

Bac 2021

مجلة

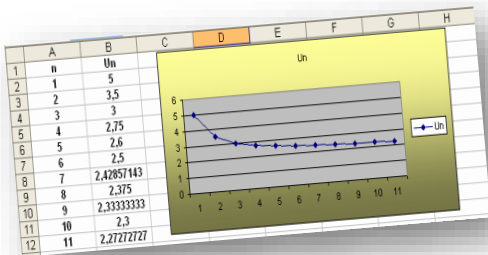
سند المجتهد في الرياضيات المتتاليات

شعبة :

تسيير واقتصاد

التحضير لشهادة البكالوريا

من إعداد الأستاذة : أزرايب جميلة
ثانوية : رشيد رضا العاشوري



$$U_n = U_1 r^{n-1}$$

Math

نجاح
Math

الفهرس

- المتتاليات العددية 3
- المتتاليات الحسابية 7
- المتتاليات الهندسية 10
- المتتاليات المحدودة 13
- الاستدلال بالتراجع 14
- المتتاليات المتقاربة 16
- المتتاليات من الشكل $u_{n+1} = au_n + b$ 18
- تمارين المتتاليات في بكالوريا شعبة تسيير واقتصاد 20

المتتاليات العددية :

تعريف :

n_0 عدد طبيعي معطى حيث $(n \geq n_0)$ ، نسمي متتالية عددية كل دالة $(u: n \rightarrow u(n))$ حيث $u(n)$ عدد حقيقي. نرسم للعدد $u(n)$ بـ u_n ويسمى الحد العام للمتتالية u ونسمي n دليل الحد u_n . نرسم للمتتالية u بـ $(u_n)_{n \geq n_0}$ و u_{n_0} حدها الأول.

مثال 1 :

الدالة $(u: n \rightarrow n^2 + n + 1)$ بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$. نعتبر متتالية عددية سنرسم إليها بالرمز $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ وحدها العام u_n حيث $u_n = n^2 + n + 1$ وحدها الأول u_0

رتبة الحد	1	2	3	4
رمز الحد	u_0	u_1	u_2	u_3
قيمة الحد	$u_0 = 0^2 + 0 + 1 = 1$			

في هذه الحالة دليل الحد ليس نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر ليس u_{10} بل هو ولحسابه نعوض n بـ ومنه :

- كتابة كل من u_{n-1} و u_{n+1} بدلالة n :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

مثال 2 :

الدالة $(v: n \rightarrow \frac{-n+1}{n})$ بما أنها معرفة على كل مجموعة الأعداد الطبيعية غير المعدومة $\mathbb{N}^*$. نعتبر متتالية عددية سنرسم إليها بالرمز $(v_n)_{n \geq 1}$ وحدها العام v_n حيث $v_n = \frac{-n+1}{n}$ وحدها الأول v_1

رتبة الحد	1	2	3	4
رمز الحد	v_1	v_2	v_3	v_4
قيمة الحد	$v_1 = \frac{-1+1}{1} = 0$			

في هذه الحالة دليل الحد هو نفسه رتبة الحد مثلا الحد العاشر هو ولحسابه نعوض n بـ ومنه :

- كتابة كل من v_{n-1} و v_{n+1} بدلالة n :

.....
.....
.....
.....
.....
.....
.....

طرق توليد متتالية :

بعبارة الحد العام :

يمكن أن نجد قيمة حدود متتالية باستعمال عبارة حدتها العام ولإيجاد قيمة الحد u_p يكفي أن نعوض n بـ p في هذه الحالة يمكن التعبير عن عبارة الحد العام u_n بالدالة f ونضع $u_n = f(n)$.

■ **مثلا :** المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_n = -n^2 + 2$ معرفة بحدتها العام .
ولدينا : $u_0 = -0^2 + 2 = 2$ ، $u_1 = -1^2 + 2 = 1$ ، $u_2 = -2^2 + 2 = -2$ ،
بنفس الطريقة أحسب u_3 و u_4 والحد العشرون .

يمكن التعبير عن الحد العام لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة f ونكتب $u_n = f(n)$ حيث $x \in [0; +\infty[$ $f : x \mapsto -x^2 + 2$.

بعلاقة تراجعية :

لتكن دالة عددية f معرفة على مجال D وحيث أن من أجل $x \in D$ فإن $f(x) \in D$. المتتالية u المعرفة بحدتها الأول u_{n_0} والعلاقة $u_{n+1} = f(u_n)$ تسمى متتالية تراجعية . تسمح هذه العلاقة بحساب u_{n+1} إذا علم u_n من أجل كل $n \geq n_0$ ، الدالة العددية f تسمى الدالة المرفقة بالمتتالية u .

■ **مثلا :** نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بحدتها الأول $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 1 + 3u_n$.
لدينا : $u_1 = 1 + 3u_0 = 1 + 3 \times 1 = 4$ ، $u_2 = 1 + 3u_1 = 1 + 3 \times 4 = 13$ ، $u_3 = 1 + 3u_2 = 1 + 3 \times 13 = 40$ ،
يمكن التعبير عن العلاقة التراجعية لهذه المتتالية باستعمال الدالة المرفقة f ونكتب $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f : x \mapsto 1 + 3x$.

اتجاه تغير متتالية عددية :

- n_0 عدد طبيعي معطى ، متتالية عددية $(u_n)_{n \geq n_0}$
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متزايدة تماما ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n > 0$ (أي $u_{n+1} > u_n$) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ متناقصة تماما ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n < 0$ (أي $u_{n+1} < u_n$) من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.
- تكون المتتالية $(u_n)_{n \geq n_0}$ ثابتة ابتداء من الرتبة n_0 إذا وفقط إذا كان $u_{n+1} - u_n = 0$ من أجل كل عدد طبيعي $n \geq n_0$.

طرق لدراسة اتجاه تغير متتالية عددية :

- لدراسة اتجاه تغير متتالية يمكن أن :
- ندرس إشارة $u_{n+1} - u_n$
- نقارن بين $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ و 1 (شرط أن تكون الحدود موجبة تماما) .
- إذا وجدت دالة f حيث من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = f(n)$ ندرس تغيرات الدالة f .

■ مثال 1 :

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي : $u_n = 3n - 5$ و $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$.

الحل:

1- دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$u_{n+1} - u_n = 3(n+1) - 5 - (3n - 5) = 3n + 3 - 5 - 3n + 5 = 3 > 0$$

بما أن $u_{n+1} - u_n > 0$ فإن المتتالية (u_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

2- دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

طريقة 1:

$$v_{n+1} - v_n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \left(\frac{1}{3}\right) - 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{1}{3} - 1\right] = 2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \left[\frac{-2}{3}\right] < 0$$

بما أن $v_{n+1} - v_n < 0$ فإن المتتالية (v_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

طريقة 2:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \times \frac{1}{3}}{2 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n} = \frac{1}{3} < 1$$

ومنه: $\frac{v_{n+1}}{v_n} < 1$ ومنه المتتالية (v_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

مثال 2:

- أدرس اتجاه تغير كل من المتتاليتين (u_n) و (v_n) المعرفتين على $\mathbb{N}$ كمايلي: $u_n = \frac{n+1}{3^n}$ و $v_n = \frac{2n-1}{n+3}$.

الحل:

(1) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

طريقة 1:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n+1+1}{3^{n+1}} - \frac{n+1}{3^n} = \frac{n+2}{3^{n+1}} - \frac{3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{n+2-3(n+1)}{3^{n+1}} = \frac{-2n-1}{3^{n+1}} = \frac{-(2n+1)}{3^{n+1}} < 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

طريقة 2:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 = \frac{\frac{n+1+1}{3^{n+1}}}{\frac{n+1}{3^n}} - 1 = \frac{n+2}{3^{n+1}} \times \frac{3^n}{n+1} - 1 = \frac{n+2}{3(n+1)} - 1 = \frac{n+2-3(n+1)}{3(n+1)} = \frac{-2n-1}{3(n+1)} = \frac{-(2n+1)}{3(n+1)} < 0$$

ومنه: $\frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 < 0$ أي $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ ومنه المتتالية (u_n) متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

طريقة 1:

$$v_{n+1} - v_n = \frac{2(n+1)-1}{(n+1)+3} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{2n+1}{n+4} - \frac{2n-1}{n+3} = \frac{(2n+1)(n+3) - (2n-1)(n+4)}{(n+4)(n+3)} = \frac{7}{(n+4)(n+3)} > 0$$

ومنه المتتالية (v_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

طريقة 2 :

لنكن f دالة مرفقة بالمتتالية (v_n) من الشكل $v_n = f(n)$ حيث : $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ مع $x \in [0; +\infty[$

دراسة اتجاه تغير الدالة f : من أجل كل $x \in [0; +\infty[$

$$f'(x) = \frac{2 \times 3 - (-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2} > 0$$

ومنه الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ وبالتالي المتتالية (v_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

تمرين :

أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) المعرفة بحددها العام u_n في كل حالة من الحالات التالية :

$$\begin{array}{lll} (1) & u_n = 4 - 3n & , \\ (2) & u_n = \frac{n}{3} - 5 & , \\ (3) & u_n = 4 \times 3^n & , \\ (4) & u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n & , \\ (5) & u_n = \frac{2^n}{3} & , \\ (6) & u_n = \frac{2^{n+1}}{3^n} \end{array}$$

المتتاليات الحسابية :

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r (r عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n + r \quad (\text{أو } u_{n+1} - u_n = r)$$

مثال 1 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 2$ وحدها الأول $u_0 = -5$.
- أحسب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 .

الحل :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_0 + r = -5 + 2 = -3 \\ u_2 &= u_1 + r = -3 + 2 = -1 \\ u_3 &= u_2 + r = -1 + 2 = 1 \end{aligned}$$

مثال 2 :

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{Z}$ بـ : $u_n = -3n + 1$

- بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

طريقة :

لإثبات أن (u_n) متتالية حسابية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = r$ مع r عدد حقيقي ثابت .

الحل :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= -3(n+1) + 1 - (-3n + 1) \\ &= -3n - 3 + 1 + 3n - 1 \\ &= -3 \end{aligned}$$

ومنه (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -3$.

- تعيين الحد الأول : $u_0 = -3 \times 0 + 1 = 1$

تطبيق :

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{Z}$ بـ : $u_n = 4n - 3$

- بين أن (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

عبارة الحد العام لمتتالية حسابية:

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية حسابية أساسها r فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n = u_p + (n - p)r$

حالات خاصة : إذا كان حدها الأول u_0 : $u_n = u_0 + nr$ ، إذا كان حدها الأول u_1 : $u_n = u_1 + (n - 1)r$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $u_0 = 2$
- عين عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 + nr$ أي $u_n = 2 + n \times (-5)$ ومنه : $u_n = -5n + 2$.

مثال 2 :

لتكن (u_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$ وحدها الأول $u_1 = 2$
- أكتب u_n بدلالة n .

الحل :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_n = u_1 + (n-1)r$ أي $u_n = 2 + (n-1) \times (-5)$ ومنه: $u_n = 2 - 5n + 5$ وبالتالي: $u_n = -5n + 7$

تطبيق :

لنكن (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_6 = 25$ و $u_{10} = 37$.

- 1- عين r أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول.
- 2- أكتب u_n بدلالة n .
- 3- بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) معينا رتبته.

حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية :

خاصية : إذا كانت (u_n) متتالية حسابية فإن :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

بصفة عامة: $S = \frac{\text{عدد الحدود}}{2} (\text{الحد الأول} + \text{الحد الأخير})$
عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد.

مثال : (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ ب: $u_n = \frac{1}{2}n + \frac{3}{2}$

- عبر عن S_n بدلالة n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

الحل :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n-0+1}{2} \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}n + \frac{3}{2} \right) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{1}{2}n + 3 \right) = \frac{n+1}{2} \left(\frac{n+6}{2} \right) = \frac{(n+1)(n+6)}{4}$$

الوسط الحسابي :

خاصية : تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$. يسمى العدد b الوسط الحسابي للعددين a و c .

مثال : (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ حيث: $u_1 = 2$ و $u_3 = 8$

- أحسب u_2 .

الحل :

لدينا $u_1 + u_3 = 2u_2$ ومنه $2u_2 = 8 + 2$ أي $2u_2 = 10$ وبالتالي $u_2 = 5$.

تمرين 1 :

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$ وحدها الأول $u_0 = -3$.

- 1- أحسب u_1 .
- 2- أكتب u_n بدلالة n .
- 3- أحسب الحد ذو الرتبة 2021.
- 4- أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020}$.
- 5- أحسب المجموع S' حيث: $S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{2020}$.
- 6- أكتب بدلالة n كل من المجموعين S_n و S'_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ و $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.

الحل :

1- حساب الحد u_1 : $u_1 = u_0 + r = -3 + 5 = 2$

2- كتابة u_n بدلالة n : $u_n = u_0 + nr = -3 + n \times 5 = 5n - 3$

3- الحد ذو الرتبة 2021 هو u_{2020}

ومنه $u_{2020} = 5 \times 2020 - 3 = 10097$

4- حساب المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2020} = \frac{2020 - 0 + 1}{2} (u_0 + u_{2020}) = \frac{2021}{2} (-3 + 10097) = 10199987$$

5- حساب المجموع S' :

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{2020} = \frac{2020 - 1 + 1}{2} (u_1 + u_{2020}) = \frac{2020}{2} (2 + 10097) = 10199990$$

6- كتابة S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n - 0 + 1}{2} (u_0 + u_n) = \frac{n + 1}{2} (-3 + 5n - 3) = \frac{(n + 1)(5n - 6)}{2}$$

- كتابة S'_n بدلالة n :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = \frac{n - 1 - 1 + 1}{2} (u_1 + u_{n-1}) = \frac{n - 1}{2} (2 + 5(n - 1) - 3) = \frac{n - 1}{2} (2 + 5n - 5 - 3) = \frac{(n - 1)(5n - 6)}{2}$$

تمرين 2:

(u_n) متتالية حسابية أساسها $r = 5$ وحدها الأول $u_1 = 2$

1- أحسب u_2 و u_3 .

2- أكتب u_n بدلالة n .

3- أحسب الحد ذو الرتبة 2020.

4- أحسب المجموع S حيث : $S = 7 + 12 + \dots + 10097$

تمرين 3:

لتكن (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها r حيث : $u_2 - u_0 = 4$ و $u_1 + u_3 = 16$

(1) أحسب الحد u_2 ، ثم الحد u_0 واستنتج الأساس r للمتتالية (u_n) .

(2) أ- بين أن الحد العام للمتتالية معرف بـ : $u_n = 4 + 2n$.

ب - حدد مع التبرير اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(3) بين أن العدد 2020 حد من حدود المتتالية (u_n) ، محددا رتبته .

(4) أحسب المجموع S المعروف بـ : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{1008}$

المتتاليات الهندسية :

تعريف :

نقول أن المتتالية (u_n) هندسية حدها الأول u_0 وأساسها q (q عدد حقيقي) إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = u_n \times q \quad \left(\text{أو} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = q \right)$$

❖ **مثال 1:** لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $u_0 = -4$.

- أحسب الحدين u_1 ، u_2 .

الحل :

$$u_1 = u_0 \times q = -4 \times 2 = -8 \quad \text{و} \quad u_2 = u_1 \times q = -8 \times 2 = -16$$

مثال 2 :

❖ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = 2 \times 3^n$

- بين أن (u_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

طريقة :

لإثبات أن (u_n) متتالية هندسية يكفي أن نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = u_n \times q$ مع q عدد حقيقي ثابت .

الحل :

$$u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3 = u_n \times 3$$

ومنه (u_n) هندسية أساسها $q = 3$.

حساب الحد الأول : $u_0 = 2 \times 3^0 = 2$.

تطبيق :

❖ لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_n = -5 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- بين أن (u_n) متتالية هندسية بطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

عبارة الحد العام لمتتالية هندسية :

خاصية :

إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q فإنه من أجل كل عددين طبيعيين n و p : $u_n = u_p \times q^{n-p}$

حالات خاصة : إذا كان حدها الأول u_0 : $u_n = u_0 \times q^n$ ، إذا كان حدها الأول u_1 : $u_n = u_1 \times q^{n-1}$.

مثال 1 :

❖ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 7$ وحدها الأول $u_0 = 2$

- عین عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) .

الحل :

❖ لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = u_0 \times q^n$ أي $u_n = 2 \times 7^n$.

مثال 2 :

❖ لتكن (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ وحدها الأول $u_1 = -3$

- أكتب u_n بدلالة n .

❖ **الحل :** لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n :

$$\text{لدينا : } u_n = u_1 \times q^{n-1} \text{ أي } u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ ومنه : } u_n = -3 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ وبالتالي : } u_n = -6 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

■ تطبيق :

- لتكن (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{R}$ حيث : $u_8 = -768$ و $u_{15} = -98304$.
- 1/ عين q أساس المتتالية (u_n) وحدها الأول .
 - 2/ أكتب u_n بدلالة n .
 - 3/ أحسب الحد الحادي العاشر .

■ تمرين :

- بلغ عدد سكان إحدى المدن الجزائرية 3000 نسمة سنة 2005 و 3630 نسمة سنة 2007 .
نفرض أن α نسبة تزايد السكان سنويا بهذه المدينة ثابتة .
- 1- عين α نسبة تزايد سكان المدينة .
 - 2- كم سيكون عدد سكان هذه المدينة سنة 2030 ؟ يتم تدوير النتيجة إلى العشرات .

■ الحل :

- نرمز بـ u_n مثلا إلى عدد سكان المدينة سنة $2005 + n$ وبذلك يكون $u_0 = 3000$ و $2007 = 2005 + 2$ أي $u_2 = 3630$.
- 1- بما أن نسبة التزايد α ثابتة فإن العلاقة بين عدد السكان خلال السنة $2005 + n$ وعدد السكان خلال السنة الموالية وهي :
 $u_{n+1} = u_n + \alpha u_n$ أي $u_{n+1} = (1 + \alpha)u_n$ وبالتالي (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 1 + \alpha$.
لدينا : $u_2 = u_0 \times q^2$ ومنه $q^2 = \frac{u_2}{u_0} = 1.21$ أي $q = 1.1$ وبالتالي $\alpha + 1 = 1.1$ ومنه $\alpha = 0.1 = 10\%$.
 - 2- لدينا : $2030 = 2005 + 25$ ولنا $u_{25} = u_0 \times q^{25}$ ومنه $u_{25} = 3000 \times (1.1)^{25} \approx 32504.12$ أي $u_{25} \approx 32504.12$.

حساب مجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

خاصية : إذا كانت (u_n) متتالية هندسية أساسها q يختلف عن 1 فإن :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}$$

بصفة عامة : $S = \frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \times \text{الحد الأول}$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير ناقص دليل الحد الأول زائد واحد .
■ إذا كان $q = 1$ فإن (الحدود متساوية والمتتالية الهندسية ثابتة)

$$S = (\text{عدد الحدود}) \times \text{الحد الأول}$$

■ **مثال :** (u_n) متتالية هندسية حدها الأول $u_0 = 5$ وأساسها $q = \frac{1}{2}$.

- عبر عن S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

■ الحل :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 5 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} = 2 \times 5 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) = 10 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

■ تطبيق 1:

(u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 4$ وحدها الأول $u_0 = -3$.

- (1) أحسب u_1 .
- (2) أحسب المجموع S حيث : $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{19}$.
- (3) أحسب المجموع S' حيث : $S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{19}$.
- (4) أكتب بدلالة n كل من المجموعين S'_n و S_n حيث : $S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$ و $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

الحل :

(1) حساب الحد u_1 : $u_1 = u_0 \times q = -3 \times 4 = -12$

(2) حساب المجموع S :

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{19} = u_0 \times \frac{1 - q^{19-0+1}}{1 - q} = -3 \times \frac{1 - 4^{20}}{1 - 4} = -3 \times \frac{1 - 4^{20}}{-3} = 1 - 4^{20}$$

حساب المجموع S' :

$$S' = u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = u_1 \times \frac{1 - q^{19-1+1}}{1 - q} = -12 \times \frac{1 - 4^{19}}{1 - 4} = -12 \times \frac{1 - 4^{19}}{-3} = 4(1 - 4^{19})$$

كتابة S_n بدلالة n :

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \times \frac{1 - q^{n-0+1}}{1 - q} = -3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} = -3 \times \frac{1 - 4^{n+1}}{-3} = 1 - 4^{n+1}$$

- كتابة S'_n بدلالة n :

$$S'_n = u_1 + u_2 + \dots + u_{19} = u_1 \times \frac{1 - q^{n-1+1}}{1 - q} = -12 \times \frac{1 - 4^n}{1 - 4} = -12 \times \frac{1 - 4^n}{-3} = 4(1 - 4^n)$$

الوسط الهندسي:

خاصية : تكون الأعداد a ، b و c بهذا الترتيب حدودا متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$. يسمى العدد b الوسط الهندسي للعددين a و c .

مثال :

لتكن (u_n) متتالية هندسية ، حدودها موجبة تماما حيث : $u_3 \times u_5 = 2916$

- أحسب الحد u_4 .

الحل :

لدينا : $u_4^2 = u_3 \times u_5$ ومنه $u_4^2 = 2916$ ومنه $u_4 = 54$ أو $u_4 = -54$ ولأن الحدود موجبة فإن $u_4 = 54$.

تمرين : بكالوريا علوم تجريبية 2009 .

(u_n) متتالية هندسية متزايدة تماما حددا الأول u_1 وأساسها q حيث :

$$\begin{cases} u_1 + 2u_2 + u_3 = 32 \\ u_1 \times u_2 \times u_3 = 216 \end{cases}$$

(1) أ- أحسب u_2 والأساس q لهذه المتتالية واستنتج الحد الأول u_1 .

ب- أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .

ج- أحسب بدلالة n المجموع : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ ثم عين العدد الطبيعي n بحيث يكون $S_n = 728$

(2) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي : $v_1 = 2$ و $v_{n+1} = \frac{3}{2}v_n + u_n$

أ- أحسب v_2 و v_3 .

ب- نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $w_n = \frac{v_n}{u_n} - \frac{2}{3}$

- بين أن (w_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$.

ج- أكتب w_n بدلالة n ثم استنتج v_n بدلالة n .

المتتاليات المحدودة :

تعريف :

- (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{Q}$.
1. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى يعني وجود عدد حقيقي A حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \leq A$.
 2. القول أن المتتالية (u_n) محدودة من الأسفل يعني وجود عدد حقيقي B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n \geq B$.
 3. القول أن المتتالية (u_n) محدودة يعني وجود عددين حقيقيين A و B حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $B \leq u_n \leq A$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_n = 2 + \frac{3}{n}$.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{n} \leq 3$ ومنه $2 + \frac{3}{n} \leq 2 + 3$ أي $u_n \leq 5$ وبالتالي (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 5.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $\frac{3}{n} > 0$ ومنه $2 + \frac{3}{n} > 2 + 0$ أي $u_n > 2$ وبالتالي (u_n) محدودة من الأسفل بالعدد 2.

لدينا من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $2 < u_n \leq 5$ وبالتالي (u_n) محدودة.

مثال 2 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{Q}$ بحدها العام : $u_n = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4}$.

- أثبت أن المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بـ 2.

الحل :

$$u_n - 2 = \frac{2n^2 + 1}{n^2 + 4} - 2 = \frac{2n^2 + 1 - 2(n^2 + 4)}{n^2 + 4} = \frac{2n^2 + 1 - 2n^2 - 8}{n^2 + 4} = \frac{-7}{n^2 + 4} < 0$$

أي : $u_n - 2 < 0$ ومنه $u_n < 2$ وبالتالي المتتالية (u_n) محدودة من الأعلى بالعدد 2.

تطبيق 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{Q}$ بـ : $u_n = \frac{8n}{n^2 + 4}$.

- برهن أن المتتالية (u_n) محدودة بالعدد 0 و 2.

الاستدلال بالتراجع :

مبدأ الاستدلال بالتراجع :

- $p(n)$ خاصية متعلقة بعدد طبيعي n و n_0 عدد طبيعي .
 للبرهان على صحة الخاصية $p(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 يكفي أن :
 1- التأكد من صحة الخاصية من أجل n_0 أي $p(n_0)$.
 2- نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل عدد طبيعي n أكبر أو يساوي n_0 أي $p(n)$ (فرضية التراجع) ونبرهن صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي $p(n+1)$.

مثال 1:

لنثبت صحة الخاصية التالية: من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$.

المرحلة الأولى : من أجل $n=1$ لدينا : $1 = \frac{1 \times 2}{2}$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n=1$.

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل $n \geq 1$ أي : $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

ونبرهن على صحة الخاصية من أجل $n+1$ أي : $1+2+3+\dots+n+(n+1) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$
 لدينا :

$$\begin{aligned} 1+2+3+\dots+n+(n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

ومنه $p(n+1)$ صحيحة

إذن من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

مثال 2:

برهن بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

المرحلة الأولى : من أجل $n=0$: $0^3 - 0 = 0 = 3 \times 0$ صحيحة .

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n أي : $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 وبالتالي : $n^3 - n = 3k$ مع k عدد طبيعي .

ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي : $(n+1)^3 - (n+1)$ مضاعف للعدد 3 .
 لدينا :

$$\begin{aligned} (n+1)^3 - (n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 - n - 1 \\ &= n^3 - n + 3n^2 + 3n \\ &= 3k + 3n^2 + 3n \\ &= 3(k + n^2 + n) \end{aligned}$$

ومنه $(n+1)^3 - (n+1)$ مضاعف للعدد 3 أي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n ، $n^3 - n$ مضاعف للعدد 3 .

تمرين :

(u_n) متتالية حدها الأول $u_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 1$.

1- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

2- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .

الحل :

1- من أجل $n=0$: $u_0 = 4 \geq -2$ صحيحة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n \geq -2$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} \geq -2$

لدينا $u_n \geq -2$ ومنه $\frac{1}{2}u_n \geq -1$ ومنه $\frac{1}{2}u_n - 1 \geq -1-1$ وبالتالي $u_{n+1} \geq -2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n \geq -2$.

2- إثبات أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 1 - u_n = -\frac{1}{2}u_n - 1$$

لدينا : $u_n \geq -2$ ومنه $\frac{-1}{2}u_n \leq 1$ أي $\frac{-1}{2}u_n - 1 \leq 0$ ومنه $u_{n+1} - u_n \leq 0$ وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

تمرين :

المتتالية (u_n) معرفة بـ $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$.

1- برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 2$.

2- أثبت أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما .

المتتاليات المتقاربة :

نهاية متتالية :

نقول أن العدد الحقيقي l نهاية للمتتالية (u_n) يعني أن كل مجال مفتوح مركزه l يشمل كل حدود هذه المتتالية من رتبة معينة ونكتب :
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = l$ أو $\lim (u_n) = l$ وفي هذه الحالة نقول أن المتتالية (u_n) متقاربة .

ملاحظة :

- 1- إذا كانت (u_n) متقاربة فإن نهايتها وحيدة .
- 2- إذا كانت (u_n) متتالية غير متقاربة فهي متباعدة (نهايتها غير منتهية أو غير موجودة) .

المتتاليات من الشكل $u_n = f(n)$

يمثل α عددا حقيقيا ، $+\infty$ أو $-\infty$. (u_n) متتالية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحددها العام $u_n = f(n)$ حيث f دالة معرفة على المجال $[0; +\infty[$. إذا كانت $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \alpha$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \alpha$.

مثال 1 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم بـ : $u_n = \frac{1}{n}$

- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

ومنه المتتالية (u_n) متقاربة نحو العدد 0 .

مثال 2 :

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $u_n = \frac{n^2 + 1}{n}$

- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

$$\text{لدينا : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$$

ومنه المتتالية (u_n) متباعدة .

نهاية متتالية هندسية :

مبرهنة :

(1) إذا كان $-1 < q < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.

(2) إذا كان $q = 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

(3) إذا كان $q > 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.

(4) إذا كان $q \leq -1$ فإن النهاية غير موجودة .

أمثلة :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{3}\right)^n = 0 , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty , \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

الرتابة والتقارب :

مبرهنة :

- 1/ إذا كانت متتالية متزايدة ومحدود من الأعلى فإن هذه المتتالية متقاربة .
- 2/ إذا كانت متتالية متناقصة ومحدودة من الأسفل فإن هذه المتتالية متقاربة .

تطبيق 1 : جزء من دورة 2011 الموضوع (2)

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.

(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

الحل :

(1) حساب الحدود :

$$u_1 = \frac{2}{5}u_0 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \quad , \quad u_2 = \frac{2}{5}u_1 + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{9}{25}$$

(2) البرهان بالتراجع :

$$\text{من أجل } n=0 : u_0 = \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n > \frac{1}{3}$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} > \frac{1}{3}$

لدينا : $u_n > \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{2}{5}u_n > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3}$ ومنه $\frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} > \frac{2}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ وبالتالي $u_{n+1} > \frac{1}{3}$ أي الخاصية صحيحة من أجل $n+1$.

إذن من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) تبين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما :

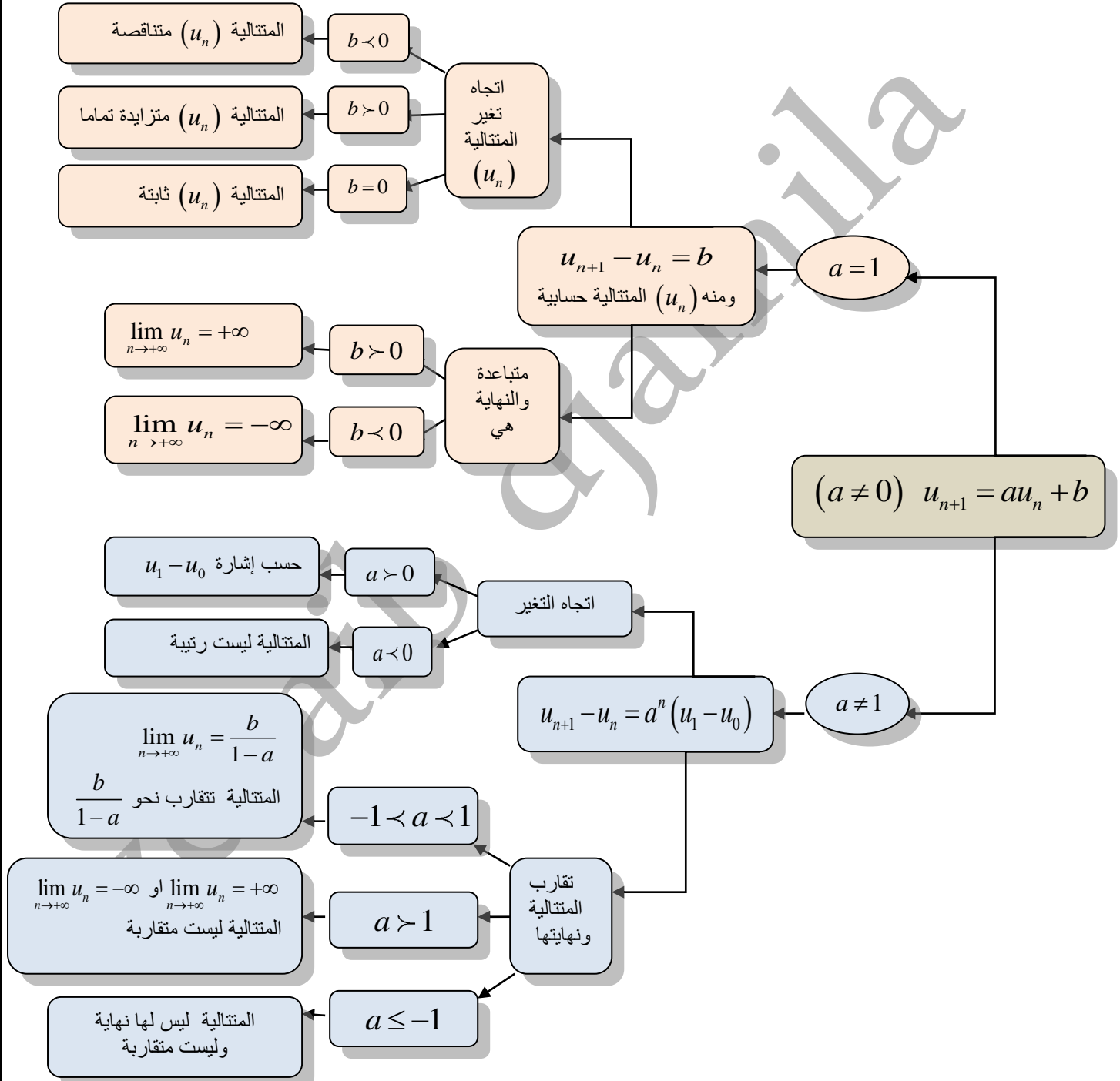
$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5} - u_n = \left(\frac{2}{5} - 1\right)u_n + \frac{1}{5} = -\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5}$$

ولدينا $u_n > \frac{1}{3}$ أي $-\frac{3}{5}u_n < -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3}$ ومنه $-\frac{3}{5}u_n + \frac{1}{5} < -\frac{3}{5} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$ ومنه $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية (u_n) متناقصة تماما على $\square$.

دراسة المتتاليات من الشكل $(a \neq 0) \quad u_{n+1} = au_n + b$

(u_n) متتالية حدها الأول u_0 ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = au_n + b$ حيث a و b عدنان حقيقيان و $a \neq 0$.
نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث f هي الدالة التآلفية $f: x \mapsto ax + b$.



تمارين :

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة بحددها الأول $u_0 = \alpha$ وبالعلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

(أ) نفرض أن $\alpha = 3$

1- أحسب u_1 ، u_2 و u_3 . ضع تخميناً حول طبيعة المتتالية (u_n) ثم أثبت صحة تخمينك

2- هل المتتالية (u_n) متقاربة ؟

(ب) نفرض $\alpha = 2$ ونعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بالعلاقة $v_n = u_n - 3$

(1) أثبت أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الأول .

(2) أحسب v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n

(3) بين أن المتتالية (u_n) متقاربة محددا نهايتها .

(4) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

(ج) نفرض $\alpha = 6$ ، أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

الحل :

(أ) لدينا $\alpha = 3$ ومنه $u_0 = 3$

1- لدينا : $u_1 = \frac{1}{3}u_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ، $u_2 = \frac{1}{3}u_1 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ و $u_3 = \frac{1}{3}u_2 + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$

إثبات صحة التخمين :

المرحلة الأولى : من أجل $n = 0$: $u_0 = 3$ صحيحة

المرحلة الثانية : نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي $u_n = 3$ ونبرهن على صحتها من أجل $n+1$ أي $u_{n+1} = 3$

لدينا $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2 = \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$ ومنه $u_{n+1} = 3$. إذن الخاصية صحيحة من أجل $n+1$

وبالتالي : الخاصية صحيحة من أجل كل عدد طبيعي n المتتالية (u_n) ثابتة .

2- نعم المتتالية (u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 3 .

(ب) لدينا $\alpha = 2$ ومنه $u_0 = 2$

1- إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية و تعيين أساسها

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 3 = \frac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \frac{1}{3}u_n - 1 = \frac{1}{3}(u_n - 3) = \frac{1}{3}v_n$$

ومنه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{3}$.

• تعيين الحد الأول : $v_0 = u_0 - 3 = 2 - 3 = -1$

2- كتابة v_n بدلالة n : $v_n = v_0 \times q^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$

• كتابة u_n بدلالة n : لدينا $v_n = u_n - 3$ ومنه $u_n = v_n + 3$ وبالتالي $u_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3$

3- بما أن $1 < \frac{1}{3} < 1$ فإن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[-\left(\frac{1}{3}\right)^n + 3\right] = 3$ ونستنتج أن (u_n) متقاربة وتتقارب نحو العدد 3.

4- نلاحظ أن $u_{n+1} = f(u_n)$ حيث $f : x \mapsto \frac{1}{3}x + 2$ ، بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 = \frac{2}{3}$ (فان المتتالية (u_n) متزايدة

(ج) لدينا $\alpha = 6$ ومنه $u_0 = 6$

بما أن $\frac{1}{3} > 0$ و $u_1 - u_0 = -2$ (فان المتتالية (u_n) متناقصة.

تمارين المتتاليات في كالكوريا تسيير واقتصاد (من 2011 إلى 2020)

دورة 2011 الموضوع (2) :

لتكن المتتالية العددية (u_n) حيث : $u_0 = \frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + \frac{1}{5}$.
(1) أحسب u_1 و u_2 .

(2) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{1}{3}$.

(3) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

(4) لتكن المتتالية العددية (v_n) حيث من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - \frac{1}{3}$.

أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب كلا من v_n و u_n بدلالة n .

ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

دورة 2012 الموضوع (1):

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3u_n + 4}{9}$.

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > \frac{2}{3}$.
ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة .

(2) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بـ : $v_n = u_n - \frac{2}{3}$.
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية ، يطلب تحديد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب عبارة v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = \frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^n + 2 \right]$.

ج- ماهي نهاية المتتالية (u_n) ؟

(3) أحسب ، بدلالة n ، المجموع S_n حيث : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

دورة 2012 الموضوع (2) :

في بداية جانفي 2008 وضع شخص مبلغا من المال قدره 50000DA في صندوق التوفير والاحتياط . يقدم الصندوق فائدة قدرها 5% سنويا . يسحب هذا الشخص نهاية كل سنة مبلغا قدره 5000DA (بعد حساب الفوائد) . يرمز u_n إلى المبلغ الذي يملكه هذا الشخص في حسابه بداية جانفي من السنة $2008 + n$.

(1) أ- أحسب كلا من u_0 ، u_1 و u_2 .

ب - هل المتتالية (u_n) هندسية ؟ هل هي حسابية ؟ برر إجابتك .

ج - بين لماذا من أجل كل عدد طبيعي n لدينا ، $u_{n+1} = 1.05u_n - 5000$.

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = u_n - 100000$.

أ- بين أن المتتالية (v_n) هندسية ، حدد أساسها وحدها الأول .

ب- أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = -50000 \times (1.05)^n + 100000$.

(3) أ- ماهو المبلغ الذي يكون في حساب هذا الشخص نهاية عام 2015 ؟

ب - ابتداء من أية سنة لا تسمح إدارة الصندوق لهذا الشخص بسحب المبلغ المعتاد على سحبه في نهاية كل سنة ؟

دورة 2013 الموضوع (1):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1} = \left(\frac{2a+1}{3} \right) u_n - \frac{2a+4}{3} .$$

- 1- عين قيمة a التي من أجلها تكون المتتالية (u_n) ثابتة .
- 2- نفرض $a \neq \frac{5}{2}$. عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) حسابية ، ثم احسب عندئذ u_n ومجموع n حدا الأولى من المتتالية .
- 3- عين قيمة a حتى تكون المتتالية (u_n) هندسية ، ثم عين في هذه الحالة كلا من u_{50} ومجموع 50 حدا الأولى منها .
- 4- نفرض أن $a=4$. برهن بالتراجع أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، فان : $u_n = 3^n + 2$ ، ثم بين أن :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{1}{2} (3^{n+1} + 4n + 3)$$

دورة 2013 الموضوع (2) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بـ : $u_0 = 6$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n + 6$.

- (1) أ- أحسب الحدود : u_1 ، u_2 ، u_3 و u_4 .
ب - هل المتتالية (u_n) رتيبة على $\mathbb{R}$ ؟ برر إجابتك .
- (2) أ- بين أنه ، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - 4 = -\frac{1}{2}(u_n - 4)$ ، $\square$.
ب - استنتج أن المتتالية (v_n) المعرفة على $\square$ بـ : $v_n = u_n - 4$ هندسية ، يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
ج - أكتب v_n ، ثم u_n بدلالة n .
د - بين أن (u_n) متقاربة .
- (3) باستعمال عبارة u_n ، تأكد ثانية من نتيجة السؤال (1) ب .

دورة 2014 الموضوع (1):

أجب بصحيح أو خطأ ، مع التبرير ، في كل حالة من الحالات الآتية :

1/ (u_n) متتالية عددية معرفة على $\square$ حدودها موجبة تماما و (v_n) المتتالية المعرفة على $\square$ بـ : $v_n = \ln u_n$:

- (أ) إذا كانت (u_n) متقاربة فان (v_n) متقاربة .
- (ب) إذا كانت (u_n) متناقصة فان (v_n) متناقصة .
- (ج) إذا كانت (u_n) هندسية فان (v_n) حسابية .

دورة 2014 الموضوع (2):

(u_n) المتتالية العددية معرفة كما يلي : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n - 1$ ،

- 1- (أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فان $u_n > -3$.
(ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .
(ج) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة .
- 2- لتكن (v_n) متتالية هندسية متقاربة أساسها q حيث : $v_0 = 6$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = 18$.
(أ) بين أن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} (v_0 + v_1 + \dots + v_n) = \frac{v_0}{1-q}$.
(ب) أحسب الأساس q ثم عين عبارة الحد العام v_n بدلالة n .
(ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = v_n - 3$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n .

دورة 2015 الموضوع (1):

- اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية :
- (1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي n بحددها العام : $u_n = 5 \times 2^n \times 3^{n-1}$.
- (أ) (u_n) حسابية ، (ب) (u_n) هندسية ، (ج) (u_n) ليست هندسية ولا حسابية.
- (2) (v_n) متتالية حسابية حدها الأول $v_0 = 1$ وأساسها 4 ، قيمة n التي من أجلها يكون $v_1 + v_2 + \dots + v_n = 2015$ هي :
- (أ) $n = 31$ ، (ب) $n = 32$ ، (ج) $n = 33$.

دورة 2015 الموضوع (2) :

بينت دراسة أن 5% من عمال إحدى القطاعات الصناعية يحالون على التقاعد سنويا وبالمقابل يوظف 3000 عامل سنويا . علما أن سنة 2012 كان عدد العمال 50000.

نعتبر الألف هو الوحدة ونرمز بـ : u_n لعدد العمال سنة $2012 + n$ أي $u_0 = 50$.

- (1) أحسب u_1 و u_2 .
- (2) (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = 0.95u_n + 3$.
(ب) بين أن المتتالية (u_n) ليست حسابية وليست هندسية .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $v_n = 60 - u_n$.
(أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .
(ب) أكتب v_n بدلالة n ، ثم استنتج u_n بدلالة n .
(ج) قدر عدد العمال سنة 2017 .
(د) حدد اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
(هـ) أحسب نهاية المتتالية (u_n) . هل يمكن أن يصل عدد عمال المصنع إلى 60000 عامل ؟

دورة 2016 الموضوع (1):

(v_n) متتالية هندسية حدودها موجبة ومعرفة على $\mathbb{Q}$ بحددها الأول $v_0 = 18$ والعلاقة : $v_0 + v_1 + v_2 = 38$

- 1/ بين أن أساس المتتالية (v_n) هو $q = \frac{2}{3}$.
- 2/ (أ) أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n .
(ب) أدرس اتجاه تغير المتتالية (v_n) .
(ج) أحسب نهاية (v_n) .
- 3/ نضع $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
(أ) أحسب S_n بدلالة n ثم استنتج نهاية S_n عندما n يؤول إلى $+\infty$.
(ب) جد العدد الطبيعي n بحيث $S_n = \frac{3510}{81}$.

دورة 2016 الموضوع (2) :

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ بـ : $u_0 = 5$ و $u_{n+1} = \frac{4}{7}u_n + \frac{3}{7}$

- (1) أحسب الحدين u_1 و u_2 .
- (2) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 1$.
ب- بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما .
ج- ماذا تستنتج بالنسبة لتقارب المتتالية (u_n) ؟
- (3) لنكن المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{Q}$ بـ : $v_n = u_n - 1$.
أ- بين أن (v_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول .
ب- أكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 1 + 4\left(\frac{4}{7}\right)^n$.
ج- أحسب نهاية (u_n) .

دورة 2017 الموضوع (1) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2$

- (1) أ. برهن بالتراجع أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 3$.
ب) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .
- (2) (v_n) المتتالية المعرفة بـ : من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 - u_n$.
أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{1}{3}$ ثم عين حدها الأول .
ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.
بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $S_n = 3(n-1) + 2\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

دورة 2017 الموضوع (2) :

لتكن (u_n) المتتالية العددية المعرفة بحددها الأول $u_0 = 2$ ومن أجل كل n طبيعي، $u_{n+1} = 3u_n - 2$

- (1) أحسب u_1 ، u_2 ، u_3 ثم خمن اتجاه تغير المتتالية (u_n) .
- (2) نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة بـ : من أجل كل n طبيعي، $v_n = u_{n+1} - u_n$.
أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها 3 يطلب تعيين حدها الأول .
ب) عين v_n بدلالة n ثم استنتج أن المتتالية (u_n) متزايدة .
- (3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ، $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
أ) أحسب S_n بدلالة n .
ب) بين أن : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = S_n + u_0$ واستنتج عبارة u_n بدلالة n

دورة 2018 الموضوع (1) :

(I) لتكن المتتاليتان العدديتان (u_n) و (v_n) المعرفتان كما يلي :

$$u_0 = 50 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = 0.7u_n + 6 \text{ و } v_n = u_n - 20$$

- (1) برهن أن (v_n) متتالية هندسية أساسها 0.7 يطلب تعيين حدها الأول v_0 ، وكتابة عبارة v_n بدلالة n .
- (2) أ. أكتب بدلالة n عبارة الحد العام u_n .

ب. عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(II) تملك جريدة يومية 5000 مشترك في سنة 2016 . بعد كل سنة تفقد 30% من المشتركين وتكتسب 600 مشترك جديد .

نعتبر المنة هي الوحدة : ونرمز بـ u_n لعدد المشتركين في سنة $2016 + n$ أي $u_0 = 50$

- (1) ماهو عدد المشتركين في سنة 2017 ؟ ثم في سنة 2018 ؟

- (2) أ. برر العبارة $u_{n+1} = 0.7u_n + 6$.

ب. ابتداء من أي سنة يصبح عدد المشتركين أقل من 2400 مشترك ؟

دورة 2018 الموضوع (2) :

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = -1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $2u_{n+1} = u_n + 6$

- (1) أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 6$.
ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - 6$.
أ. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 .
ب. أكتب v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

- (3) أحسب بدلالة n ما يلي : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ و $P_n = v_0 \times v_1 \times v_2 \times \dots \times v_n$

الموضوع 2019 دورة (1):

(u_n) المتتالية العددية المعرفة كما يلي : $u_0 = -4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + 2$.

- (1) أ) أحسب كلا من u_1 و u_2 .
 ب) برهن بالتراجع أنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n < 8$.
- (2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
- (3) من أجل كل عدد طبيعي n ، نضع $v_n = u_n - \alpha$ ، حيث α عدد حقيقي .
 أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n - \frac{1}{4}\alpha + 2$.
 ب) عين قيمة العدد α حتى تكون المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{3}{4}$ ، يطلب تعيين حدها الأول v_0 .
 ج) نضع $\alpha = 8$ ، عبر عن v_n بدلالة n ، ثم استنتج أنه من أجل عدد طبيعي n ، $u_n = -12\left(\frac{3}{4}\right)^n + 8$.
- (4) أحسب المجموع S_n بدلالة n حيث : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

دورة 2019 الموضوع (2) :

(u_n) المتتالية الحسابية المعرفة على $\square$ ب :
$$\begin{cases} u_2 + 2u_5 = 27 \\ u_1 = \frac{9}{2} \end{cases}$$

- (1) أحسب حدها الأول u_0 وأساسها r .
- (2) أكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) بين أن العدد 2019 حد من حدود هذه المتتالية ثم أحسب كلا من المجموعين S_1 و S_2 .
 حيث $S_1 = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_{1344}$ و $S_2 = u_2 + u_4 + u_6 + \dots + u_{1344}$.
 - استنتج حساب المجموع S_3 حيث : $S_3 = u_1 + u_3 + u_5 + \dots + u_{1343}$.
- (4) (v_n) المتتالية العددية المعرفة على $\square$ ب : $v_n = e^{6-2u_n}$.
 - أحسب المجموع $S_n = \frac{1}{v_0} + \frac{1}{v_1} + \dots + \frac{1}{v_n}$.

دورة 2020 الموضوع (1) :

يتقاضى موظف خلال 2019 راتبا شهريا ثابتا يقدر بـ 70000 DA ، في شهر جانفي استهلك منه 80% وابتداء من شهر فيفري قرر تخفيض مبلغ الاستهلاك شهريا بنسبة 5% من المبلغ المستهلك في الشهر الذي قبله .

- (1) أ. ماهو المبلغ المستهلك في شهر جانفي ؟
 ب. حدد المبلغ المستهلك في شهر فيفري .
- (2) نضع : u_1 المبلغ المستهلك في شهر جانفي و u_n المبلغ المستهلك في الشهر n ، حيث n عدد طبيعي غير معدوم .
 عبر عن u_{n+1} بدلالة u_n واستنتج إن (u_n) متتالية هندسية أساسها 0.95 .
- (3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (4) أ. احسب المبلغ المستهلك خلال سنة 2019 .
 ب. أوجد المبلغ المدخر خلال هذه السنة .

دورة 2020 الموضوع (1):

(u_n) المتتالية العددية معرفة بدها الأول u_0 حيث : $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{3}{2}$.

- (1) أ. برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n < \frac{9}{2}$.
 ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .
- (2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = u_n - \frac{9}{2}$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب حساب حدها الأول v_0 .

ب. عبر عن v_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$ أحسب S_n بدلالة n .

دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية الهندسية (v_n) حدها الأول v_0 وأساسها q موجبان تماما و :

$$\begin{cases} \ln v_5 + \ln v_3 = 8 \ln 2 \\ \ln v_5 - \ln v_3 = 2 \ln 2 \end{cases}$$

(1) بين أن : $v_3 = 8$ و $v_5 = 32$.

(2) أ.بين أن : $v_0 = 1$ و $q = 32$.

ب. أكتب v_n بدلالة n .

ج. هل العدد 1024 حد من حدود المتتالية (v_n) ؟

(3) المتتالية (w_n) معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ب : $w_n = 2n - 3 + 2^n$

أ. تحقق أن : $w_n = u_n + v_n$ ، حيث (u_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_0 .

ب. من أجل كل عدد طبيعي n نضع : $S_n = w_0 + w_1 + \dots + w_n$

بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $S_n = (n+1)(n-3) + 2^{n+1} - 1$

دورة 2020 الموضوع (2):

المتتالية العددية (u_n) معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 = 5$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{5}{7}u_n + \frac{6}{7}$.

(1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n > 3$.

(2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) واستنتج أنها متقاربة .

(3) المتتالية العددية (v_n) معرفة من أجل كل عدد طبيعي n ب : $v_n = u_n - 3$.

أ.بين أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب. أكتب عبارة v_n بدلالة n .

ج . استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 2 \times \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$ و أحسب نهاية (u_n)

(4) عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $u_n < \frac{7}{2}$.