+1)}$$

$$= \boxed{(\sqrt{2})^{-n(n+1)}}$$

التمرين 24

1 (u_n) و (v_n) متتاليتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بالشكل التالي:

$$\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$$

1 احسب v_2, v_1, u_2, u_1 .

2 نعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = v_n - u_n$.

1 برهن أن المتتالية (w_n) هندسية أساسية أساسها $\frac{1}{4}$.

2 اكتب عبارة (w_n) بدلالة n .

3 عين نهاية المتتالية (w_n) .

3 ادرس اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) .

4 برهن أن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين، ماذا تستنتج؟

5 نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

1 برهن أن المتتالية (t_n) ثابتة.

1

① حساب u_1, v_1, u_2, v_2 :

$$u_{0+1} = \frac{u_0 + v_0}{2} \Rightarrow u_1 = \frac{3 + 4}{2}$$

$$\Rightarrow u_1 = \frac{7}{2}$$

$$v_{0+1} = \frac{u_{0+1} + v_0}{2} \Rightarrow v_1 = \frac{\frac{7}{2} + 4}{2}$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{15}{4}$$

$$u_{1+1} = \frac{u_1 + v_1}{2} \Rightarrow u_2 = \frac{\frac{7}{2} + \frac{15}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow u_2 = \frac{29}{8}$$

$$v_{1+1} = \frac{u_{1+1} + v_1}{2} \Rightarrow v_2 = \frac{\frac{29}{8} + \frac{15}{4}}{2}$$

$$\Rightarrow v_2 = \frac{59}{16}$$

2

① برهان أن المتتالية (w_n) هندسية أساسية أساسها $\frac{1}{4}$:

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= v_{n+1} - u_{n+1} \\ &= \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n + 2v_n}{2}}{2} - \frac{u_n + v_n}{2} \\ &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + 2v_n}{4} \\ &= \frac{-u_n + v_n}{4} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{4}(v_n - u_n)$$

$$= \frac{1}{4}w_n$$

ولدينا:

$$w_0 = v_0 - u_0$$

$$= 4 - 3$$

$$= 1$$

ومنه (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{4}$ وحدها الأول 1 .

② كتابة عبارة (w_n) بدلالة n :

$$w_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

③ تعيين نهاية المتتالية (w_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = 0$$

③ دراسة اتجاه تغير المتتاليتين (u_n) و (v_n) :

لدينا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n$$

$$= \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2}$$

$$= \frac{v_n - u_n}{2}$$

$$= \frac{w_n}{2}$$

ومنه إشارة الفرق من إشارة المتتالية (w_n) ، ولدينا وضوحاً أن $(w_n) > 0$.

ومنه المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

ولدينا:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_{n+1} + v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2} - v_n$$

$$= \frac{u_n + v_n + 2v_n}{4} - \frac{4v_n}{4}$$

$$= \frac{u_n - v_n}{4}$$

$$= -\frac{w_n}{4}$$

ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

④ برهان ان المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين:

لدينا:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n - u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (w_n) = 0$$

ولدينا:

(u_n) متتالية متزايدة تماماً و (v_n) متناقصة تماماً

اذن المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتين.

- الاستنتاج:

بما أن المتتاليتين متجاورتين فإن لهما نفس النهاية.

⑤ نعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3}$$

① برهان ان المتتالية (t_n) ثابتة:

$$\begin{aligned} t_{n+1} - t_n &= \frac{u_{n+1} + 2\frac{u_{n+1} + v_n}{2}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + 2\frac{\frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{2}}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{\frac{u_n + v_n}{2} + \frac{u_n + v_n}{2} + v_n}{3} - \frac{u_n + 2v_n}{3} \\ &= \frac{u_n + v_n + v_n - u_n - 2v_n}{3} \\ &= \frac{0}{3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (t_n) متتالية ثابتة

② استنتاج نهاية المتتاليتين (u_n) و (v_n) :

بما أن (t_n) ثابتة ، لدينا:

$$t_n = \frac{u_n + 2v_n}{3} = t_0 = \frac{u_0 + 2v_0}{3} = \frac{3 + 2(4)}{3} = \frac{11}{3} = t_1 = t_2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n)$$

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (t_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n + 2v_n}{3} \right) = \frac{11}{3}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = l \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = l \end{cases}$$

وبما أن l و (u_n) نفس النهاية فإن:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (v_n) = l \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_{n+1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (v_{n+1}) = l \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{u_n + 2v_n}{3} \right) = \frac{11}{3} &\Rightarrow \frac{\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) + 2 \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n)}{3} = \frac{11}{3} \\ &\Rightarrow \frac{l + 2l}{3} = \frac{11}{3} \\ &\Rightarrow 3l = 11 \\ &\Rightarrow l = \frac{11}{3} \end{aligned}$$

إذن:

$$\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (u_n) = \frac{11}{3}}$$

التمرين 25

نعتبر (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 7u_n + 8u_{n-1} \end{cases}$$

والمتتالية (s_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$s_n = u_{n+1} + u_n$$

1

① بين ان المتتالية (s_n) هندسية مبينا أساسها وحدها الأول.

② استنتج عبارة s_n بدلالة n .

② نضع $v_n = (-1)^n \times u_n$ ، ونعتبر المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$t_n = v_{n+1} - v_n$$

① عبر عن t_n بدلالة s_n

② عبر عن v_n ثم u_n بدلالة n .

3 احسب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n/8^n]$

حل التمرين 25

1

① تبين ان المتتالية (s_n) هندسية:

$$\begin{aligned} s_{n+1} &= u_{n+2} + u_{n+1} \\ &= \underbrace{7u_{n+1} + 8u_n}_{u_{n+2}} + u_{n+1} \\ &= 8u_{n+1} + 8u_n \\ &= 8(u_{n+1} + u_n) \\ &= 8s_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} s_0 &= u_{0+1} + u_0 \\ &= 1 + 0 \\ &= 1 \end{aligned}$$

ومنه (s_n) متتالية هندسية أساسها 8 وحدها الأول 1.

② استنتاج عبارة s_n بدلالة n :

$$s_n = (8)^n$$

2

$$t_n = v_{n+1} - v_n$$

① التعبير عن t_n بدلالة s_n :

$$\begin{aligned} t_n &= v_{n+1} - v_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} - (-1)^n \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} \times u_{n+1} + (-1)^{n+1} \times u_n \\ &= (-1)^{n+1} (u_{n+1} + u_n) \\ &= (-1)^{n+1} \times s_n \end{aligned}$$

② التعبير عن v_n و u_n بدلالة n :

لدينا:

$$\begin{cases} t_0 = v_1 - v_0 \\ t_1 = v_2 - v_1 \\ t_2 = v_3 - v_2 \\ \vdots \\ t_{n-1} = v_n - v_{n-1} \end{cases}$$

بالجمع نجد:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} = v_1 - v_0 + v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + \dots + v_n - v_{n-1}$$

ومنه:

$$t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} = -v_0 + v_n$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} t_n &= (-1)^{n+1} \times s_n \Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times s_{n-1} \\ &\Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times (8)^{n-1} \\ &\Rightarrow t_{n-1} = (-1)^n \times \frac{(8)^n}{8} \\ &\Rightarrow t_{n-1} = \frac{(-1 \times 8)^n}{8} \\ &\Rightarrow t_{n-1} = \frac{(-8)^n}{8} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} t_0 + t_1 + t_2 + \cdots + t_{n-1} &= -v_0 + v_n \Rightarrow -1 \left(\frac{1 - (-8)^n}{1 - (-8)} \right) = \underbrace{-0}_{-v_0} + v_n \\ &\Rightarrow v_n = - \left(\frac{1 - (-8)^n}{9} \right) \\ &\Rightarrow \boxed{v_n = \frac{1}{9} ((-8)^n - 1)} \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_n &= (-1)^n \times u_n \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{(-1)^n} \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}} \end{aligned}$$

③ حساب: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_n}{8^n} \right]$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{u_n}{8^n} \right] &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{(-8)^n - 1}{9(-1)^n}}{8^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n - 1}{8^n \times 9(-1)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n - 1}{9(-8)^n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{(-8)^n \left(1 - \frac{1}{(-8)^n} \right)}{9(-8)^n} \right] \end{aligned}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{1 - \frac{1}{(-8)^n}}{9} \right]$$

$$= \boxed{\frac{1}{9}}$$

التمرين 26

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ: $u_0 = 3$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$3u_{n+1} = u_n + 4n + 4$$

① احسب u_1 ، u_2 و u_3 .

②

① برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

② استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{4}{3}n$

③ لتكن (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ :

$$v_n = u_n - 2n + 1$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② استنتج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 2n - 1$$

③ احسب بدلالة n المجموع S_n ، حيث :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

④ نعتبر المتتالية (w_n) المعرفة بـ: $w_0 = -1$ ، ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3$$

① احسب w_1 ، w_2 ، w_3 و w_4 ، ما تخمينك لنوعية المتتالية (w_n) .

② برهن صحة تخمينك على نوعية المتتالية (w_n) .

③ احسب w_{1011} .

حل التمرين 26

① حساب u_1 ، u_2 و u_3 :

$$\begin{aligned} \bullet \quad 3u_{0+1} &= u_0 + 4(0) + 4 \Rightarrow 3u_1 = \underset{u_0}{3} + 4(0) + 4 \\ &\Rightarrow 3u_1 = 7 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_1 = \frac{7}{3}}$$

$$\bullet \quad 3u_{1+1} = u_1 + 4(1) + 4 \Rightarrow 3u_2 = \frac{7}{3} + 4(1) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_2 = \frac{31}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{31}{9}}$$

$$\bullet \quad 3u_{2+1} = u_2 + 4(2) + 4 \Rightarrow 3u_3 = \frac{31}{9} + 4(2) + 4$$

$$\Rightarrow 3u_3 = \frac{139}{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{139}{27}}$$

2

① برهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 0$

نبرهن القضية بالتراجع:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$u_0 = 3 > 0 \dots (*)$$

• نفرض أن $u_n > 0$ ونبرهن أن $u_{n+1} > 0$

لدينا:

$$u_n > 0 \Rightarrow u_n + 4n + 4 > 4n + 4$$

$$\text{ولدينا: } 4n + 4 > 0$$

إذن:

$$u_{n+1} > 0 \dots (**)$$

حسب مبدأ البرهان بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_n > 0}$$

② استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n > \frac{4}{3}n$

$$3u_{n+1} = u_n + 4n + 4 \quad \text{لدينا:}$$

$$3u_n = u_{n-1} + 4(n-1) + 4 = u_{n-1} + 4n \quad \text{ومنه:}$$

$$u_{n-1} > 0 \quad n \in \mathbb{N}^* \quad \text{ولدينا من أجل كل}$$

$$u_{n-1} + 4n > 4n \quad \text{ومنه:}$$

$$3u_n > 4n \quad \text{ومنه:}$$

$$\boxed{u_n > \frac{4}{3}n} \quad \text{اذن:}$$

① تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 2(n+1) + 1 \\ &= u_{n+1} - 2n - 1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} 3v_{n+1} &= 3u_{n+1} - 6n - 3 \\ &= \underbrace{u_n + 4n + 4}_{3u_{n+1}} - 6n - 3 \\ &= u_n - 2n + 1 \\ &= v_n \end{aligned}$$

ومنه:

$$v_{n+1} = \frac{1}{3}v_n$$

ولدينا:

$$v_0 = \underbrace{u_0}_3 - 2(0) + 1 \Rightarrow v_0 = 4$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ وحدها الأول 4 ، ومنه:

$$v_n = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

② استنتاج أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 2n - 1$

لدينا: $v_n = u_n - 2n + 1$

ومنه: $u_n = v_n + 2n - 1$

إذن:

$$u_n = 4 \left(\frac{1}{3} \right)^n + 2n - 1$$

ملاحظة: يمكن استعمال مبدأ البرهان بالتراجع

③ حساب بدلالة n المجموع S_n :

لدينا:

$$u_n = v_n + 2n - 1$$

ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + \dots + u_n \\ &= v_1 + 2(1) - 1 + v_2 + 2(2) - 1 + \dots + v_n + 2n - 1 \\ &= v_1 + v_2 + \dots + v_n + 2(1 + 2 + \dots + n) - 1(n + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= v_1 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{1 - \left(\frac{1}{3}\right)} + 2 \left(\frac{n}{2} (n+1) \right) - (n+1) \\
&\quad \underbrace{v_1 + v_2 + \dots + v_n}_{1+2+\dots+n} \\
&= 4 \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n}{\frac{2}{3}} + n(n+1) - (n+1) \\
&= 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + (n+1)(n-1)
\end{aligned}$$

$$S_n = 6 \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n \right) + n^2 - 1$$

4

① حساب w_1, w_2, w_3 و w_4 :

$$\begin{aligned}
1w_1 &= (1+1)w_{1-1} + 3 \Rightarrow w_1 = 2w_0 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_1 = 1} \\
2w_2 &= (2+1)w_{2-1} + 3 \Rightarrow w_2 = 2w_1 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_2 = 6} \\
3w_3 &= (3+1)w_{3-1} + 3 \Rightarrow w_3 = 2w_2 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_3 = 15} \\
4w_4 &= (4+1)w_{4-1} + 3 \Rightarrow w_4 = 2w_3 + 3 \\
&\Rightarrow \boxed{w_4 = 28}
\end{aligned}$$

من الحدود الأولى يمكن التخمين أن المتتالية (w_n) حسابية أساسها 2 وحدها الأول $w_0 = -1$ أي:

$$\boxed{w_n = -1 + 2n}$$

② برهان صحة التخمين على طبيعة المتتالية (w_n) :

لتكن القضية (P_n) حيث:

$$w_n = -1 + 2n \dots (P_n)$$

لدينا: $w_0 = -2 + 2(0) = -1$ ومنه (P_0) محققة.

نفرض أن (P_n) محققة ونبرهن أن (P_{n+1}) محققة. أي نبرهن أن $w_{n+1} = 1 + 2(n+1)$:

$$nw_n = (n+1)w_{n-1} + 3 \quad \text{لدينا:}$$

$$(n+1)w_{n+1} = (n+2)w_n + 3 \quad \text{ومنه:}$$

$$(n+1)w_{n+1} = (n+2)(-1 + 2n) + 3 \quad \text{ومنه:}$$

$$(n+1)w_{n+1} = 2n^2 + 3n + 1 \quad \text{ومنه:}$$

ومنه: $(n + 1)w_{n+1} = (n + 1)(2n + 1)$

ومنه: $w_{n+1} = 2n + 1$

اذن من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا:

$$w_n = -1 + 2n$$

③ حساب w_{1011} :

لدينا: $w_n = -1 + 2n$

ومنه:

$$w_{1011} = -1 + 2(1001)$$

$$w_{1011} = 2021$$

التمرين 27

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n نعرف المتتالية (u_n) كما يلي:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \left(\frac{n+1}{2n}\right)u_n \end{cases}$$

① احسب u_2 ، u_3

②

① برهن أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون: $u_n > 0$.

② برهن أن المتتالية (u_n) متناقصة.

③ ماذا تستنتج بالنسبة للمتتالية (u_n) ؟

③ نضع من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = u_n/n$

① برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② استنتج أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون: $u_n = n/2^n$

④ نعتبر الدالة f المعرفة على $[1; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = \ln x - x \ln 2$$

① عين نهاية الدالة عند $+\infty$.

② استنتج نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 27

① حساب u_2 ، u_3 :

$$u_{1+1} = \left(\frac{1+1}{2(1)}\right) u_1 \Rightarrow u_2 = \frac{2}{2} u_1$$

$$\Rightarrow \boxed{u_2 = \frac{1}{2}}$$

$$u_{2+1} = \left(\frac{2+1}{2(2)}\right) u_2 \Rightarrow u_3 = \frac{3}{4} u_2$$

$$\Rightarrow \boxed{u_3 = \frac{3}{8}}$$

②

① برهان أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون $u_n > 0$:

نستعمل البرهان بالتراجع:

• من أجل $n = 1$ لدينا:

$$u_1 = \frac{1}{2} > 0 \dots (*)$$

• نفرض أن $(u_n > 0)$ ونثبت أن $(u_{n+1} > 0)$:

لدينا:

$$u_n > 0 \Rightarrow (n+1)u_n > 0$$

$$\Rightarrow \frac{(n+1)u_n}{2n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0 \dots (**)$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{u_{n+1} > 0}$$

② برهان ان المتتالية (u_n) متناقصة:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(n+1)u_n}{2n} - u_n$$

$$= \frac{nu_n + u_n - 2nu_n}{2n}$$

$$= \frac{u_n(1-n)}{2n}$$

لدينا $2n > 0$ و $(1-n) < 0$

ومنه $(u_{n+1} - u_n < 0)$

اذن المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}^*$.

③ الاستنتاج:

بما أن المتتالية (u_n) متناقصة ومحدودة بالأسفل بـ 0 فهي متقاربة.

3

① برهان أن المتتالية (v_n) هندسية :

لدينا:

$$\begin{aligned}
 v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}}{n} \\
 &= \frac{(n+1)u_n}{2n} \\
 &= \frac{n+1}{2n} u_n \\
 &= \frac{(n+1)u_n}{2n(n+1)} \\
 &= \frac{1}{2} \frac{u_n}{n} \\
 &= \frac{1}{2} v_n
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}$$

اذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$.② استنتاج أنه من أجل كل عدد $n \in \mathbb{N}^*$ يكون $u_n = n/2^n$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
 v_n &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \\
 &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \\
 &= 2^{-n}
 \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}
 v_n = \frac{u_n}{n} &\Rightarrow u_n = n v_n \\
 &\Rightarrow u_n = n(2)^{-n} \\
 &\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{n}{2^n}}
 \end{aligned}$$

4

① تعيين نهاية الدالة عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x - x \ln 2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_0 - \ln 2 \right) \right)$$

$$= -\infty$$

② استنتاج نهاية المتتالية (u_n) :

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln x - x \ln 2 \\ &= \ln x - \ln 2^x \\ &= \ln \left(\frac{x}{2^x} \right) \end{aligned}$$

لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln \left(\frac{x}{2^x} \right) \right) = -\infty$$

ومنه:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n}{2^n} \right) = \underbrace{e^{-\infty}}_{(***)} = \boxed{0}$$

ملاحظة: (***) ليست كتابة رياضية ، وإنما للتوضيح ليس إلا.

التمرين 28

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{1}{2}$ ،
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1})^2 = 2u_{n+2} \times u_n$
ونضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

① بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

② استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون:

$$u_{n+1} = \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \times u_n$$

③ بين إذن أنه من أجل كل عد طبيعي n :

$$u_n = \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

④ احسب نهاية المتتالية (u_n) .

لتكن المتتالية العددية (u_n) ذات الحدود غير المعدومة $u_0 = 1$ و $u_1 = \frac{1}{2}$ ،
ومن أجل كل عدد طبيعي n : $(u_{n+1})^2 = 2u_{n+2} \times u_n$
ونضع من أجل كل عدد طبيعي n :

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

1 تبين أن المتتالية (v_n) هندسية:

لدينا:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} \\ &= \frac{(u_{n+1})^2}{2u_n} \\ &= \frac{u_{n+1}}{2u_n} \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{u_1}{u_0} = \frac{1}{2}$$

إذن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ وحدها الأول $\frac{1}{2}$

2 استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون $u_{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times u_n$

لدينا:

$$v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} \Rightarrow u_{n+1} = u_n v_n$$

$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}$$

3 تبين أنه من أجل كل عد طبيعي n $u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$

$$u_1 = u_0 \left(\frac{1}{2}\right)$$

4 حساب نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \right) \\ = \boxed{0}$$

لأن: $-1 < \frac{1}{2} < 1$

التمرين 29

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n} \end{cases}$$

1 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n لدينا:

$$\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$$

2 ادرس اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتج أنها متقاربة.

3 (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

1 بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول.

2 اكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n

3 عين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$

4 عين بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n$$

حل التمرين 29

1 البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$\frac{3}{2} \leq u_0 \leq 3 \Rightarrow \left[\frac{3}{2} \leq 3 \leq 3 \right] \dots (*)$$

• نفرض أن $\left(\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3 \right)$ ونثبت أن $\left(\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3 \right)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3 &\Rightarrow 6 \leq 4u_n \leq 12 \\
&\Rightarrow \frac{1}{12} \leq \frac{1}{4u_n} \leq \frac{1}{6} \\
&\Rightarrow \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4u_n} \leq \frac{3}{2} \\
&\Rightarrow -\frac{3}{2} \leq -\frac{9}{4u_n} \leq -\frac{3}{4} \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \leq 3 - \frac{9}{4u_n} \leq \frac{9}{4} \\
&\Rightarrow \frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4} \\
&\Rightarrow \left[\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3 \right] \dots (*)
\end{aligned}$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3}$$

② دراسة اتجاه تغير (u_n) ، ثم استنتاج أنها متقاربة:

$$\begin{aligned}
u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\
&= \frac{12u_n - 9 - 4(u_n)^2}{4u_n}
\end{aligned}$$

لدينا: $4u_n > 0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$$\begin{aligned}
12u_n - 9 - 4(u_n)^2 &= 0 \\
\Delta &= 12^2 - 4(-4)(-9) = 0
\end{aligned}$$

ومنه:

$$u_n = \frac{-12}{2(-4)} = \frac{3}{2}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
12u_n - 9 - 4(u_n)^2 &= 0 \Rightarrow \left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 = 0 \\
&\Rightarrow u_n = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

u_n	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$u_{n+1} - u_n$	+	0	-

ومنه (u_n) متناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{3}{2}; 4\right]$

- الاستنتاج:

لدينا (u_n) متناقصة تماما $[4; \frac{3}{2}]$ ومحدودة من الأسفل بـ $\frac{3}{2}$ فهي متقاربة

3

① تبين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} \\ &= \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} \\ &= \frac{2}{\frac{24u_n - 18 - 12u_n}{4u_n}} \\ &= \frac{8u_n}{12u_n - 18} \\ &= \frac{4u_n}{6u_n - 9} \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2u_n}{2u_n - 3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2u_n - 3 + 3}{2u_n - 3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{2u_n - 3}{2u_n - 3} + \frac{3}{2u_n - 3} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left(1 + \frac{3}{2u_n - 3} \right) \\ &= \frac{2}{3} + \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{2}{3} + v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{3}$$

ومنه (v_n) متتالية حسابية أساسها $\frac{2}{3}$ وحدها الأول $\frac{2}{3}$

② كتابة v_n بدلالة n ثم استنتاج u_n بدلالة n :

$$v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n \Rightarrow \boxed{v_n = \frac{2}{3}(n+1)}$$

ولدينا:

$$v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \Rightarrow 2v_n u_n - 3v_n = 2$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow 2v_n u_n = 2 + 3v_n \\
&\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3v_n}{2v_n} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{2 + 3\frac{2}{3}(n+1)}{2\frac{2}{3}(n+1)} \\
&\Rightarrow u_n = \frac{3 \times 2(n+2)}{4(n+1)} \\
&\Rightarrow \boxed{u_n = \frac{3(n+2)}{2(n+1)}}
\end{aligned}$$

③ تعيين $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n)$:

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3(n+2)}{2(n+1)} \right) \\
&= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3n}{2n} \right) \\
&= \boxed{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

④ تعيين بدلالة n المجموع S_n :

لدينا:

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{2}{2u_n - 3} \Rightarrow 2u_n v_n - 3v_n = 2 \\
&\Rightarrow u_n v_n = \frac{2 + 3v_n}{2} \\
&\Rightarrow 1 + \frac{3}{2}v_n
\end{aligned}$$

ومنه

$$\begin{aligned}
S_n &= u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n \\
&= 1 + \frac{3}{2}v_0 + 1 + \frac{3}{2}v_1 + \dots + 1 + \frac{3}{2}v_n \\
&= 1(n+1) + \frac{3}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) \\
&= n+1 + \frac{3}{2} \left(\underbrace{\left(\frac{2}{3}(n+1) \right)}_{v_n} + \underbrace{\left(\frac{2}{3} \right)}_{v_0} \right) \frac{\overbrace{n-0+1}^{n+1}}{2} \\
&= (n+1) + \frac{3}{2} \left(\left(\frac{2}{3}(n+2) \right) \frac{n+1}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (n+1) + \frac{(n+2)(n+1)}{2} \\
&= (n+1) \left(1 + \frac{n+2}{2}\right) \\
&= (n+1) \left(\frac{n+4}{2}\right) \\
&= \boxed{\frac{1}{2}(n+1)(n+4)}
\end{aligned}$$

التمرين 30

1 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = \frac{3}{2} \\ u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n - 1} \end{cases}$$

① برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن:

$$1 \leq u_n \leq 2$$

② بين أن (u_n) متزايدة، ماذا تستنتج؟

2 نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي:

$$v_n = \ln(u_n - 1)$$

① بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدتها الأولى.

② اكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n .

3 عين نهاية المتتالية (u_n) .

حل التمرين 30

1

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن $1 \leq u_n \leq 2$:

• من أجل $n = 0$ لدينا:

$$1 \leq u_0 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \frac{3}{2} \leq 2 \dots (*)$$

• نفرض أن $(1 \leq u_n \leq 2)$ ونثبت أن $(1 \leq u_{n+1} \leq 2)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}
1 \leq u_n \leq 2 &\Rightarrow 0 \leq u_n - 1 \leq 1 \\
&\Rightarrow 0 \leq \sqrt{u_n - 1} \leq 1
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 1 \leq 1 + \sqrt{u_n - 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2 \dots (**)$$

حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع: من (*) و (**) نجد أن:

$$\boxed{1 \leq u_n \leq 2}$$

② تبين أن (u_n) متزايدة:

لدينا:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1 + \sqrt{u_n - 1}}{u_n}$$

ولدينا:

$$1 + \sqrt{u_n - 1} > \sqrt{u_n - 1}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_n - 1} - u_n &= \frac{(\sqrt{u_n - 1} - u_n)(\sqrt{u_n - 1} + u_n)}{\sqrt{u_n - 1} + u_n} \\ &= \frac{u_n - 1 + u_n\sqrt{u_n - 1} - u_n\sqrt{u_n - 1} - (u_n)^2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n} \\ &= \frac{u_n - 1 - (u_n)^2}{\sqrt{u_n - 1} + u_n} \end{aligned}$$

لدينا $(\sqrt{u_n - 1} + u_n > 0)$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط

$$u_n - 1 - (u_n)^2 = 0$$

$$\Delta = 1^2 - 4(-1)(-1) = -3 < 0$$

ومنه:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_n - 1} - u_n < 0 &\Rightarrow \sqrt{u_n - 1} < u_n \\ &\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{u_n - 1}} > \frac{1}{u_n} \end{aligned}$$

ولدينا سابقا:

$$\begin{aligned} \frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{1 + \sqrt{u_n - 1}}{u_n} \Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\sqrt{u_n - 1}}{u_n} \\ &\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > \frac{\sqrt{u_n - 1}}{\sqrt{u_n - 1}} = 1 \\ &\Rightarrow \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1 \end{aligned}$$

اذن المتتاليه (u_n) متزايدة متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة ، ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة.

③ تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \ln(u_{n+1} - 1) \\ &= \ln(1 + \sqrt{u_n - 1} - 1) \\ &= \ln\left((u_n - 1)^{\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2} \ln(u_n - 1) \\ &= \frac{1}{2} v_n \end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} v_0 &= \ln(u_0 - 1) \\ &= \ln\left(\frac{3}{2} - 1\right) \\ &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= -\ln 2 \end{aligned}$$

④ كتابة عبارة v_n بدلالة n :

$$v_n = -\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \boxed{v_n = -\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n}$$

- استنتاج عبارة u_n بدلالة n :

$$\begin{aligned} v_n &= \ln(u_n - 1) \Rightarrow e^{v_n} = u_n - 1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{v_n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = e^{-\ln(2) \left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = \left(e^{\ln(2)}\right)^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow u_n = 2^{-\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1 \\ &\Rightarrow \boxed{u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n} + 1} \end{aligned}$$

⑤ تعيين نهاية المتتالية (u_n) :

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^{\left(\frac{1}{2}\right)^n}}_0 + 1 \right) \\ &= \boxed{1} \end{aligned}$$

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶