ملخصات مفيدة قبل البكالوريا

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

المراجعة النهائية

★ قواعد الحساب ★

① الجداءات الشهيرة

الجداءات الشهيرة من الدرجة الثانية	الجداءات الشهيرة من الدرجة الثالثة
$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$	$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$
$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$	$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$
	$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

② حل المعادلات من الدرجة الثانية

	حساب المميز $\Delta=b^2-4ac$		
	إذا كان : $\Delta>0$	إذا كان : $\Delta=0$	إذا كان : $\Delta<0$
حلول المعادلة $ax^2+bx+c=0$ $a\neq 0$	المعادلة تقبل حلين متمايزين هما : $x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ وَ $x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$	المعادلة تقبل حل مضاعف هو : $x_0=\dfrac{-b}{2a}$	المعادلة لا تقبل حلول
تحليل ax^2+bx+c	$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$	$ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$	لا يمكن تحليل ax^2+bx+c
إشارة ax^2+bx+c	$-\infty$ … x_1 … x_2 … $+\infty$: إشارة a 0 إشارة $(-a)$ 0 إشارة a	$-\infty$ … x_0 … $+\infty$: إشارة a 0 إشارة a	$-\infty$ … $+\infty$: إشارة a

③ خواص القيمة المطلقة

إذا كان x وَ y عددان حقيقيان فإن :

$\lvert x\rvert\geq 0$	$\lvert -x\rvert=\lvert x\rvert$	$\sqrt{x^2}=\lvert x\rvert$
$\lvert x\times y\rvert=\lvert x\rvert\times\lvert y\rvert$	$\left\lvert\dfrac{x}{y}\right\rvert=\dfrac{\lvert x\rvert}{\lvert y\rvert}$ مع $y\neq 0$	$\lvert x+y\rvert\leq\lvert x\rvert+\lvert y\rvert$
$\lvert x\rvert=\begin{cases}x & ; x\geq 0\\ -x & ; x\leq 0\end{cases}$	$\lvert x+a\rvert=\begin{cases}x+a & ; x\geq -a\\ -x-a & ; x\leq -a\end{cases}$	$\lvert x-a\rvert=\begin{cases}x-a & ; x\geq a\\ -x+a & ; x\leq a\end{cases}$
إذا كان $\lvert x\rvert\leq a$ فإن $-a\leq x\leq a$	إذا كان $\lvert x\rvert\geq a$ فإن $x\geq a$ أو $x\leq -a$	

④ قواعد الحصر

لتكن a ، b ، c ، d أعداد حقيقية موجبة تماماً .

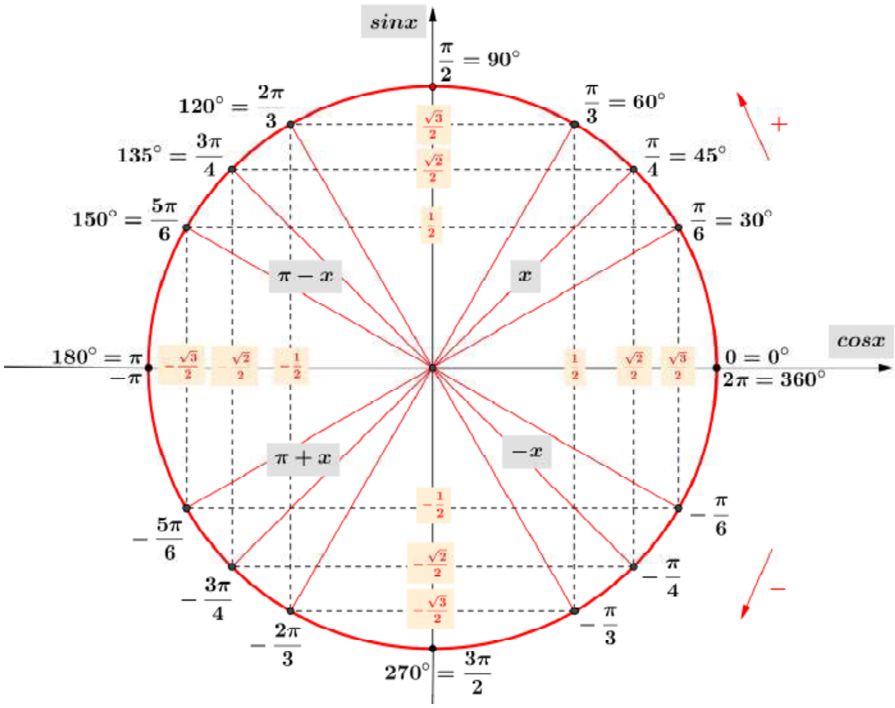
	خاصية الـ			
	جمع	طرح	ضرب	قسمة
$a \leq x \leq b$ $c \leq y \leq d$	$a+c \leq x+y \leq b+d$	$a-d \leq x-y \leq b-c$	$a \times c \leq x \times y \leq b \times d$	$\frac{a}{d} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{b}{c}$

⑤ الدائرة المثلثية وَ حساب المثلثات

x عدد حقيقي :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1

$\begin{cases} -1 \leq \cos x \leq 1 \\ -1 \leq \sin x \leq 1 \end{cases}$ $\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$	$\cos^2 x + \sin^2 = 1$ $\sin 2x = 2\sin x \cos x$ $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\begin{cases} \cos(x \pm 2k\pi) = \cos x \\ \sin(x \pm 2k\pi) = \sin x \end{cases}$



✶ النهايات ✶

① نهايات بعض الدوال المرجعية

الدالة مقلوب	$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}=0^-$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0^+$	$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{1}{x}=-\infty$	$\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{1}{x}=+\infty$
الدالة جذر	$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty$	$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}=0^+$	$\lim_{x\overset{>}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{x-a}}=+\infty$	$\lim_{x\overset{<}{\to}a}\frac{1}{\sqrt{a-x}}=+\infty$
الدالة x^n $n\in\mathbb{N}^*$	$\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty$	$\lim_{x\to-\infty}x^n=+\infty$ مع n زوجي	$\lim_{x\to-\infty}x^n=-\infty$ مع n فردي	$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^n}=0$

② حالات عدم التعيين وطرق إزالتها

حالات عدم التعيين	$\frac{0}{0}$	$\frac{\infty}{\infty}$	$0\times\infty$	$+\infty-\infty$
حالات يمكن التعيين	$\frac{\ell}{0}=\infty$	$\frac{\infty}{0}=\infty$	$\frac{\ell}{\infty}=0$	$\frac{0}{\infty}=0$
طرق الإزالة	بالنسبة لدوال كثيرات الحدود عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى (الأكبر) درجة بالنسبة لدوال ناطقة عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ نأخذ نهاية الحد الأعلى درجة في البسط وَ المقام بالنسبة لدوال جذرية عندما x يؤول إلى $+\infty$ أو $-\infty$ أو x_0 في معظم الحالات نضرب وَ نقسم في المرافق عندما x يؤول إلى x_0 نستعمل الجداءات الشهيرة أو التحليل أو العامل المشترك			

③ مبرهنات في النهايات

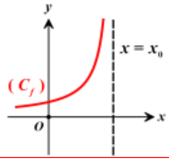
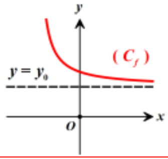
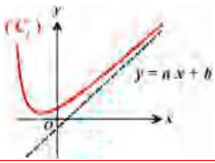
مبرهنة التركيب	نعتبر u ، v وَ f ثلاث دوال حيث $f=v\circ u$ ، وَ لتكن a ، b وَ c أعداد حقيقية إما منتهية أو $+\infty$ أو $-\infty$ إذا كانت $\lim_{x\to a}u(x)=b$ وَ $\lim_{x\to b}v(x)=c$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=c$
مبرهنة الحصر	إذا كان : $g(x)\le f(x)\le h(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=\ell$ وَ $\lim_{x\to a}h(x)=\ell$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$
مبرهنات المقارنة	إذا كان : $f(x)\ge g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=+\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=+\infty$ إذا كان : $f(x)\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=-\infty$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=-\infty$ إذا كان : $\lvert f(x)-\ell\rvert\le g(x)$ حيث : $\lim_{x\to a}g(x)=0$ فإن : $\lim_{x\to a}f(x)=\ell$

④ نهايات الدوال المثلثية

$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\tan x}{x}=1$	$\lim_{x\to0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\frac{\alpha}{\beta}$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x}=0$	$\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2}$

★ المستقيمات المقاربة ★

لتكن f دالة عددية وَ $\left(C_f\right)$ التمثيل البياني لها في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

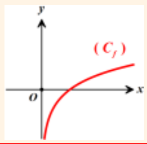
النهاية	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ أو $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ أو	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=x_0$	
$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=y_0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=y_0$	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y=y_0$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	
$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$ أو $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(ax+b)\right]=0$	$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار $+\infty$ أو $-\infty$	

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$

نقول احتمال وجود مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ ، ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$

$\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(x'x)$

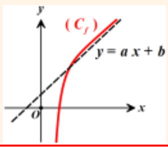


$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=a \quad (a\neq 0)$

ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]$

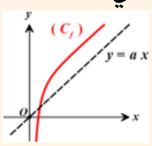
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=b$

$\left(C_f\right)$ يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y=ax+b$ بجوار ∞



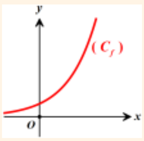
$\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-ax\right]=\infty$

$\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه المستقيم الذي معادلته $y=ax$



$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\pm\infty$

$\left(C_f\right)$ يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه $(y'y)$



✶ الاستمرارية وَ مبرهنة القيم المتوسطة ✶

لتكن f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ يشمل العدد الحقيقي a .

① الاستمرارية

استمرارية الدالة f عند a	$\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)=\ell$ حيث $\ell\in\mathbb{R}$	
استمرارية الدالة f على يمين a	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)=f(a)=\ell_1$ حيث $\ell_1\in\mathbb{R}$	إذا كان $\ell_1=\ell_2$ فإن f مستمرة عند a
استمرارية الدالة f على يسار a	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\ <}} f(x)=f(a)=\ell_2$ حيث $\ell_2\in\mathbb{R}$	

② صورة مجال بواسطة دالة مستمرة

	f دالة متزايدة تماماً على I	f دالة متناقصة تماماً على I
المجال I	$f(I)$	$f(I)$
$[a;b]$	$[f(a);f(b)]$	$[f(b);f(a)]$
$[a;b[$	$\left[f(a);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x);f(a)\right]$
$]a;b]$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x);f(b)\right]$	$\left[f(b);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$
$]a;b[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x)\right[$	$\left]\lim\limits_{\substack{x\to b\\ <}} f(x);\lim\limits_{\substack{x\to a\\ >}} f(x)\right[$

③ مبرهنة القيم المتوسطة

مبرهنة ❶	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❷	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان العدد الحقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فإن المعادلة $f(x)=k$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$
مبرهنة ❸	إذا كانت f دالة مستمرة على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a وَ b بحيث $f(\alpha)=0$.
مبرهنة ❹	إذا كانت f دالة مستمرة وَ رتيبة تماماً على المجال $[a;b]$ وَ كان $f(a)\times f(b)<0$ فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال $]a;b[$

★ الاشتقاقية ★

لتكن f دالة معرفة على مجال D_f من $\mathbb{R}$ وَ a عدد من D_f .

① الاشتقاقية

قابلية اشتقاق الدالة f عند a	$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$	
قابلية اشتقاق الدالة f على يمين a	$\lim_{x\xrightarrow{>}a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_d(a)$	إذا كان $f'_d(a)=f'_g(a)$ فإن f قابلة للاشتقاق عند a
قابلية اشتقاق الدالة f على يسار a	$\lim_{x\xrightarrow{<}a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'_g(a)$	

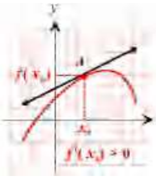
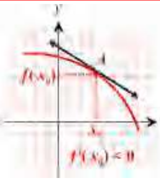
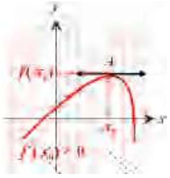
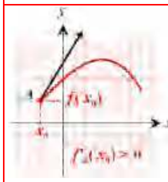
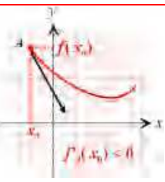
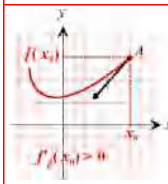
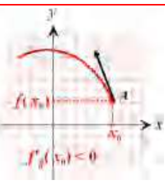
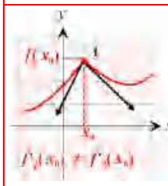
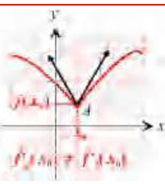
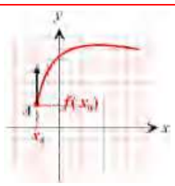
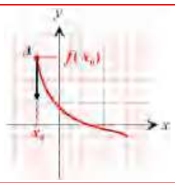
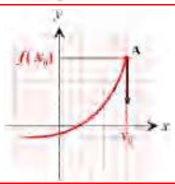
② مشتقات الدوال المألوفة

مجال قابلية الاشتقاق	$f'(x)$	$f(x)$
$\mathbb{R}$	0	a حيث $a\in\mathbb{R}$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	a	$a\,x$
$\mathbb{R}$	$n.x^{n-1}$	x^n حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{-1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$\mathbb{R}^*$	$\frac{-n}{x^{n+1}}$	$\frac{1}{x^n}$ حيث $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$
$]0;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$
$\mathbb{R}$	$-a\sin(a\,x+b)$	$\cos(a\,x+b)$
$\mathbb{R}$	$a\cos(a\,x+b)$	$\sin(a\,x+b)$

③ المشتقات وَ العمليات على الدوال

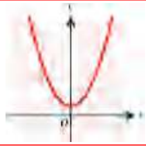
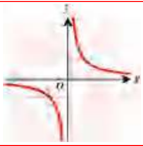
الدالة	$u\pm v$	$a\,u$	$u\times v$	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$	$\sqrt{u}$	u^n	$u\circ v$
الدالة المشتقة	$u'\pm v'$	$a\,u'$	$u'v-v'u$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-v'u}{v^2}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$n\times u^{n-1}\times u'$ $n\in\mathbb{N}^*-\{1\}$	$v'.u'(v)$

④ التفسيرات الهندسية للاشتقاقية

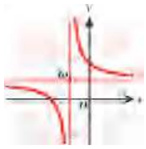
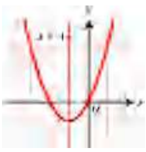
النهاية	الاستنتاج	التفسير الهندسي
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً معادلته: $y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=0$	f تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'(x_0)=0$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ مماساً موازي لمحور الفواصل معادلته: $y=f(x_0)$ 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=a$	f تقبل الاشتقاق على يمين x_0 و $f'_d(x_0)=a$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_d(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=b$	f تقبل الاشتقاق على يسار x_0 و $f'_g(x_0)=b$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس معادلته: $y=f'_g(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$  
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\neq\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$	f لا تقبل الاشتقاق عند x_0 و $f'_g(x_0)\neq f'_d(x_0)$	(C_f) يقبل عند النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصفي مماسين حيث A تسمى نقطة زاوية .  
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{>}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	(C_f) يقبل على يمين النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=+\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأسفل معادلته $x=x_0$. 
$\lim\limits_{x\overset{<}{\to}x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=-\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	(C_f) يقبل على يسار النقطة $A(x_0;f(x_0))$ نصف مماس عمودي موجه نحو الأعلى معادلته $x=x_0$. 

★ شفعية دالة - مركز تناظر وَ محور تناظر ★

① شفعية دالة

	التعريف	التفسير الهندسي	التمثيل البياني
الدالة الزوجية	f دالة زوجية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=f(x)$	(C_f) يقبل محور التراتيب كمحور تناظر	
الدالة الفردية	f دالة فردية يعني من أجل كل : $x \in D_f$ وَ $-x \in D_f$ فإن : $f(-x)=-f(x)$	(C_f) يقبل مبدأ المعلم O كمركز تناظر	

② مركز تناظر وَ محور تناظر دالة

	التعريف	التمثيل البياني
مركز تناظر	$\omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x)\in D_f$ فإن : $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$	
محور تناظر	$x=\alpha$ محور تناظر لـ (C_f) يعني من أجل كل $x \in D_f$ وَ $(2\alpha-x)\in D_f$ فإن : $f(2\alpha-x)=f(x)$	

★ الوضع النسبي بين منحنى و مستقيم ★

(C_f) التمثيل البياني للدالة f وَ (Δ) مستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$.

إشارة الفرق $f(x)-y$	الوضعية النسبية
$f(x)-y>0$	(C_f) يقع فوق (Δ)
$f(x)-y<0$	(C_f) يقع تحت (Δ)
$f(x)-y=0$	(C_f) وَ (Δ) يتقاطعان

★ إنشاء منحنى باستعمال منحنى آخر معلوم ★

ليكن (C_f) وَ (C_g) منحنيين للدالتين f وَ g على الترتيب في معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

الدالة	التمثيل البياني
$f(x)=g(x)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $b\vec{j}$
$f(x)=g(x+a)$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $-a\vec{i}$
$f(x)=g(x+a)+b$	(C_f) هو صورة (C_g) بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}(-a;b)$
$f(x)=-g(x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور الفواصل
$f(x)=g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة لمحور التراتيب
$f(x)=-g(-x)$	المنحنيين (C_f) وَ (C_g) متناظران بالنسبة إلى مبدأ المعلم
$f(x)=g(\|x\|)$	▪ إذا كان $x\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $x\leq 0$ فإن $f(x)=g(-x)$ منه (C_f) هو نظير (C_g) المرسوم في المجال الموجب بالنسبة لمحور التراتيب (f دالة زوجية)
$f(x)=\|g(x)\|$	▪ إذا كان $g(x)\geq 0$ فإن $f(x)=g(x)$ منه (C_f) ينطبق على (C_g) ▪ إذا كان $g(x)\leq 0$ فإن $f(x)=-g(x)$ منه (C_f) نظير (C_g) بالنسبة لمحور الفواصل

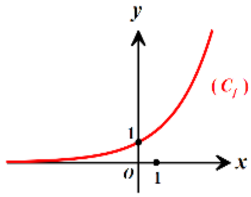
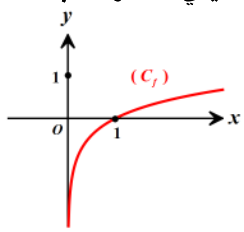
★ المناقشة البيانية ★

ليكن (C_f) منى الدالة f وَ (Δ) مستقيم مائل (مماس أو مستقيم مقارب) معادلته $y=ax+b$.

المعادلة من الشكل	المناقشة البيانية ($m\in\mathbb{R}$)
$f(x)=m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل
$f(x)=ax+m$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لـ (Δ)
$f(x)=mx+b$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الدورانية حول النقطة $(0;b)$
$f(x)=m^2$ أو $f(x)=\|m\|$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل ($y=m^2$ أو $y=\|m\|$) لكن المناقشة تبدأ من محور الفواصل نحو الأعلى
$f(x)=f(m)$	حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع المنحنى (C_f) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل معادلتها $y=f(m)$

ملاحظات : نقول أن للمعادلة حل موجب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يمين محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل سالب إذا كانت نقطة التقاطع تقع على يسار محور التراتيب .
- نقول أن للمعادلة حل مضاعف إذا كانت نقطة التقاطع هي نقطة المماس .

★ الدالة الأسية وَ الدالة اللوغاريتمية ★

الدالة الأسية	الدال اللوغاريتمية
1- تعريف : الدالة الأسيّة f هي الدالة الوحيدة ، قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وَ تحقق : $f'=f$ وَ $f(0)=1$ و نكتب : $f(x)=\exp(x)$ أو $f(x)=e^x$ 	**1- تعريف :** نسمي " الدالة اللوغارتمية النبيرية " الدالة التي نرمز لها بـ " ln " و التي ترفق بكل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$ العدد الحقيقي $\ln x$ وَ نكتب : $f(x)=\ln x$ 
2- خواص الدالة الأسية : ليكن x ، y من $\mathbb{R}$ و n عدد صحيح نسبي : $e^0=1$ وَ $e^1=e\approx 2,71$ $e^{x+y}=e^x.e^y$ ، $e^{x-y}=\dfrac{e^x}{e^y}$ $e^{-x}=\dfrac{1}{e^x}$ ، $e^{nx}=\left(e^x\right)^n$ إذا كان : $e^x=e^y$ فإن : $x=y$ إذا كان : $e^x>e^y$ فإن : $x>y$	**2- خواص الدالة اللوغاريتمية النبيرية :** ليكن x وَ y من $]0;+\infty[$ و n عدد صحيح نسبي : $\ln 1=0$ ، $\ln e=1$ $\ln(x.y)=\ln x+\ln y$ ، $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y$ $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)=-\ln x$ ، $\ln x^n=n\ln x$ إذا كان : $\ln x=\ln y$ فإن : $x=y$ إذا كان : $\ln x\succ\ln y$ فإن : $x>y$ $\ln x>0$ يعني $x>1$ و $\ln x<0$ يعني $0<x<1$
3- مجموعة تعريف الدّالة الأسية : $f(x)=e^{u(x)}$ ، الدالة f معرفة إذا كانت u معرفة	**3- مجموعة تعريف الدّالة اللوغاريتمية :** $f(x)=\ln u(x)$ ، الدالة f معرفة إذا كانت : $u(x)>0$
4- مشتقة الدّالة الأسية : $f(x)=e^{u(x)}$ منه : $f'(x)=u'(x)\times e^{u(x)}$	**4- مشتقة الدّالة اللوغاريتمية :** $f(x)=\ln u(x)$ منه : $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x)>0$ $f(x)=\ln\lvert u(x)\rvert$ منه: $f'(x)=\dfrac{u'(x)}{u(x)}$ مع $u(x)\neq 0$
5- النهايات الشهيرة : $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ $\lim\limits_{x\to-\infty}x^ne^x=0$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n>0$	**5- النهايات الشهيرة :** $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln x=0^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$ ، $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=1$ ، $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\ln x}{x-1}=1$ $\lim\limits_{x\to0^+}x^n\ln x=0^-$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^n}=0$ مع $n>0$.
$\ln e^x=x$ مع $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{\ln x}=x$ مع $x\in\mathbb{R}_+^*$	

★ الهندسة الفضائية ★

نعتبر في كل ما يلي $(O;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ معلم متعامد و متجانس للفضاء ، نضع : $A(x_A;y_A;z_A)$ ، $B(x_B;y_B;z_B)$ ، $C(x_C;y_C;z_C)$

مركبات شعاع	مركبات الشعاع $\overrightarrow{AB}$ هي : $\overrightarrow{AB}(x_B-x_A;y_B-y_A;z_B-z_A)$
طويلة شعاع	طويلة الشعاع $\vec{u}(x;y;z)$ هي $\lVert\vec{u}\rVert=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$
المسافة بين نقطتين	$AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$
منتصف قطعة مستقيمة	I منتصف القطعة $[AB]$ حيث : $I\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$
الجداء السلمي بين شعاعين	$\vec{u}\bullet\vec{v}=\lVert\vec{u}\rVert\times\lVert\vec{v}\rVert\times\cos(\vec{u};\vec{v})$
العبارة التحليلية للجداء السلمي	$\vec{u}\bullet\vec{v}=x.x'+y.y'+z.z'$ حيث $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$
تعامد شعاعين	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان : $\vec{u}\bullet\vec{v}=0$
الارتباط الخطي بين شعاعين	$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متوازيان إذا كان : $\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{z}{z'}=k$ معناه : $\vec{u}=k\vec{v}$ مع $k\in\mathbb{R}$
المعادلة الديكارتية للمستوى (P)	$ax+by+cz+d=0$ ، حيث $\vec{n}(a;b;c)$ شعاعه الناظم
توازي مستويين (P) و (P')	$\vec{n}=k\times\vec{n'}$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P') و $k\in\mathbb{R}$
تعامد مستويين (P) و (P')	$\vec{n}\bullet\vec{n'}=0$ حيث $\vec{n}$ ناظمي لـ (P) و $\vec{n'}$ ناظمي لـ (P')
بعد النقطة A عن المستوى (P)	$d(A;(P))=\frac{\lvert ax_A+by_A+cz_A+d\rvert}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$
المعادلة الديكارتية لسطح كرة (S)	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$ حيث $\omega(x_0;y_0;z_0)$ مركزها و r نصف قطرها
مرجح نقطتين	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta)\}$ مع $\alpha+\beta\neq 0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}=\vec{0}$
مرجح ثلاث نقط	G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\delta)\}$ مع $\alpha+\beta+\delta\neq 0$ معناه : $\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\delta\overrightarrow{GC}=\vec{0}$
مركز ثقل المثلث ABC	G مركز ثقل المثلث ABC معناه G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\alpha),(C;\alpha)\}$
إحداثيات مرجح نقطتين	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B}{\alpha+\beta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B}{\alpha+\beta}\right)$
إحداثيات مرجح ثلاث نقط	$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\delta x_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\delta y_C}{\alpha+\beta+\delta};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\delta z_C}{\alpha+\beta+\delta}\right)$
مساحة مثلث	$S=\frac{1}{2}\times$ مساحة القاعدة $\times$ الارتفاع
حجم رباعي الوجوه	$V=\frac{1}{3}\times S\times h$ حيث S مساحة القاعدة (مثلث) و h الإرتفاع

التمثيل الوسيطي للمستقيم (d)	$\begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$ ، $t \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A;y_A;z_A)$ منه و $\vec{u}(a;b;c)$ شعاع توجيه له
التمثيل الديكارتي للمستقيم (d)	$\dfrac{x-x_A}{a} = \dfrac{y-y_A}{b} = \dfrac{z-z_A}{c}$
التمثيل الوسيطي للمستوي (P)	$\begin{cases} x = x_A + at + a's \\ y = y_A + bt + b's \\ z = z_A + ct + +c's \end{cases}$ ، $t, s \in \mathbb{R}$ حيث $A(x_A;y_A;z_A)$ منه $\vec{u}(a;b;c)$ و $\vec{v}(a';b';c')$ شعاعي توجيه له
مجموعة النقط M في الفضاء	⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} = 0$ مجموعة النقط M هو المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له ⊂ $AM = BM$ مجموعة النقط M هو المستوي المحوري للقطعة $[AB]$ ⊂ $AM = AB$ مجموعة النقط M هو سطح كرة مركزها A و نصف قطرها AB ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{BM} = 0$ مجموعة النقط M هو سطح كرة التي قطرها $[AB]$ ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} > 0$ أو $\overrightarrow{AM} \bullet \vec{n} < 0$ هو نصف فضاء مفتوح حده المستوي الذي يشمل A و $\vec{n}$ ناظمي له ⊂ $\overrightarrow{AM} \bullet \overrightarrow{AB} = k$ مع $k \in \mathbb{R}^*$ هو المستوي العمودي على (AB) و الذي يشمل لنقطة H حيث H المسقط العمودي لـ M على (AB)

★ الاستدلال بالتراجع ★

مبرهنة

$P(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .

للبرهان على صحة الخاصية $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي n_0 ، يكفي :

1. نتأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $P(n_0)$.
2. نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي كيفي n أكبر من أو يساوي n_0 أي $P(n)$ (فرضية التراجع) و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $P(n+1)$.

ملاحظات

- إذا كان $n \in \mathbb{N}$ فإن : $n_0 = 0$ ، و إذا كان $n \in \mathbb{N}^*$ فإن : $n_0 = 1$ ، وهكذا ...
- يمكن التفكير في استعمال الاستدلال بالتراجع للبرهان على صحة خاصية متعلقة بالأعداد الطبيعية .

★ المتتاليات العددية ★

المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
1- تعريف : (u_n) متتالية حسابية معناه : $u_{n+1} = u_n + r$	1- تعريف : (u_n) متتالية هندسية معناه : $u_{n+1} = u_n \times q$
2- الحد العام لمتتالية حسابية بدلالة الحد الأول : إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 + nr$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 + (n-1)r$ بصفة عامة : $u_n = u_p + (n-p)r$ حيث $p \in \mathbb{N}$	2- الحد العام لمتتالية هندسية بدلالة الحد الأول : إذا كان u_0 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_0 \times q^n$ إذا كان u_1 هو الحد الأول فإن : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ بصفة عامة : $u_n = u_p \times q^{n-p}$ حيث $p \in \mathbb{N}$
3- الوسط الحسابي : إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية فإن : $a + c = 2b$	3- الوسط الهندسي: إذا كانت a ، b ، c أعداد حقيقية مأخوذة بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية فإن : $a \times c = b^2$
4- المجموع : $S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} \times (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$	4- المجموع : $S_n = \text{الحد الأول} \times \left(\frac{q^{\text{عدد الحدود}} - 1}{q-1}\right)$
5- تقارب و تباعد متتالية حسابية : لما $r > 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ لما $r < 0$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ إذن المتتالية الحسابية دوماً متباعدة	5- تقارب و تباعد متتالية هندسية : لما $q > 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \pm\infty$ المتتالية (u_n) متباعدة لما $-1 < q < 1$ فإن $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ المتتالية (u_n) متقاربة لما $q \le -1$ فإن المتتالية (u_n) متباعدة (النهاية غير موجودة)
6- اتجاه التغير: إذا كان $r > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $r < 0$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $r = 0$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة	6- اتجاه التغير: نفرض أن $u_n > 0$ إذا كان $q > 1$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً إذا كان $q < 1$ فإن المتتالية (u_n) متناقصة تماماً إذا كان $q = 1$ فإن المتتالية (u_n) ثابتة

تعاريف وَ مبرهنات

7- عدد الحدود : عدد الحدود = دليل الحد الأخير − دليل الحد الأول +1

8- متتالية محدودة من الأعلى ، محدودة من الأسفل ، متتالية محدودة :
- المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني : $u_n \le A$.
- المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني : $u_n \ge B$.
- المتتالية (u_n) محدودة يعني أنها محدودة من الأعلى و محدودة من الأسفل .

9- مبرهنات تقارب متتالية :
- إذا كانت (u_n) متتالية متزايدة و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .
- إذا كانت (u_n) متتالية متناقصة و محدودة من الأسفل فهي متقاربة .

10- المتتاليتان المتجاورتان :

تكون المتتاليتان (u_n) وَ (v_n) متجاورتان إذا كانت إحداهما متزايدة و الأخرى متناقصة وَ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$.

★ الأعداد المركبة ★

① الشكل الجبري ، الشكل المثلثي وَ الشكل الأسي لعدد مركب غير معدوم

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$i^2=-1$ مع $z=x+i\,y$ ☜ الجزء الحقيقي : $x=\mathrm{Re}(z)$ ☜ الجزء التخيلي : $y=\mathrm{Im}(z)$ ☜ مرافق z : $\overline{z}=x-i\,y$	$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ ☜ طويلة z : $r=\lvert z\rvert=\sqrt{x^2+y^2}$ ☜ عمدة z : $\arg(z)=\theta+2k\pi$ مع $k\in\mathbb{Z}$.	$z=r\,e^{i\theta}$ ☜ ترميز أولر: $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ☜ $\cos\theta=\dfrac{x}{r}$ وَ $\sin\theta=\dfrac{y}{r}$
خواصه	**خواصه**	**خواصه**
① $z=0$ إذا كان $x=0$ وَ $y=0$ ② $z=z'$ إذا كان $x=x'$ وَ $y=y'$ مع $z'=x'+i\,y'$ ③ z حقيقي إذا كان $z=\overline{z}$ ④ z تخيلي صرف إذا كان $z=-\overline{z}$ ⑤ $z\times\overline{z}=x^2+y^2$ ⑥ $\lvert z\rvert=\lvert\overline{z}\rvert$ ، $z\times\overline{z}=\lvert z\rvert^2$	① $\arg(z.z')=\arg(z)+\arg(z')$ ② $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right)=\arg(z)-\arg(z')$ ③ $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right)=-\arg(z)$ ④ $\arg(\overline{z})=-\arg(z)$ ⑤ $\arg(z^n)=n\arg(z)$ مع $n\in\mathbb{Z}$	① $-e^{i\theta}=e^{i(\theta+\pi)}$ ② $z.z'=r.r'e^{i(\theta+\theta')}$ ③ $\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}e^{i(\theta-\theta')}$ ④ $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}e^{-i\theta}$ ⑤ $\overline{z}=r\,e^{-i\theta}$ ⑥ $z^n=r^n\,e^{in\theta}$

② توظيف الطويلة و العمدة في الهندسة

التفسير الهندسي	العبارة المركبة
المسافة بين النقطتين A وَ B	$AB=\lvert z_B-z_A\rvert$
الشعاع $\overrightarrow{AB}$	$z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$
I منتصف القطعة $[AB]$	$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}$
G مركز ثقل المثلث ABC	$z_G=\dfrac{z_A+z_B+z_C}{3}$
G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\lambda)\}$	$z_G=\dfrac{\alpha z_A+\beta z_B+\lambda z_C}{\alpha+\beta+\lambda}$
A ، B وَ C على استقامة ($\overrightarrow{AB}\,//\,\overrightarrow{AC}$)	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدداً حقيقياً
الشعاعان $\overrightarrow{AB}$ وَ $\overrightarrow{AC}$ متعامدان	$\dfrac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$ عدداً تخيلياً صرفاً
قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{OI};\overrightarrow{AB})$	$\arg(z_B-z_A)$
قيس بالرديان للزاوية الموجهة $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$	$\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)$

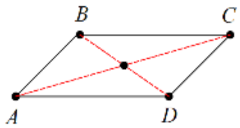
③ متوازي الأضلاع ، المعين ، المربع ، المستطيل وَ المثلثات

متوازي الأضلاع

$ABCD$ متوازي أضلاع يعني أحد الشرطين :

① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$

② القطران متناصفان أي: $\dfrac{z_A+z_C}{2}=\dfrac{z_B+z_D}{2}$



المعين

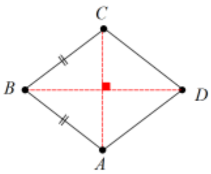
$ABCD$ معين يعني أحد الشرطين :

① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$

وَ $AB=AD$ أي: $|z_B-z_A|=|z_D-z_A|$

② القطران متناصفان وَ متعامدان أي :

$$\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{z_A+z_C}{2} \text{ وَ } \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$$



المربع

$ABCD$ مربع يعني أحد الشرطين :

① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$

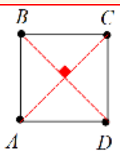
وَ $AB=AD$ أي: $|z_B-z_A|=|z_D-z_A|$

وَ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$

② القطران متناصفان وَ متعامدان وَ متساويان أي:

$$\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{z_A+z_C}{2} \text{ وَ } \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_D-z_B}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$$

وَ $|z_A-z_C|=|z_B-z_D|$



المستطيل

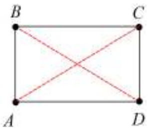
$ABCD$ مستطيل يعني أحد الشرطين :

① $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ أي: $z_B-z_A=z_C-z_D$

وَ $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ أي: $\arg\left(\dfrac{z_D-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$

② القطران متناصفان وَ متساويان أي:

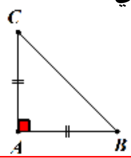
$$\dfrac{z_B+z_D}{2}=\dfrac{z_A+z_C}{2} \text{ وَ } |z_A-z_C|=|z_B-z_D|$$



المثلث القائم و المتساوي الساقين

ABC مثلث قائم في A وَ متساوي الساقين يعني :

$$\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1 \text{ وَ } \arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$$

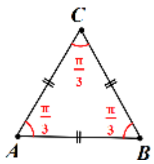


المثلث المتقايس الأضلاع

ABC مثلث متقايس الأضلاع يعني أحد الشرطين :

① $\left|\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=1$ وَ $\arg\left(\dfrac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\pm\dfrac{\pi}{3}$

② $|z_A-z_B|=|z_A-z_C|=|z_B-z_C|$



④ التحويلات النقطية في المستوي المركب

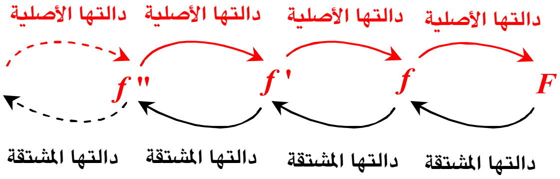
العبارة المركبة للتحويل f هي : $z'=az+b$

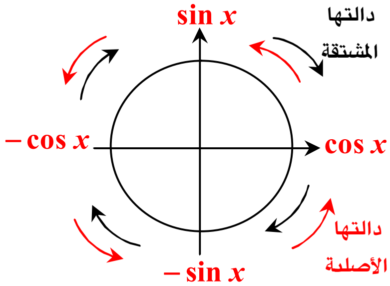
a عدد حقيقي		a عدد مركب (غير حقيقي)	
$a=1$	$a\neq 1$	$\lvert a\rvert=1$	$\lvert a\rvert\neq 1$
f انسحاب شعاعه $\vec{u}$ ذات اللاحقة b ($b\neq 0$)	f تحاكي نسبته $k=a$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$	f دوران مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$ زاويته $\theta=\arg(a)$	f تشابه مباشر نسبته $k=a$ زاويته $\theta=\arg(a)$ مركزه النقطة Ω ذات اللاحقة $z_\Omega=\dfrac{b}{1-a}$
العبارة المختصر للتحويل f			
$z'=z+b$	$z'-z_\omega=k(z-z_\omega)$	$z'-z_\omega=e^{i\theta}(z-z_\omega)$	$z'-z_\omega=ke^{i\theta}(z-z_\omega)$

★ الدوال الأصلية و الحساب التكاملي ★

① الدوال الأصلية

	السؤال	الجواب
❶	ما هو شرط وجود دالة أصلية F للدالة f على المجال I	الشرط أن تكون الدالة f مستمرة على المجال I
❷	كم عدد الدوال الأصلية للدالة f على المجال I	الدالة f تقبل عدد غير منتهي من الدوال الأصلية و هي : $F(x)+k$ حيث $k \in \mathbb{R}$
❸	أثبت أن الدالة F أصلية للدالة f على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x)=f(x)$
❹	بين أن الدالتان F و G أصليتان لنفس الدالة على المجال I	يكفي إثبات من أجل كل $x \in I$: $F'(x)=G'(x)$





② الدوال الأصلية لدوال مألوفة

$f(x)=$	$F(x)=$	$I=$
a (a عدد حقيقي)	$ax+c$	$\mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2+c$	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}+c$	$]-\infty;0[$ أو $]0;+\infty[$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}+c$	$]0;+\infty[$
e^x	e^x+c	$\mathbb{R}$
e^{ax+b} $(b \in \mathbb{R}$ و $a \in \mathbb{R}^*)$	$\frac{1}{a}e^{ax+b}+c$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x+c$	$]0;+\infty[$
$\ln x$	$x\ln x-x+c$	$]0;+\infty[$
$\ln(x-a)$ $(a \in \mathbb{R})$	$(x-a)\ln(x-a)-x+c$	$]a;+\infty[$

③ الدوال الأصلية و العمليات على الدوال

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على I	شروط على الدالة u
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2+c$	
$(n\in\mathbb{N}^*)\ u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1}+c$	
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$(n\geq 2$ و $n\in\mathbb{N})\ \frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)\neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}+c$	من أجل كل x من I، $u(x)>0$
$u'e^u$	e^u+c	
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert+c$	$u(x)\neq 0$

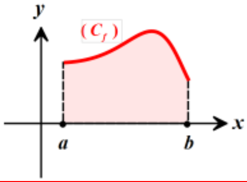
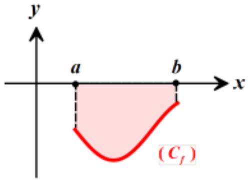
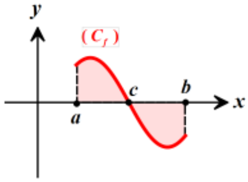
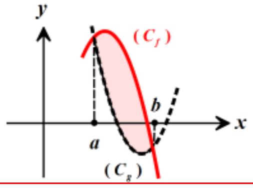
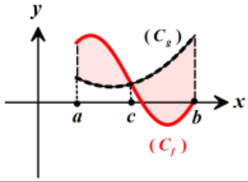
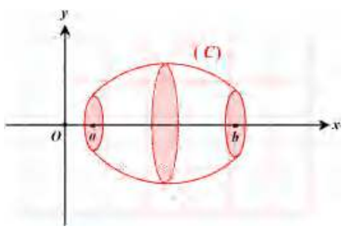
المعادلات التفاضلية

حلول المعادلة	المعادلة التفاضلية
$y=Ce^{ax}$	$y'=ay$
$y=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$	$y'=ay+b$
$y=F(x)+c$	$y'=f(x)$
$y=F(x)+c_1x+c_2$	$y''=f'(x)$
$y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$	$y''=-\omega^2 y$

⑤ الحساب التكاملي

$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$	التكامل المحدود
$\int f(x)\,dx=F(x)+k$	التكامل الغير محدود
$\int_a^b f(x)\,dx+\int_b^c f(x)\,dx=\int_a^c f(x)\,dx$	علاقة شال
$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx=[u(x)v(x)]_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)\,dx$	المكاملة بالتجزئة
$m=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$	القيمة المتوسطة على مجال

⑥ حساب المساحات و الحجوم

المساحات S	التمثيل البياني لها
$S=\int_a^b f(x)\,dx$	
$S=\int_a^b -f(x)\,dx$	
$S=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx$	
$S=\int_a^b [f(x)-g(x)]\,dx$	
$S=\int_a^c [f(x)-g(x)]\,dx+\int_c^b [g(x)-f(x)]\,dx$	
الحجوم V	**التمثيل البياني لها**
حجم مجسم مولد بالدوران حول المحور $(x'x)$ لمنحنى (C) $V=\int_a^b \pi[f(x)]^2\,dx$	
ملاحظة هامة : كل المساحات يجب أن تضرب في الوحد ua حيث : $ua=\lVert\vec{i}\rVert\times\lVert\vec{j}\rVert$	

★ الاحتمالات ★

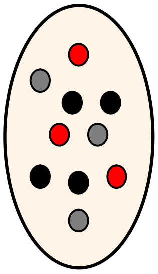
احتمال الحادثة A	$P(A)=\dfrac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة (الكلية)}}$
احتمال الحادثة العكسية $\overline{A}$	$P(\overline{A})=1-P(A)$
الاحتمال الشرطي (A علماً B)	$P_B(A)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$
الحوادث المستقلة	$P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$

① أنواع السحب

توجد ثلاث أنواع من السحب و هي :

❶ السحب في آن واحد ❷ السحب على التوالي و بإرجاع ❸ السحب على التوالي و بدون إرجاع

– ما هو عدد طرق لسحب p كرة من كيس يحتوي على n كرة ($n\geq 2$) ؟



n كرة

سحب p كرة

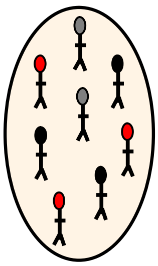
- على التوالي و بإرجاع : n^p — الترتيب مهم، يسمح التكرار، لا شرط على n و p
- على التوالي دون إرجاع : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ — الترتيب مهم، لا يسمح التكرار، $n\geq p$
- في آن واحد : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ — الترتيب غير مهم، $n\geq p$

② اللجان (الجمعيات)

عند تكوين لجنة معينة أو جمعية من عدة أشخاص ، يجب معرفة أمرين أساسيان ، هما :

❶ ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة ❷ عدم ذكر وظيفة الأشخاص في اللجنة .

– ما هو عدد طرق لتكوين لجنة تتألف من p شخص من بين مجموعة ذات n شخص مع ($n\geq 2$) ؟



n شخص

اختيار p شخص

- مع ذكر وظيفة كل شخص : $A_n^p=\dfrac{n!}{(n-p)!}$ — الترتيب مهم، لا يسمح التكرار، $n\geq p$
- عدم ذكر وظيفة كل شخص : $C_n^p=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$ — الترتيب غير مهم، $n\geq p$

③ عدد طرق لإجراء تجربة

عند إجراء تجربة معينة بـ n_1 طريقة (إمكانية) و تجربة أخرى بـ n_2 طريقة (إمكانية) فإن :

❶ عدد طرق إجراء التجربتين معاً (التجربة الأولى و الثانية) هو الجداء : $n_1\times n_2$.

❷ عدد طرق إجراء إحدى التجربتين فقط (التجربة الأولى أو الثانية) هو المجموع : n_1+n_2 .

★ الموافقات-الأعداد الأولية ★

① الموافقات في $\mathbb{Z}$

تعريف	نقول أن العددين الصحيحين a، b متوافقان بترديد n (طبيعي) إذا وفقط إذا كان $a-b$ من مضاعفات n في $\mathbb{Z}$ وَ نكتب $a\equiv b[n]$ وَ يقرأ a يوافق b بترديد n .
خواص	إذا كان: $a\equiv b[n]$ وَ $b\equiv c[n]$ فإن: $a\equiv c[n]$. إذا كان: $a\equiv b[n]$ وَ $c\equiv d[n]$ فإن: $a\pm c\equiv b\pm d[n]$ وَ $a\times c\equiv b\times d[n]$. إذا كان: $a\equiv b[n]$ فإن: $a+k\equiv b+k[n]$ وَ $k\times a\equiv k\times b[n]$ حيث $k\in\mathbb{Z}$. إذا كان: $a\equiv b[n]$ فإن: $a^p\equiv b^p[n]$ حيث $p\in\mathbb{N}$. إذا كان: $a\equiv b[n]$ فإن: $a+kn\equiv b[n]$ وَ $a\equiv b+kn[n]$. إذا كان: $a\equiv 0[n\times m]$ فإن: $a\equiv 0[n]$ وَ $a\equiv 0[m]$ حيث $m\in\mathbb{N}^*$ وَ أولي مع n . إذا كان: $a\times b\equiv 0[n]$ فإن: $a\equiv 0[n]$ أو $b\equiv 0[n]$ مع n عدد أولي.

② القاسم المشترك الأكبر $PGCD$ وَ المضاعف المشترك الأصغر $PPCM$

خواص	$PGCD(a;b)=PGCD(b;r)$ حيث $a\geq b$ وَ r باقي قسمة a على b . $PGCD(ka;kb)=k\times PGCD(b;r)$ حيث: $k\in\mathbb{Z}^*$. $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$ إذا كان: $PGCD(a;b)=d$ فإن: ($d\setminus a$ وَ $d\setminus b$) و أيضاً: $\begin{cases}a=da'\\b=db'\end{cases}$ مع $PGCD(a';b')=1$ $PGCD(ka;kb)=\|k\|PGCD(a;b)$ مع $k\in\mathbb{Z}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b)=1$ فإن: $PGCD(a;b^n)=1$ مع $n\in\mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b)=1$ فإن: $PGCD(a^n;b^n)=1$ مع $n\in\mathbb{N}^*$. إذا كان: $PGCD(a;b)=1$ و $PGCD(a;c)=1$ فإن: $PGCD(a;bc)=1$.

③ مبرهنة بيزو

يكون العددان الطبيعيان غير المعدومين a وَ b أوليين فيما بينهما إذا و فقط إذا وجد عددان صحيحان x وَ y حيث: $ax+by=1$

④ مبرهنة غوص

a، b وَ c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة ، إذا كان a يقسم الجداء bc وَ كان a أولياً مع b، فإن a يقسم c .

⑤ المبرهنة الصغيرة لفيرما

إذا كان p عددا أولياً و a عدداً طبيعياً لا يقبل القسمة على p فإن p يقسم العدد $\left(a^{p-1}-1\right)$