# الدوال العددية

reem. engineer

## ① - اتجاه التغير :

- أولا نحسب المشتقة :

$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1$

$f''(x) = 6x + 2$ | $f(x) = u/v$ ، $f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

- ندرس إشارة المشتقة على $\mathbb{R}$

لـ $f'(x) \geq 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على هذا المجال ، والعكس .

- ثم نضع جدول التغيرات .

## ② - معادلة المماس :

$(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

- في القراءة البيانية :

f'(قيمة)

القيمة = قيمة حدية ← $f'(\text{قيمة}) = 0$

القيمة = نقطة تماس ← $f'(\text{قيمة}) =$ معامل توجيه المماس

## ③ - مركز و محور التناظر :

المركز . $f(2a - x) + f(x) = 2b$

المحور . $f(2a - x) = f(x)$

## ④ - وضعية منحنى بالنسبة لمستقيم :

نضع : $f(x) - y$ ندرس إشارة الفرق وعلى أساسه نبني جدول الوضعية .

## ⑤ - مبرهنة القيم المتوسطة :

صيغة السؤال : بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ حيث : $\alpha \in ]-1,48 ; -1,47[$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ .

الجواب : الدالة g معرفة ومستمرة ورتيبة على $[-1,48 ; -1,47]$ :

$g(-1,48) = \sim\sim = - \sim$

$g(-1,47) = \sim\sim = + \sim$

لدينا : $g(-1,48) \times g(-1,47) < 0$

إذن $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا $\alpha$ ... حسب مبرهنة ق م

* الإشارة :

| $x$ | $-\infty$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $g(x)$ | $-$ | 0 | $+$ |

حسب إشارة

## ⑥ - النهايات :

- نهاية كثير حدود : يؤول لحساب نهاية أعلى حد .
- نهاية دالة ناطقة : يؤول لحساب نهاية أعلى على أعلى حد / بقيمة كبرى وصغرى للقيم الممنوعة .

• التفسير الهندسي :

← $x = a$ م م عمودي لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

← $y = b$ م م أفقي لـ $(C_f)$ بجوار $\pm\infty$

• المستقيم المقارب المائل:

- حتى يكون $y = ax+b$ ??? لـ $(C_f)$ يجب أن يكون:

$$\begin{cases} \lim_{x \to -\infty} f(x) - y = 0 \\ \lim_{x \to +\infty} f(x) - y = 0 \end{cases}$$

## حالات ع ت
### وطرق رفعها

**1.** طريقة الاختزال: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة ناطقة؛ نقسم البسط على المقام ونختزل الحدود المتشابهة؛ ثم نحسب النهاية عند $x_0$.

**2.** طريقة العدد المشتق: $\frac{0}{0}$

* عند تواجد دالة كسرية؛

$$f(x) = \frac{g(x) - g(x_0)}{x}$$

نشتق $g(x)$ وما نتحصل عليه نحسب عنده النهاية.

**3.** طريقة العامل المشترك: $-\infty+\infty$

reem. engineer

**4.** طريقة الضرب في المرافق

نضرب ونقسم على المرافق إذا كان

$$f(x) = \sqrt{\underline{a}x + b} \pm \underline{a}x$$

ونحسب النهاية.

**5.** طريقة الحصر:

لدينا: $h(x) \leq f(x) \leq g(x)$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to ..} h(x) = b \\ \lim_{x \to ..} g(x) = b \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to ..} f(x) = b$$

**6.** طريقة المقارنة:

$f(x) \geq g(x)$

و $\lim_{x \to ..} g(x) = +\infty$ إذن:

$\lim_{x \to ..} f(x) = +\infty$ مباشرة.

## نقطة الانعطاف:

**1.** إذا انعدمت المشتقة 2 عند $x_0$ وغيرت إشارتها فإن $(x_0; f(x_0))$ نقطة انعطاف لـ $(C_f)$.

**2.** إذا كان نقطة (~~انعطاف~~) مركز تناظر هي نقطة من $(C_f)$.

**3.** إذا انعدمت المشتقة 2 ولم تغير إشارتها عند النقطة A فإن A ن. إ.

**4.** نقطة التماس هي نقطة انعطاف لـ $(C_f)$ وقطع المنحنى للمماس.

# الدالة الأسية:

## 1. خواص الدالة الأسية:

- مج التعريف: $ID_{e^x} = IR$ و $e^x > 0$
- $f(x) = e^x$ متزايدة تماما على $IR$
- خواص:
  - $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$
  - $e^x / e^y = e^{x-y}$
  - $\sqrt{e^a} = e^{a/2}$
  - $(e^x)^y = e^{x \cdot y}$
  - $\ln e^a = a$
  - $e^0 = 1$

## 2. اشتقاق الدالة $e^x$:

$$(e^{f(x)})' = f'(x)\, e^{f(x)}$$

$$(e^{2x+1})' = 2\, e^{2x+1}$$

## 3. النهايات:

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$$

$y=0$ م م أفقي لـ $\mathcal{C}_f$ بجوار $-\infty$.

## 4. التزايد المقارن:

① - $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

② - $\lim_{x \to -\infty} x e^x = 0$

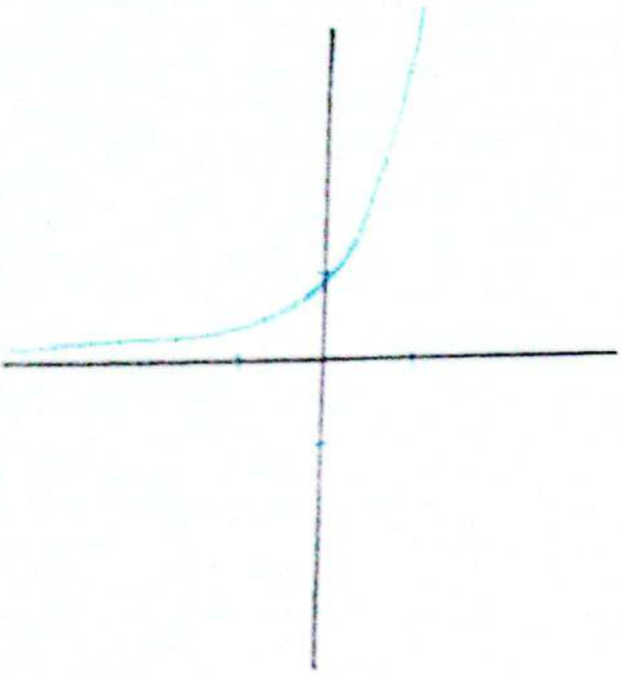
③ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

④ - $\lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

- $\lim_{x \to 0} \overbrace{(\text{كثير حدود})}^{y}\, \overbrace{e^x}^{x} =$ حسب النهايتين

- $\lim_{x \to 0} \overbrace{e^x}^{y} \pm \overbrace{(\text{كثير حدود})}^{x} =$ " "

## 4. التمثيل البياني:



- نهاية الدالة $e^{f(x)}$ تؤول لحساب نهاية مركب دالتين:

$$\lim_{x \to X} g(x) = \begin{cases} \lim_{x \to X} f(x) = \circ \\ \lim_{x \to \circ} e^x = \star \end{cases}$$

$$\lim_{x \to X} g(x) = \star$$

① - $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$

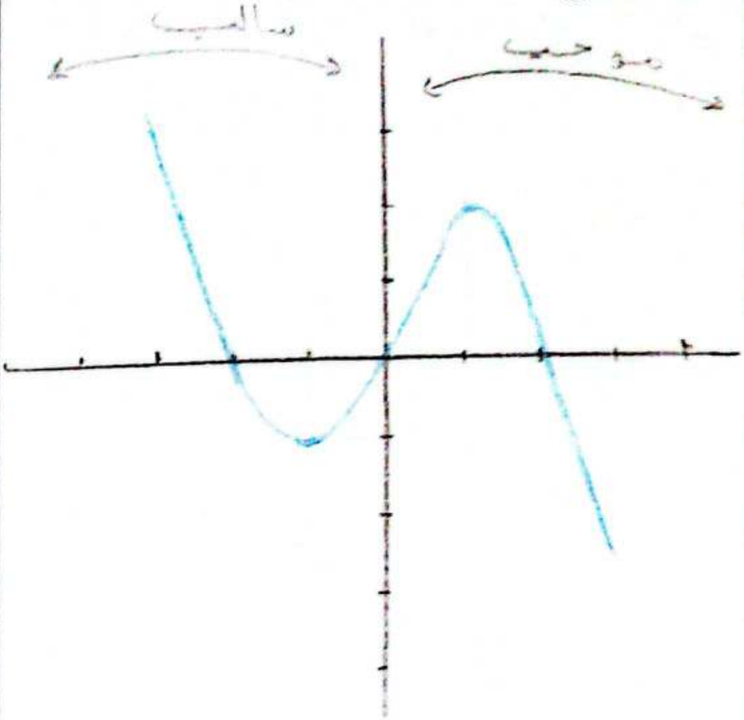
② - $\lim_{h \to 0} \frac{f(h + x_0) - f(x_0)}{h}$

- $\ell$:
  - عدد: مماس معامل توجيهه $f'(x_0)$
  - $0$: مماس أفقي $y = f(x_0)$
- $\pm\infty$: مماس عمودي معادلته $x = x_0$

# المناقشة البيانية

ملخصة

## الأفقية :

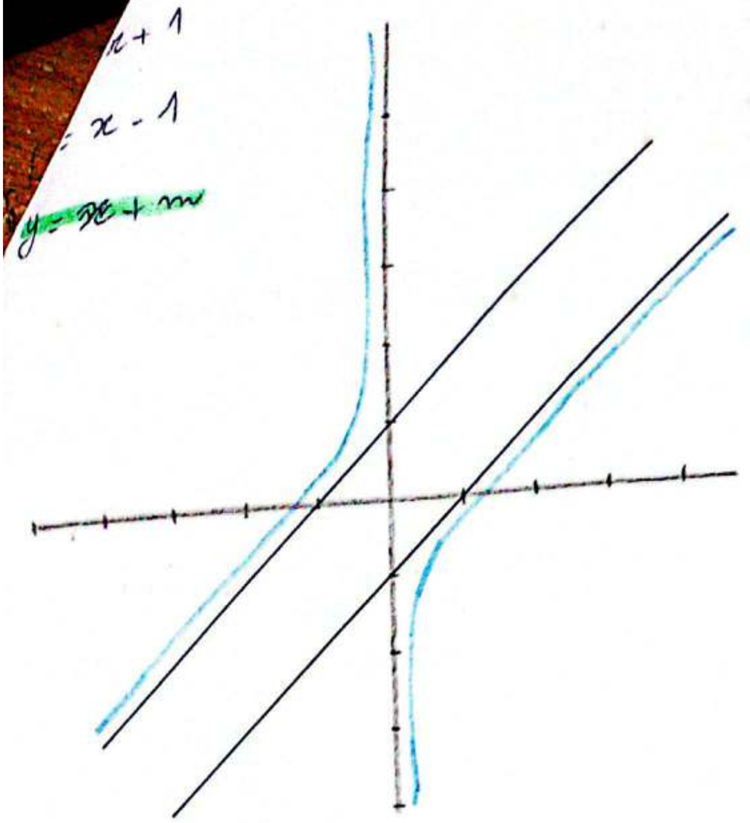



حلول المعادلة $f(x)=m$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع : $y=m$ :

- $m<-1$ : حل وحيد موجب
- $m=-1$ : حلين أحدهما مضاعف وآخر موجب
- $-1<m<0$ : حلين سالبين وحل موجب
- $m=0$ : 3 حلول معدوم ؛ موجب و سالب
- $0<m<2$ : 3 حلول ؛ 2 موجبة و 1 سالب
- $m=2$ : حل مضاعف $x=2$ وآخر سالب
- $m>2$ : حل وحيد سالب

## المائلة :

* حلول المعادلة $f(x)=x+m$ هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع $y=x+m$ :




- $m\in]-\infty;-1[$ : يوجد حل وحيد موجب
- $m\in[-1;1]$ : لا يوجد حلول
- $m\in]1;+\infty[$ : يوجد حل وحيد سالب

## الدورانية :

# الدالة اللوغاريتمية

## 1. خواص الدالة اللوغاريتمية:

هي دالة معاكسة للدالة الأسية تحقق:

$$\ln e^{a} = a$$

نرمز لها بـ $\ln x$ وهي معرفة على $]0;+\infty[$ (المهم أن يكون ما داخل ln موجب)

① - $\ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b$.

② - $\ln 1 = 0$ ; $\ln e = 1$.

③ - $\ln a^{n} = n \ln a$.

④ - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$.

⑤ - $\ln \frac{1}{a} = - \ln a$.

## 2. النهايات:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$$

## 3. المشتقة:

$$f(x) = \ln(u(x))$$

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

## 4. التزايد المقارن:

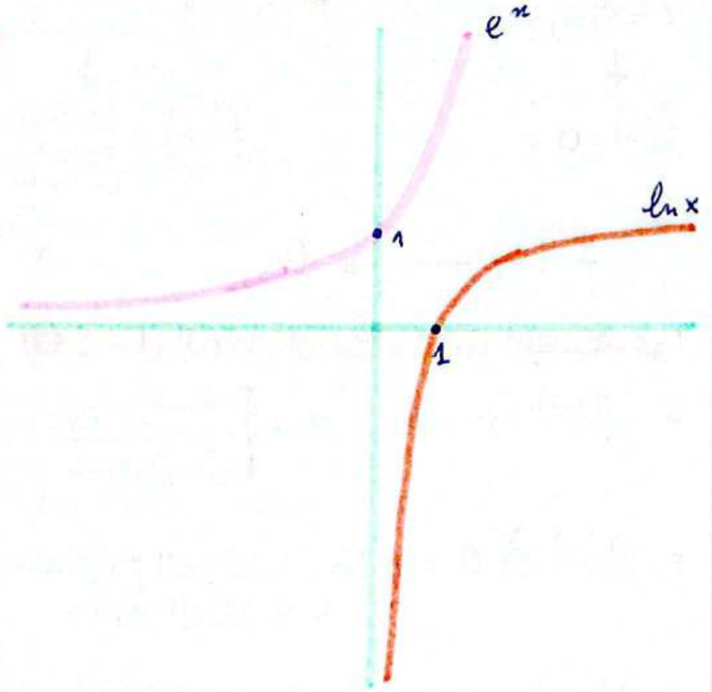
① - $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x - 1}{x - 1} = 1$

② - $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

③ - $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x^{n}} = 0$

④ - $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{n} \ln x = 0$

## ⑤. التمثيل البياني:



# القراءة البيانية

① - مجموعة التعريف: نقرأ من المنحنى وإذا كانت هناك قيمة ممنوعة نذكرها.

② - إيجاد الصور:

$f'(x)$

- $x =$ نقطة تماس ← $f'(x) =$ معامل توجيه المماس
- $x =$ ذروة ← $f'(x) = 0$

$f''(0) \longrightarrow 0$

③ - حل المعادلات والمتراجحات:

• $g(x) = 0 \Rightarrow x =$ { نقطة التقاطع مع محور الفواصل

• $g(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ نستخرج المجالات من جدول الإشارة.

• $g'(x) = 0 \Rightarrow x =$ الذروات

• $g'(x) \gtrless 0 \Rightarrow$ نعتمد على جدول إشارته الذي يكون معتمدا على تزايد أو تناقص الدالة.

④ - مبرهنة القيم المتوسطة:

"..."

$g(A) \gtrless 0 \xleftrightarrow{\text{القراءة البيانية}} g(B) \gtrless 0$

$g(A) \cdot g(B) < 0$

"..."

⑤ - تعيين الثوابت a و b و c:

• إذا كان $C_f$ يقبل في النقطة $A(x_0 ; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$$

نحل الجملة ....①

• إذا كان $(C_f)$ يقبل في النقطة ذات الفاصلة $x_0$ مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة:

$$y = mx + k$$

$$\begin{cases} f(x_0) = m x_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$$

نحل الجملة ....②

• إذا كان $(C_f)$ يقبل في $A(x_0 ; y_0)$ مماسا يشمل $B(x_1 ; y_1)$:

$$\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = \dfrac{y_0 - y_1}{x_0 - x_1} \end{cases} \quad \text{.....③}$$

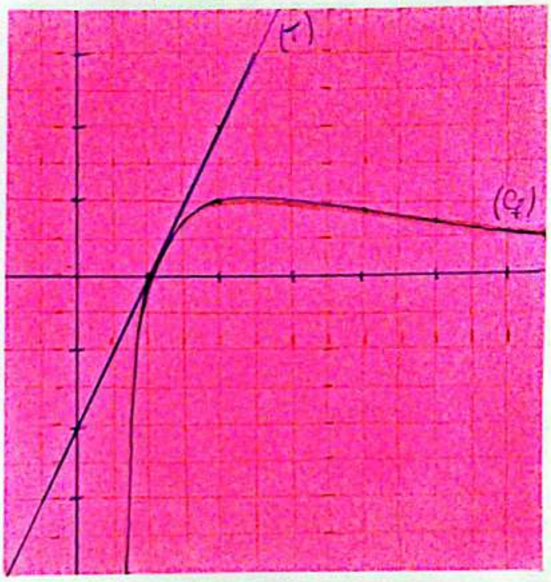
من ① و ② و ③ ← نستخرج العلاقة ونجد الثوابت a و b و c.

# المناقشة البيانية

بالتفصيل

## 2- المناقشة الأفقية :

$\boxed{f(x) = |m|}$




- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع المستقيم ذو المعادلة $y = |m|$ حيث : $m \geq 0$ :
- $|m| = 0$ ⇐ للمعادلة حل وحيد.
- $0 < |m| < 1$ أي $0 < m < 1$ و $-1 < m < 0$ للمعادلة حلان.
- $|m| = 1$ أي $m = 1$ أو $m = -1$ للمعادلة حل مضاعف.
- $|m| > 1$ أي $m \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$\boxed{f(x) = |m-1|}$

- حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع $(C_f)$ مع $y = |m-1|$ حيث : $|m-1| \geq 0$ :
- $|m-1| = 0$ أي : $m = 1$ للمعادلة حل وحيد.
- $0 < |m-1| < 1$ أي $(m-1) \in ]-1;0[\cup]0;1[$ ومنه $\{m \in ]0;1[\cup]1;2[\}$ للمعادلة حلان.
- $|m-1| = 1$ أي $m = 2$ أو $m = 0$ للمعادلة حل مضاعف.
- $|m-1| > 0$ أي : $(m-1) \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ ومنه : $m \in ]-\infty;0[\cup]2;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$\boxed{f(x) = -m}$

- $-m \leq 0$ ومنه $m \geq 0$ : للمعادلة حل وحيد
- $0 < -m < 1$ ومنه $0 > m > -1$ : للمعادلة حلان؛
- $-m = 1$ ومنه $m = -1$ : للمعادلة حل مضاعف
- $-m > 1$ ومنه $m < -1$ : لا يوجد حلول.

$\boxed{f(x) = m^2}$

$m \geq 0$

- $m^2 = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد.
- $0 < m^2 < 1$ أي $m \in ]-1;0[\cup]0;1[$ للمعادلة حلان.
- $m^2 = 1$ أي $m = -1$ أو $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$.
- $m^2 > 1$ أي $m \in ]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[$ لا يوجد حلول للمعادلة.

$\boxed{f(x) = \sqrt{m}}$

$m \geq 0$

- $\sqrt{m} = 0$ أي $m = 0$ للمعادلة حل وحيد.
- $0 < \sqrt{m} < 1$ أي $0 < m < 1$ للمعادلة حلان
- $\sqrt{m} = 1$ أي $m = 1$ للمعادلة حل مضاعف $x = 2$.
- $\sqrt{m} > 1$ أي $m > 1$ لا يوجد حلول للمعادلة.

good luck

- $|m|>b$
$\Rightarrow m\in]-\infty;-b[\cup]b;+\infty[$ ،
- $|m|<b$
$\Rightarrow -b<m<b$

$|m|=b$
$\begin{cases} m=b \\ m=-b \end{cases}$

$f(x)=f(m)$

خ1: نقوم برسم قشة الأفقية لـ $f(x)=\lambda$ ،
خ2: نعمل جدول تغيرات لـ $m$ و $f(m)$
خ3: نعمل إسقاط من جدول ← على الصور لإيجاد $m$ ، $(x)$

$\boxed{f(x)=e^{m}-1}$

- $e^{m}-1\leq 0$ أي $m\leq 0$ للمعادلة حل وحيد ،
- $0<e^{m}-1<1$ أي $0<m<\ln 2$ للمعادلة حلان ،
- $e^{m}-1=1$ أي $m=\ln 2$ للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ،
- $e^{m}-1>1$ أي $m>\ln 2$ لا يوجد حلول للمعادلة ،

$f(x)=\ln m$

$m>0$

- $\ln m\leq 0$ أي $m\leq 1$ للمعادلة حل ،
- $0<\ln m<1$ أي $1<m<e$ للمعادلة حلان ،
- $\ln m=1$ أي $m=e$ : للمعادلة حل مضاعف $x=2$ ،
- $\ln m>1$ أي $m>1$ لا يوجد حل ،

$f(x)=f(m)$

لدينا النقطة مجموعة النقط من $\varphi$ حيث $M_m(m;f(m))$

- $f(m)\leq 0$ أي : $m\in]0;1]$ للمعادلة حل وحيد ،
- $0<f(m)<1$ أي : $m\in]1;2[\cup]2;+\infty[$ للمعادلة حلين ،
- $f(m)=1$ أي $m=2$ : للمعادلة حل مضاعف ،
- $f(m)>1$ : لا يوجد حلول ،