مجلة العبقري في الرياضيات (الأعداد المركبة والتحويلات النقطية)

الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الأعداد المركبة// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 تعاريف ونتائج:

❶ تعاريف

كل عدد مركب z يُكتب من الشكل $\boxed{z = x + iy}$،
حيث x وَ y **عددان حقيقيان**
وَ i عدد تخيّلي يُحقق $\boxed{i^2 = -1}$.

ملاحظات وترميز:

- الكتابة $\boxed{z = x + iy}$، تسمى **الشكل الجبري** لـz.
- x يسمى **الجزء الحقيقي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{x = Re(z)}$.
- y يسمى **الجزء التخيلي** لـz ونرمز له بـ: $\boxed{y = Im(z)}$.
- إذا كان: $Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = x$ فنقول أنّ: z **حقيقي**.
إذا كان: $Re(z) = 0$؛ فإنّ: $z = yi$ فنقول أنّ: z **تخيلي صرف** (**أو تخيلي بحت**).
إذا كان: $Re(z) = Im(z) = 0$؛ فإنّ: $z = 0$؛ إذن: 0 هو في آنٍ واحد **حقيقي وَتخيلي صرف**.

نتيجة:

$\boxed{z = 0}$، **معناه:** $\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

❷ تساوي عددين مركبين

تعريف:

يكون عددان مركبان z و z' **متساويين** **إذا وفقط إذا كان لهما**
- نفس **الجزء الحقيقي**
- وَنفس **الجزء التخيلي**.

بوضع:

$\boxed{z = x + iy}$،
وَ
$\boxed{z' = x' + iy'}$.

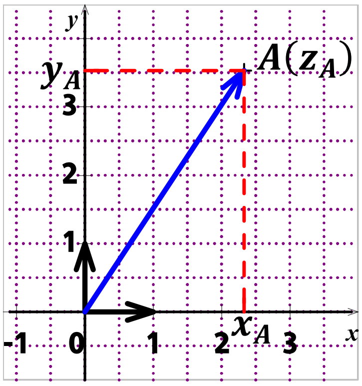
$\boxed{z = z'}$، **معناه:** $\begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$.

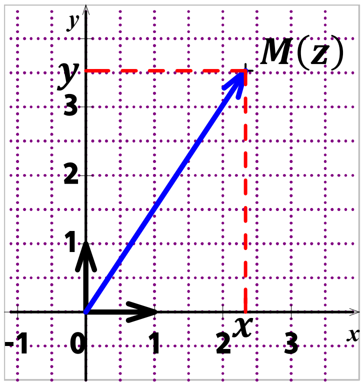
❸ التمثيل الهندسي لعدد مركب

○ نُنسب المستوي إلى **معلم متعامد ومتجانس** $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

- يسمى كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$ **صورة** z.
- ويسمى z **لاحقة** كل من M وَ $\overrightarrow{OM}$؛ نكتب: $\boxed{M(z)}$؛ $\boxed{\overrightarrow{OM}(z)}$.

يُمثل العدد المركب
$\boxed{z = x + iy}$
بالنقطة
$\boxed{M(x; y)}$

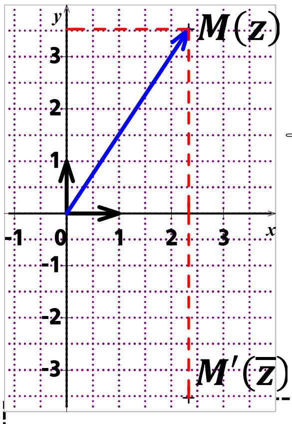




نتائج:

- محور **الفواصل** (**محور الأعداد الحقيقية**)
- محور **التراتيب** (**محور الأعداد التخيلية**)
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ هي: $z_A + z_B$
- **لاحقة الشعاع** $\overrightarrow{AB}$ هي: $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$
حيث: $A(z_A)$ وَ $B(z_B)$

$z_A = x_A + iy_A$ ($Re(z_A) = x_A$ وَ $Im(z_A) = y_A$)



2 مرافق عدد مركب:

❶ مرافق عدد مُركب

صورتا العددين المُركبين **المترافقين؛ متناظرتان** بالنسبة إلى **محور الفواصل** ☜

مُرافق العدد المركب $\boxed{z = x + iy}$، هوَ العدد المُركب $\boxed{\overline{z} = x - iy}$.
(نقوم **بتغيير إشارة الجزء التخيلي** فقط)

❷ خواص المُرافقة

خواص مباشرة من التعريف

① $\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$

② $\boxed{z + \overline{z} = 2x}$

③ $\boxed{z - \overline{z} = 2iy}$

④ $\boxed{z.\overline{z} = x^2 + y^2}$

المُرافق والعمليات

① $\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ ② $\boxed{\overline{z - z'} = \overline{z} - \overline{z'}}$

③ $\boxed{\overline{z.z'} = \overline{z}.\overline{z'}}$ ④ $\boxed{\overline{kz} = k\overline{z}}$ $(k \in \mathbb{R})$

⑤ $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ $(z' \neq 0)$ ⑥ $\boxed{\overline{\left(\frac{k}{z}\right)} = \frac{k}{\overline{z}}}$ $(z \neq 0$ وَ $k \in \mathbb{R})$

⑦ $\boxed{\overline{z^n} = \overline{z}^n}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

- z حقيقي، **معناه:** $\boxed{\overline{z} = z}$.
- z تخيلي صرف، **معناه:** $\boxed{\overline{z} = -z}$.

☜ **يُمكن** استخدام المُرافق لإثبات أنّ z **حقيقي**، أو **تخيلي صرف**.

3 طويلة وعُمدة عدد مركب:

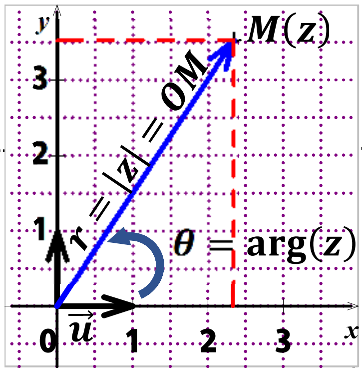
الطويلة

❶ تعريف

M صورته $z = x + iy \neq 0$.
طويلة z:

$$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} = OM}$$

- في حالة: $z = 0$، فإنّ: $|z| = 0$.



العُمدة

❶ تعريف

عُمدة z:

$$\boxed{\theta = \arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM}) = \cdots + 2k\pi}$$

(حيث $k \in \mathbb{Z}$) ونكتب: $\boxed{\arg(z) \equiv \cdots [2\pi]}$

- ...، هو **قيس بالراديان** للزاوية الموجهة $(\vec{u}; \overrightarrow{OM})$.

❷ خواص الطويلة

خواص الطويلة

① $\boxed{|\overline{z}| = |-z| = |z|}$ ② $\boxed{z.\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2}$

③ $\boxed{\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|}}$ $(z' \neq 0)$ ④ $\boxed{\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|}}$ $(z \neq 0)$

⑤ $\boxed{|z.z'| = |z|.|z'|}$ ⑥ $\boxed{|z^n| = |z|^n}$ $(n \in \mathbb{N})$

❷ خواص العُمدة

خواص العُمدة
(**تذكر:** خواص " $\ln$ ")

① $\boxed{\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')}$

② $\boxed{\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')}$ $(z' \neq 0)$

③ $\boxed{\arg\left(\frac{1}{z}\right) = -\arg(z)}$ $(z \neq 0)$

④ $\boxed{\arg(z^n) = n\arg(z)}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

❸ إضافات

- ☹ $\boxed{|z + z'| \neq |z| + |z'|}$ وَ ☹ $\boxed{|z - z'| \neq |z| - |z'|}$.
- ☺ $\boxed{\arg(\overline{z}) = -\arg(z) + 2k\pi}$ وَ ☺ $\boxed{\arg(-z) = \pi + \arg(z) + 2k\pi}$.

4 الشكلان المثلثي والأسي لعدد مركب:

لكتابة عدد مركب z على الشكل المثلثي أو الأسّي، نحتاج إلى حساب طويلته r و عُمدته θ.

❶ الإنتقال من شكل إلى آخر

$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ⇦ $\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$ ، **نستنتج:** $\theta = \arg(z) = \dots + 2k\pi$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

الشكل الجبري	الشكل المثلثي	الشكل الأسي
$z = x + iy$	$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$	$z = re^{i\theta}$

$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ (ترميز أولر)

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

$\left(e^{i\theta}\right)^{\boldsymbol{n}} = e^{i\boldsymbol{n}\theta}$ ؛ حيث $n \in \mathbb{N}^*$ (دستور موافر)

نجد:

$(\cos\theta + i\sin\theta)^{\boldsymbol{n}} = \cos(\boldsymbol{n}\theta) + i\sin(\boldsymbol{n}\theta)$

إذن: $z^{\boldsymbol{n}} = \left(re^{i\theta}\right)^{\boldsymbol{n}} = r^{\boldsymbol{n}}e^{i\boldsymbol{n}\theta}$ ؛ (حيث $n \in \mathbb{N}^*$)

ومنه:

$r^{\boldsymbol{n}} = [r(\cos\theta + i\sin\theta)]^{\boldsymbol{n}} = r^{\boldsymbol{n}}[\cos(\boldsymbol{n}\theta) + i\sin(\boldsymbol{n}\theta)]$

قواعد الحساب على الشكل الأسّي

(**تذكر:** خواص " exp ")

① $e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} \times e^{i\theta'}$

② $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$

③ $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$

❷ تعيين الأعداد الطبيعية n بحيث z^n عدد مركب #خاص

z^n	حقيقي	حقيقي موجب	حقيقي سالب	حيث
معناه:	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = k\pi$	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = 2k\pi$	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = \pi + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$\boldsymbol{n}\theta = k\pi$	$\boldsymbol{n}\theta = 2k\pi$	$\boldsymbol{n}\theta = \pi + 2k\pi$	

z^n	تخيلي صرف	تخيلي صرف و $Im(z^{\boldsymbol{n}}) > 0$	تخيلي صرف و $Im(z^{\boldsymbol{n}}) < 0$	حيث
معناه:	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\arg(z^{\boldsymbol{n}}) = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	(حيث $k \in \mathbb{Z}$)
أي:	$\boldsymbol{n}\theta = \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\boldsymbol{n}\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	$\boldsymbol{n}\theta = \pi + \frac{\pi}{2} + 2k\pi$	

③ البحث عن عُمدة عدد ملاكب (استعمال الدائرة المثلثية وأقياس الزوايا الشهيرة)

استنتاج الطويلة والعُمدة في حالات خاصة

- في حالة: $\boxed{z = x > 0}$، فإنّ: $\boxed{|z| = |x| = x}$ وَ $\boxed{arg(z) = 0 + 2k\pi}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $\boxed{z = x < 0}$، فإنّ: $\boxed{|z| = |x| = -x}$ وَ $\boxed{arg(z) = \pi + 2k\pi}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $\boxed{z = iy \text{ و } y > 0}$، فإنّ: $\boxed{|z| = |y| = y}$ وَ $\boxed{arg(z) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)
- في حالة: $\boxed{z = iy \text{ و } y < 0}$، فإنّ: $\boxed{|z| = |y| = -y}$ وَ $\boxed{arg(z) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

④ دساتير التحويل

نُستعمل للتحويل إلى الشكل المثلثي، ولها إستعمالات أخرى:

① $(k \in \mathbb{Z})$; $\begin{cases} \cos(x+2k\pi) = \cos(x) \\ \sin(x+2k\pi) = \sin(x) \end{cases}$، ② $\begin{cases} \cos(-x) = \cos(x) \\ \sin(-x) = -\sin(x) \end{cases}$،

③ $\begin{cases} \cos(\pi+x) = -\cos(x) \\ \sin(\pi+x) = -\sin(x) \end{cases}$، ④ $\begin{cases} \cos(x-\pi) = -\cos(x) \\ \sin(\pi-x) = \sin(x) \end{cases}$،

⑤ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = -\sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos(x) \end{cases}$، ⑥ $\begin{cases} \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \sin(x) \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos(x) \end{cases}$،

⑤ الدائرة المثلثية وجدول النسب المثلثية لأقياس شهيرة (تستعمل في حساب العُمدة)

الجدول

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

$\boxed{r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}}$

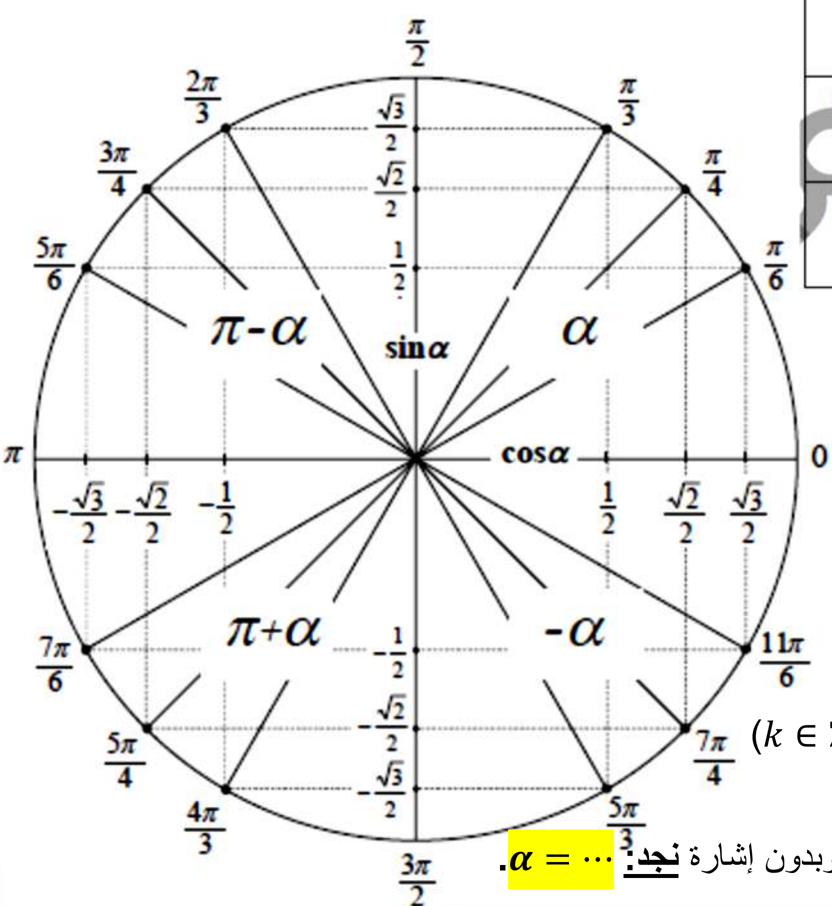
⇩

$\begin{cases} \cos\theta = \frac{x}{r} \\ \sin\theta = \frac{y}{r} \end{cases}$،

نجد:

$\begin{cases} \theta = \arg(z) = \boldsymbol{\alpha} + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = \boldsymbol{\pi - \alpha} + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = \boldsymbol{\pi + \alpha} + 2k\pi \\ \theta = \arg(z) = \boldsymbol{-\alpha} + 2k\pi \end{cases}$؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$)

الدائرة



صورة z تقع في **الرُبع** ...؛ حسب إشارة $\frac{x}{r}$ وَ $\frac{y}{r}$. وبدون إشارة **نجد:** $\boldsymbol{\alpha = \cdots}$.

❻ حل بعض المعادلات في $\mathbb{C}$

معادلات من الشكل az^2+bz+c (حيث $a\neq 0$)

مميزها: $\boxed{\Delta=b^2-4ac}$

① $\boxed{\Delta=0}$،

تقبل حل مضاعف $\boxed{z_0=-\frac{b}{a}}$،

التحليل: $\boxed{az^2+bz+c=a(z-z_0)^2}$

② $\boxed{\Delta\neq 0}$،

$\boxed{\Delta=(w_1)^2=(w_2)^2}$

$w_1=-w_2$ وَ هما **الجذران** التربيعيان لـΔ.

إيجاد أحد الجذران التربيعيان لـΔ:

$\boxed{\Delta=\alpha+i\beta}$،

نقوم بحل الجملة التالية

$$\begin{cases} x^2+y^2=|\Delta|=\sqrt{\alpha^2+\beta^2} & (1)\\ x^2-y^2=Re(\Delta)=\alpha & (2)\\ 2xy=Im(\Delta)=\beta & (3)\end{cases}$$

ملاحظة: باستعمال المعادلة (3)؛ تُحدد **إشارة** x وَ y

$w_1=x_1+iy_1$ وَ $w_2=-w_1=x_2+iy_2$.

الحلان هما $\boxed{z_1=\frac{-b-w_1}{2a}}$، وَ $\boxed{z_2=\frac{-b+w_1}{2a}}$

نأخذ **أحد الجذرين** لإيجاد **الحلان**.

التحليل: $\boxed{az^2+bz+c=a(z-z_1)(z-z_2)}$

هام: في حالة a، b وَ c **أعداد حقيقية**، فإنّ: **الحلان مترافقان**؛ أي: $\boxed{z_1=\overline{z_2}}$.

5 ✍ توظيف الأعداد المركبة في الهندسة:

❶ التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة

الطويلة والعمدة	التفسير الهندسي
① طويلة وعُمدة z (لاحقة كل من **النقطة M**؛ وَ **الشعاع $\overrightarrow{OM}$**) z	① $\begin{cases}\lvert z\rvert=OM\\ \arg(z)=(\vec{u};\overrightarrow{OM})\end{cases}$
② طويلة وعُمدة z_A (لاحقة كل من **النقطة A**؛ وَ **الشعاع $\overrightarrow{OA}$**) z_A	② $\begin{cases}\lvert z_A\rvert=OA\\ \arg(z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{OA})\end{cases}$
③ طويلة وعُمدة (z_B-z_A) ($z_{\overrightarrow{AB}}=z_B-z_A$ لاحقة **الشعاع $\overrightarrow{AB}$**)	③ $\begin{cases}\lvert z_B-z_A\rvert=AB\\ \arg(z_B-z_A)=(\vec{u};\overrightarrow{AB})\end{cases}$

④ طويلة و عُمدة $\frac{z_B}{z_A}$ $(B \neq O$ و $A \neq O)$ (لاحظ أنّ: $\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O}$)	④ $\begin{cases} \left\lvert\frac{z_B}{z_A}\right\rvert = \frac{\lvert z_B\rvert}{\lvert z_A\rvert} = \frac{OB}{OA} \\ \arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = (\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) \end{cases}$ ؛ (المقام أولا في arg)
⑤ طويلة و عُمدة $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ $(B \neq A$ و $C \neq A)$	⑤ $\begin{cases} \left\lvert\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right\rvert = \frac{\lvert z_C - z_A\rvert}{\lvert z_B - z_A\rvert} = \frac{AC}{AB} \\ \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) \end{cases}$ ؛ (المقام أولا بالعكس في arg)

❷ لا حقة المرجح

النقطة (المرجح)	لاحقتها
① لاحقة النقطة I منتصف القطعة المستقيمة $[AB]$ (I مرجح A وَ B بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	① $\boxed{z_I = \frac{z_A + z_B}{2}}$
② لاحقة النقطة H مركز ثقل المثلث ABC (H مرجح A ، B وَ C بنفس المعاملات؛ وتُأخذ 1)	② $\boxed{z_H = \frac{z_A + z_B + z_C}{2}}$
③ لاحقة النقطة G مرجح الجملة $\{(A;\alpha),(B;\beta),(C;\gamma)\}$	③ $\boxed{z_G = \frac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

❸ تداور النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\lvert z_A\rvert = \lvert z_B\rvert = \lvert z_C\rvert = \lvert z_D\rvert = r$ **معناه:** $OA = OB = OC = OD = r$	① النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز O ونصف القطر r.
② $\lvert z_A - z_\omega\rvert = \lvert z_B - z_\omega\rvert = \lvert z_C - z_\omega\rvert = \lvert z_D - z_\omega\rvert = r$ **معناه:** $\omega A = \omega B = \omega C = \omega D = r$	② النقط A، B، C وَ D **تنتمي إلى نفس الدّائرة** ذات المركز ω ونصف القطر r.

❹ إستقامية النقط

إذا كان	نستنتج أنّ
① $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = k \in \mathbb{R}$ ؛ (حيث $B \neq A$) **معناه:** $arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = arg(k) = k\pi$ ؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = k\pi$ ؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية **مستقيمة**	① النقط A، B وَ C **في إستقامية**.
② $\frac{z_B}{z_A} = k \in \mathbb{R}$ ؛ (حيث $A \neq O$) $\left(\frac{z_B}{z_A} = \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = k\right)$ **معناه:** $arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right) = arg(k) = k\pi$ ؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) **أي:** $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = k\pi$ ؛ (حيث $k \in \mathbb{Z}$) زاوية **مستقيمة**	② النقط O، A وَ B **على إستقامة واحدة**.

5 توازي شعاعين أو مستقيمين

نستنتج أن	إذا كان
① $\boxed{\overrightarrow{BD}//\overrightarrow{AC}}$ أو $\boxed{(BD)//(AC)}$.	① $\boxed{\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=k\in\mathbb{R}^*}$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$) تُكافئ: $\boxed{z_D-z_B=k(z_C-z_A)}$؛ معناه: $\boxed{z_{\overrightarrow{BD}}=kz_{\overrightarrow{AC}}}$ أي: $\boxed{\overrightarrow{BD}=k\overrightarrow{AC}}$

6 تعامد مستقيمين أو شعاعين

نستنتج أن	إذا كان
① $\boxed{\overrightarrow{BD}\perp\overrightarrow{AC}}$ أو $\boxed{(BD)\perp(AC)}$.	① $\boxed{\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)}$؛ (حيث $A\neq C$ وَ $B\neq D$) معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) أي: $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{BD})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) **زاوية قائمة**
② $\boxed{\overrightarrow{OB}\perp\overrightarrow{OA}}$ أو $\boxed{(OB)\perp(OA)}$.	② $\boxed{\frac{z_B}{z_A}=iy;(y\in\mathbb{R}^*)}$؛ (حيث $A\neq O$ وَ $B\neq O$) معناه: $\boldsymbol{arg\left(\frac{z_B}{z_A}\right)=arg(iy)=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi}$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) أي: $(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi$؛ (حيث $k\in\mathbb{Z}$) **زاوية قائمة**

7 طبيعة مثلث

بصفة عامة

☜ طبيعة المثلث OAB؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_B}{z_A}$، وطبيعة المثلث ABC؛ حسب طويلة وَعُمدة $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}$.

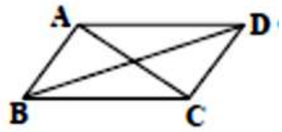
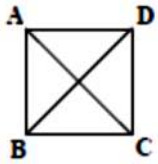
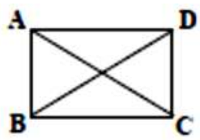
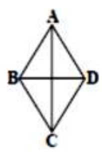
إذن	معناه (التفسير الهندسي للطويلة والعُمدة)	لدينا
① المثلث ABC قائم في A، وَمتساوي الساقين.	① $\begin{cases}\left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=\frac{AC}{AB}=\lvert\pm i\rvert=1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(\pm i)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC=AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	① $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\pm i$ ($B\neq A$ وَ $C\neq A$)
② المثلث ABC قائم في A.	② $\begin{cases}\left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=\frac{AC}{AB}=\lvert yi\rvert\neq 1\\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg(yi)\end{cases}$ أي: $\begin{cases}AC\neq AB\\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	② $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=yi\ ;y\in\mathbb{R}^*-\{\pm1\}$ ($B\neq A$ وَ $C\neq A$)

③ $\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$ $(B\neq A$ و $C\neq A)$	③ $\begin{cases} \left\lvert\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right\rvert=\frac{AC}{AB}=\left\lvert e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right\rvert=1 \\ \arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)=\arg\left(e^{\pm i\frac{\pi}{3}}\right)\end{cases}$ **أي:** $\begin{cases} AC=AB \\ (\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi \end{cases}$ (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	③ المثلث ABC متقايس الأضلاع.
④ $\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_C-z_B\rvert=\lvert z_B-z_A\rvert$	④ $AC=BC=AB$	④ المثلث ABC متساوي الأضلاع.
⑤ $\lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_B-z_A\rvert$ (العلاقة **غير كافية؛** للحكم على **طبيعة المثلث**)	⑤ $AC=AB$	⑤ مُرعاة شروط أخرى (العُمدة)

تذكّر أنه: كل عدد مركب **طويلته 1؛** وَ θ **عُمدة له**، يُكتب من الشكل $\boxed{e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta}$ (ترميز أولر).

❽ طبيعة رباعي

بصفة عامة

نُثبت أن / إثبات أن الرباعي	الطريقة الأولى	الطريقة الثانية
① $ABCD$ متوازي أضلاع. 	① شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ **نُثبت -مثلاً-** $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ **معناه:** $z_{\overrightarrow{AB}}=z_{\overrightarrow{DC}}$ **أي:** $\boxed{z_B-z_A=z_C-z_D}$.	① القطران **متناصفان.** **أي:** $\boxed{\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2}}$.
② $ABCD$ مربع. 	② شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان ومتعامدان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ AB=AD \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\boxed{\begin{cases} z_B-z_A=z_C-z_D \\ \lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_D-z_A\rvert \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	② القطران **متناصفان** وَ**متقايسان** وَ**متعامدان.** **أي:** $\boxed{\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2} \\ \lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_D-z_B\rvert \\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$
③ $ABCD$ مستطيل. 	③ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متعامدان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ \overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\end{cases}$ **أي:** $\boxed{\begin{cases} z_B-z_A=z_C-z_D \\ \arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_D-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	③ القطران **متناصفان** وَ**متقايسان.** **أي:** $\boxed{\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2} \\ \lvert z_C-z_A\rvert=\lvert z_D-z_B\rvert\end{cases}}$
④ $ABCD$ معين. 	④ شعاعان متقابلان في نفس الإتجاه متساويان؛ وَضلعان متتابعان متقايسان. **نُثبت -مثلاً-** $\begin{cases}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \\ AB=AD\end{cases}$ **أي:** $\boxed{\begin{cases} z_B-z_A=z_C-z_D \\ \lvert z_B-z_A\rvert=\lvert z_D-z_A\rvert\end{cases}}$، (حيث $k\in\mathbb{Z}$)	④ القطران **متناصفان** وَ**متعامدان؛** **أي:** $\boxed{\begin{cases}\frac{z_A+z_C}{2}=\frac{z_B+z_D}{2} \\ \arg\left(\frac{z_D-z_B}{z_C-z_A}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi\end{cases}}$

6 توظيف الأعداد المركبة في التحويلات النقطية:

f تحويل نقطي يُرفق بكل نقطة $M(z)$، النقطة $M'(z')$؛ نكتب: $f: M(z) \to M'(z')$ أو $M' = f(M)$.

التحويل f	إنسحاب	تحاكي	دوران	تشابه مباشر
التعريف $M' = f(M)$	$\boxed{\overrightarrow{MM'} = \vec{u}}$	$\boxed{\overrightarrow{\Omega M'} = a\overrightarrow{\Omega M}}$	$\boxed{\begin{cases} \Omega M' = \Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}}$	$\boxed{\begin{cases} \Omega M' = k\Omega M \\ (\overrightarrow{\Omega M}; \overrightarrow{\Omega M'}) = \theta \end{cases}}$
العبارة المركبة للتحويل f	العبارة ❶ ☜ $z' = \boxed{a}z + b$			
إذا كان	$a = 1$	$a \in \mathbb{R}^* - \{1\}$	$a \in \mathbb{C}^*$ وَ $\|a\| = 1$	$a \in \mathbb{C}^*$ وَ $\|a\| \neq 1$
العناصر المميزة للتحويل f	① شعاعه $\vec{u}$ ذو اللاحقة $z_{\vec{u}} = b$.	① نسبته a، ②وَمركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	①زاويته $\theta = \arg(a)$، ② وَ مركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.	① نسبته $k = \|a\| > 0$، ② وَزاويته $\theta = \arg(a)$، ③ وَمركزه النقطة الصامدة $\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)$.
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ B' = f(B) \end{cases}$	**تعيين تحويل يُحوّل نقطتين:** بالتعويض: $\boxed{\begin{cases} z_{A'} = az_A + b & (1) \\ z_{B'} = az_B + b & (2) \end{cases}}$؛ وبالطرح: العبارة ❷ $\boxed{a = \frac{z_{B'} - z_{A'}}{z_B - z_A}}$، ويكون: العبارة ❸ $\boxed{z_{B'} - z_{A'} = a(z_B - z_A)}$.			
في حالة $\begin{cases} A' = f(A) \\ \Omega = f(\Omega) \end{cases}$	**تخص التحويلات ذوات المركز:** بالتعويض: $\boxed{\begin{cases} z_{A'} = az_A + b & (1) \\ z_\Omega = az_\Omega + b & (2) \end{cases}}$؛ وبالطرح: العبارة ❹ $\boxed{a = \frac{z_{B'} - z_\Omega}{z_B - z_\Omega}}$، ويكون: العبارة ❺ $\boxed{z_{B'} - z_\Omega = a(z_B - z_\Omega)}$.			
كتابات أخرى لـ a			$a = e^{i\theta}$ في إحدى العبارات **الخمس**	$a = ke^{i\theta}$ في إحدى العبارات **الخمس**
إستعمال العلاقات	تُعرف طبيعة التحويل f، وَ **عناصره المميزة** من العدد a. نقطة صورة أخرى بالتحويل f، عُد إلى العلاقات الخمس وخاصة ❷، ❸، ❹، وَ ❺.			

7 مجموعات النقط:

❶ المرجح ومجموعات النقط

تحويل العبارة الشعاعية (أو العددية)		
إذا كان	**فإن**	**ملاحظة**
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}}$	حيث G **مرجح الجملة** $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\}$
$\alpha + \beta + \gamma = 0$	$\boxed{\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \text{شعاع ثابت}}$	بإدخال إحدى النقط **المعلومة** وَاستعمال علاقة **' شال '**؛ نحصل على **شعاع ثابت** (مستقل عن M)
$\alpha + \beta + \gamma \neq 0$	$\boxed{\alpha MA^2 + \beta MB^2 + \gamma MC^2 = (\alpha + \beta + \gamma)MG^2 + \alpha GA^2 + \beta GB^2 + \gamma GC^2}$	حيث G **مرجح الجملة** $\{(A;\alpha), (B;\beta), (C;\gamma)\}$

تذكّر أنّ: $\boxed{\left\|(\alpha + \beta + \gamma)\overrightarrow{MG}\right\| = |\alpha + \beta + \gamma|\left\|\overrightarrow{MG}\right\| = |\alpha + \beta + \gamma|MG}$

❷ تعيين (Γ) مجموعة النقط $M(z)$ التي تُحقق شرط معين:

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\lvert z\rvert = k$	▪ دائرة مركزها O ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ النقطة O أي: $(\Gamma) = \{O\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\lvert z\rvert = k$ تُكافئ: $\boxed{OM = k}$
$\lvert z - z_A\rvert = k$	▪ دائرة مركزها A ونصف قطرها $r = k$، (في حالة $k > 0$) ▪ النقطة A أي: $(\Gamma) = \{A\}$، (في حالة $k = 0$) ▪ مجموعة خالية $\emptyset$ أي: $(\Gamma) = \emptyset$، (في حالة $k = 0$)	$\lvert z - z_A\rvert = k$ تُكافئ: $\boxed{AM = k}$
$\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$	▪ محور القطعة المستقيمة $[AB]$.	$\lvert z - z_A\rvert = \lvert z - z_B\rvert$ تُكافئ: $\boxed{AM = BM}$

عبارة من الشكل $z = z_\Omega + ke^{i\theta}$ (حيث $\theta \in \mathbb{R}$ وَ $k \in \mathbb{R}_+^*$)

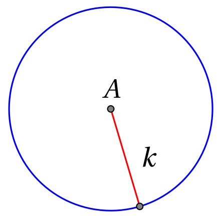
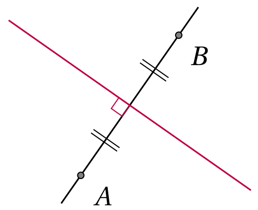
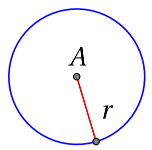
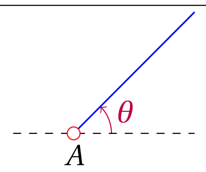
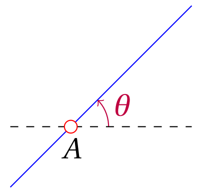
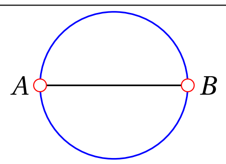
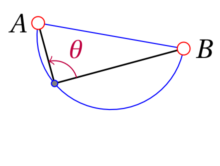
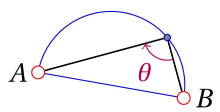
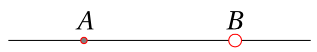
الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
θ متغيّر وَ k ثابت	▪ دائرة مركزها Ω ونصف قطرها $r = k$.	$\lvert z - z_\Omega\rvert = \lvert ke^{i\theta}\rvert$ تُكافئ: $\boxed{\Omega M = k}$
θ ثابت وَ k متغيّر	▪ نصف المستقيم $[\Omega B)$ بإستثناء Ω (لأنّ: $k > 0$)، (أي: $\boxed{(\Gamma) = [\Omega B) - \{\Omega\}}$) حيث $B \in (\Gamma)$	$\arg(z - z_\Omega) = \arg(ke^{i\theta})$ تُكافئ: $\boxed{(\vec{u}; \overrightarrow{\Omega M}) = \theta + 2k\pi}$

عبارة من الشكل $Z = \frac{z - z_B}{z - z_A}$: (مجموعات نقط تُستخدم فيها العُمدة)

الشرط	مجموعة النقط هي	التعليل
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف	▪ الدائرة ذات القطر $[AB]$، بإستثناء A.	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي: $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + k\pi}$ أو $\boxed{M = B}$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب	▪ نصف الدائرة الذي يشمل C، وَالذي طرفاه A وَ B؛ بإستثناء A. (حيث: $\boxed{C \in (\Gamma)}$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي موجب معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي: $\boxed{(\overrightarrow{AM}; \overrightarrow{BM}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi}$ أو $\boxed{M = B}$
$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب	▪ نصف الدائرة الذي يشمل D، وَالذي طرفاه A وَ B؛ بإستثناء A. (حيث: $\boxed{D \in (\Gamma)}$)	$\frac{z - z_B}{z - z_A}$ تخيلي صرف وَجزئه التخيلي سالب معناه: $\arg\left(\frac{z - z_B}{z - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ أو $\frac{z - z_B}{z - z_A} = 0$ أي:

		$\boxed{M = B}$ أو $\boxed{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ حقيقي	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** النقطة A. (أي: $\boxed{(\Gamma) = (\boldsymbol{AB}) - \{A\}}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = k\pi / k \in \mathbb{Z}}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ **حقيقي موجب** __تماما__	▪ **المستقيم** (AB)، **بإستثناء** القطعة المستقيمة $[AB]$. (أي: $\boxed{(\Gamma) = (\boldsymbol{AB}) - [\boldsymbol{AB}]}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_+^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = 2k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = 2k\pi / k \in \mathbb{Z}}$
$\frac{z-z_B}{z-z_A}$ **حقيقي سالب** __تماما__	▪ **القطعة المستقيمة** $[AB]$، **بإستثناء** النقطتين A وَ B. (أي: $\boxed{(\Gamma) = [\boldsymbol{AB}] - \{A;B\}}$)	$\frac{z-z_B}{z-z_A} \in \mathbb{R}_-^*$ **معناه:** $\arg\left(\frac{z-z_B}{z-z_A}\right) = \pi + 2k\pi$ **أي:** $\boxed{(\overrightarrow{AM};\overrightarrow{BM}) = \pi + 2k\pi}$

مجموعة النقط في الأعداد المركبة

العبارة المركبة	مجموعة النقط M ذات اللاحقة Z	التمثيل البياني
$\lvert z-z_A\rvert=k$	❀ $k<0$: مجموعة خالية. ❀ $k=0$: مجموعة النقط هي النقطة A . ❀ $k>0$: مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها k.	
$\lvert z-z_A\rvert=\lvert z-z_B\rvert$	مجموعة النقط هي محور القطعة المستقيمة $[AB]$	
$z-z_A=re^{i\theta}$ r ثابت موجب تماما و $\theta\in\mathbb{R}$	مجموعة النقط هي دائرة مركزها A ونصف قطرها r.	
$z-z_A=re^{i\theta}$ $\arg(z-z_A)=\theta+2k\pi$ θ ثابت و $r\in\mathbb{R}_+^*$	مجموعة النقط هي نصف مستقيم $[AM)$ باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$	
$\arg(z-z_A)=\theta+k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي المستقيم (AM) باستثناء النقطة A حيث $\left(\vec{i};\overrightarrow{AM}\right)=\theta$	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ تخيلي صرف , $k\in\mathbb{Z}$	مجموعة النقط هي الدائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B .	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ $k\in\mathbb{Z}$	نصف دائرة قطرها $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B بحيث $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي , $k\in\mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء النقطة B.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=\pi+2k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي سالب تماما , $k\in\mathbb{Z}$	القطعة المستقيمة $[AB]$ باستثناء النقطتين A و B.	
$\arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_B}\right)=2k\pi$ $\frac{z-z_A}{z-z_B}$ حقيقي موجب تماما $k\in\mathbb{Z}$	المستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$.