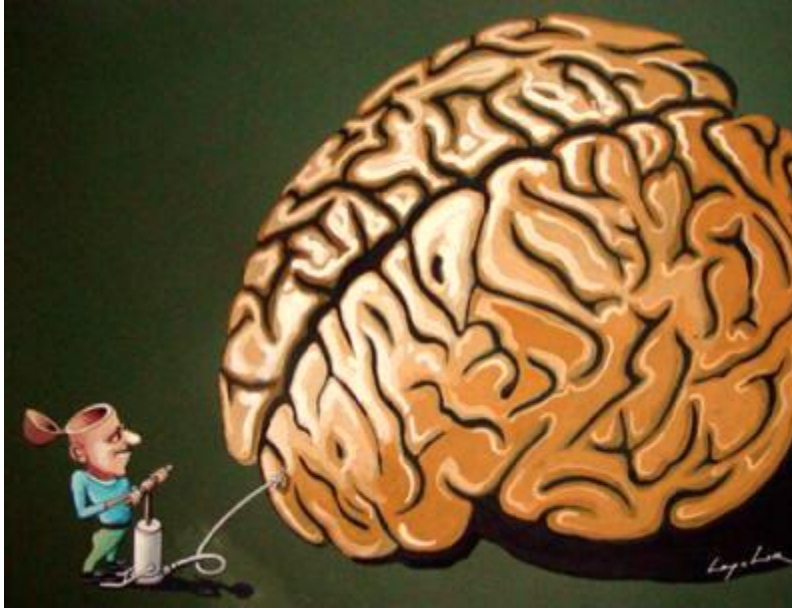


محور

# الدوال الأصلية وحساب التكامل

العقل هو ذلك الجزء الذي يميز الإنسان عن غيره من الكائنات، العقل من يستعمله بشكل صحيح يعيش في نعيم ومن يستعمله بشكل خاطئ يجعل حياته جحيما



S

## درس الدوال الأصلية

### 1. الدالة الأصلية لدالة على مجال

**تعريف:**  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$ . نقول عن الدالة  $F$  المعرفة على المجال  $I$  والقابلة للاشتقاق على  $I$  أنها دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $F'(x) = f(x)$ .

**مثال 01:**

- هي دالة أصلية للدالة  $f: x \mapsto 6x - 6$  على  $\mathbb{R}$  لأن  $F'(x) = f(x)$ .
- هي دالة أصلية للدالة  $f: x \mapsto \frac{-5x^2 + 5}{(x^2 + 1)^2}$  على  $\mathbb{R}$  لأن  $F'(x) = f(x)$ .

**تطبيق:**

$F$  و  $G$  دالتان معرفتان على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $F(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1}$  و  $G(x) = \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1}$

تحقق أن  $F$  و  $G$  أصليتان لنفس الدالة على  $\mathbb{R}$ .

**الحل:**

الطريقة الأولى: نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $F'(x) = G'(x)$ .

$$F'(x) = \frac{2(3x^2 + 2x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} \text{ و } G'(x) = \frac{2(3x^2 + 2x - 2)}{(x^2 + x + 1)^2} \text{، من أجل كل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

إذن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $F'(x) = G'(x)$ . الدالتان  $F$  و  $G$  هما إذن دالتان أصليتان لنفس الدالة.

الطريقة الثانية: نبين أنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ ،  $F(x) - G(x) = k$  حيث  $k$  عدد حقيقي.

$$F(x) - G(x) = \frac{5x^2 - x + 3}{x^2 + x + 1} - \frac{-6x - 2}{x^2 + x + 1} = \frac{5x^2 - x + 3 + 6x + 2}{x^2 + x + 1} = \frac{5x^2 + 5x + 5}{x^2 + x + 1} = \frac{5(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1} = 5$$

أي  $[F(x) - G(x)]' = 0$  ومنه  $F'(x) = G'(x)$  لأن مشتقة 5 تساوي صفر.

### 2. مجموعة الدوال الأصلية لدالة

إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  فإن  $f$  تقبل عدد لا نهائي من الدوال الأصلية على  $I$  من الشكل  $x \mapsto F(x) + k$  حيث  $k$  عدد حقيقي ثابت. دالتان أصليتان لنفس الدالة تختلفان بثابت فقط.

**مثال:**

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = 6x^2 + 10x - 8$ . كل الدوال  $F_1: x \mapsto 2x^3 + 5x^2 - 8x + 1$ ،

$F_2: x \mapsto 2x^3 + 5x^2 - 8x + 13$ ،  $F_3: x \mapsto 2x^3 + 5x^2 - 8x + \sqrt{7}$  هي دوال أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$ .

كل الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $F(x) = 2x^3 + 5x^2 - 8x + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي ثابت.

### 3. الدالة الأصلية التي تأخذ قيمة معلومة من أجل قيمة للمتغير

$f$  دالة مستمرة على مجال  $I$ .  $x_0$  عدد حقيقي من  $I$  و  $y_0$  عدد حقيقي كفي. توجد دالة أصلية وحيدة  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $I$  تحقق الشرط  $F(x_0) = y_0$ .

**مثال :**

لتكن  $f$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي :  $f(x) = 12x^2 - 2x + 3$

مجموعة الدوال الأصلية للدالة  $f$  هي الدوال  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + c$ . توجد دالة أصلية وحيدة تأخذ القيمة 7 من أجل  $x=1$  أي  $F(1) = 7$  أي  $4 - 1 + 3 + c = 7$  ومنه  $c = 1$  أي  $F(x) = 4x^3 - x^2 + 3x + 1$ .

#### 4. الدوال الأصلية لدوال مألوفة

الدوال الأصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  هي الدوال  $F$ . يمثل  $c$  عددا حقيقيا كفيا.

$I =$	$F(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	$F(x) = ax + c$	$f(x) = a$ (عدد حقيقي)
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + c$	$f(x) = x$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$f(x) = x^n$ ( $n \in \mathbb{N}^*$ )
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + c$	$f(x) = \frac{1}{x^2}$
$]0; +\infty[$ أو $]-\infty; 0[$	$F(x) = -\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$f(x) = \frac{1}{x^n}$ ( $n \in \mathbb{N}$ , $n \geq 2$ )
$]0; +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + c$	$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$
$\mathbb{R}$	$F(x) = -\cos x + c$	$f(x) = \sin x$
$\mathbb{R}$	$F(x) = \sin x + c$	$f(x) = \cos x$
$]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	$F(x) = \tan x + c$	$f(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$

**تطبيق :**

عين دالة أصلية على المجال  $I$  المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

(1)  $f(x) = 8x^3 - 4x + 7$  ،  $I = \mathbb{R}$  (2)  $g(x) = x^2 + \sin x - \frac{1}{x^2}$  ،  $I = ]0; +\infty[$  (3)  $h(x) = \frac{3}{x^4} + \frac{1}{\sqrt{x}} - \cos x$  ،  $I = ]0; +\infty[$

$I = ]0; +\infty[$

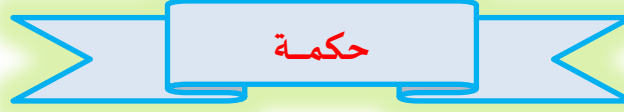
**الحل :**

(1)  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  معرفة بـ :  $F(x) = 8 \times \frac{1}{3+1} x^{3+1} - 4 \times \frac{1}{2} x^2 + 7x + c = 2x^4 - 2x^2 + 7x + c$  حيث  $c$

ثابت حقيقي.

(2)  $G$  دالة أصلية للدالة  $g$  على  $]0; +\infty[$  معرفة بـ:

$$G(x) = \frac{x^{2+1}}{2+1} + (-\cos x) - \left( -\frac{1}{(2-1)x^{2-1}} \right) + c = \frac{1}{3}x^3 - \cos x + \frac{1}{x} + c$$



من زاد في حبه لنفسه .. زاد كره الناس له

(3)  $H$  دالة أصلية للدالة  $h$  على  $]0; +\infty[$  معرفة بـ:

$$H(x) = 3 \left( -\frac{1}{(4-1)x^{4-1}} \right) + 2\sqrt{x} - (\sin x) + c = -\frac{1}{x^3} + 2\sqrt{x} - \sin x + c$$

5. الدوال الأصلية والعمليات على الدوال

$u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$ .

الدالة $f$	الشروط الخاصة بالدالة $u$	الدوال الأصلية للدالة $f$ على $I$
$f = u'u$		$F = \frac{1}{2}u^2 + c$
$(n \in \mathbb{N}^*) f = u'u^n$		$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$
$f = \frac{u'}{u^2}$	من أجل كل $x$ من $I$ : $u(x) \neq 0$	$F = -\frac{1}{u} + c$
$(n \geq 2, n \in \mathbb{N}) f = \frac{u'}{u^n}$	من أجل كل $x$ من $I$ : $u(x) \neq 0$	$F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	من أجل كل $x$ من $I$ : $u(x) > 0$	$F = 2\sqrt{u} + c$



**تطبيق 01:** عين دالة أصلية على المجال  $I$  المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$I = \mathbb{R} \text{ ، } g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad (2) \quad I = \mathbb{R} \text{ ، } f(x) = (3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2 \quad (1)$$

$$I = \mathbb{R} \text{ ، } h(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3} \quad (3)$$

**الحل:**

$$f(x) = (3x^2+2x)(x^3+x^2+7)^2 \quad (1) \quad \text{الدالة } f \text{ من الشكل } u'u^n \text{ حيث } u(x) = x^3+x^2+7 \text{ و } u'(x) = 3x^2+2x$$

و  $n=2$ .

دوالها الأصلية من الشكل  $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{1}{2+1}(x^3 + x^2 + 7)^{2+1} + c = \frac{1}{3}(x^3 + x^2 + 7)^3 + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

$$(2) \quad g(x) = \frac{2x}{(x^2+1)^2} \quad \text{الدالة } g \text{ من الشكل } \frac{u'}{u^2} \text{ حيث } u(x) = x^2+1 \text{ و } u'(x) = 2x.$$

دوالها الأصلية من الشكل  $-\frac{1}{u} + c$  أي  $G(x) = -\frac{1}{x^2+1} + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

$$(3) \quad h(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+11)^3} \quad \text{الدالة } h \text{ من الشكل } \frac{u'}{u^n} \text{ حيث } u(x) = x^2+x+11 \text{ و } u'(x) = 2x+1.$$

دوالها الأصلية من الشكل  $-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $H(x) = -\frac{1}{(3-1)(x^2+x+11)^{3-1}} + c = -\frac{1}{2(x^2+x+11)^2} + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

**تطبيق 02:** عين دالة أصلية على المجال  $I$  المعطى لكل دالة من الدوال التالية:

$$(1) \quad I = \mathbb{R}, f(x) = (x+1)(2x^2+4x+1)^2 \quad (2) \quad I = \mathbb{R}, g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2}$$

$$(3) \quad I = \mathbb{R}, h(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3} \quad (4) \quad I = \mathbb{R}, v(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$$

**طريقة:**

عما لا نستطيع تطبيق مباشرة القواعد السابقة لتعيين دالة أصلية على مجال  $I$  لدالة  $f$  يمكننا:

$$(1) \quad \text{ملاحظة إذا كانت } f \text{ تكتب على أحد الأشكال } u'u^n \text{ أو } \frac{u'}{u^n} \text{ أو } \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ مع تحديد عبارة } u(x).$$

$$(2) \quad \text{حساب } u'(x) \text{ ثم تعيين عددا حقيقيا } k \text{ (حسب كل حالة) بحيث } f = k \times u'u^n \text{ أو } f = k \times \frac{u'}{u^n} \text{ أو } f = k \times \frac{u'}{\sqrt{u}}.$$

(3) تطبيق قواعد الدوال الأصلية.

**الحل:**

$$(1) \quad f(x) = (x+1)(2x^2+4x+1)^2 \text{ تكافئ } f(x) = \frac{1}{4}(4x+4)(2x^2+4x+5)^2 \text{ وهي من الشكل } f = k \times u'u^n \text{ أي } f = k \times u'u^2$$

$$\text{حيث } f = \frac{1}{4} \times u'u^2 \text{ و } u(x) = 2x^2+4x+1 \text{ و } u'(x) = 4x+4.$$

دوالها الأصلية من الشكل  $\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$  وبالتالي فإن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$ .

$$F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} [u(x)]^3 = \frac{1}{12} (2x^2+4x+1)^3 + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$(2) \quad g(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{(x^2+1)^2} \text{ من الشكل } g = k \times \frac{u'}{u^2} \text{ أي } g = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^2} \text{ حيث } u(x) = x^2+1 \text{ و } u'(x) = 2x.$$

دوالها الأصلية من الشكل  $-\frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u}\right) + c$  أي  $G(x) = -\frac{1}{2x^2+2} + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

$$h(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3} = \frac{1}{2} \times \frac{6x+2}{(3x^2+2x+7)^3} \quad (3)$$

حيث  $h = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{u^n}$  أي  $h = k \times \frac{u'}{u^n}$  من الشكل الدالة  $h$  من الشكل  $h(x) = \frac{3x+1}{(3x^2+2x+7)^3}$  .  
 $u'(x) = 6x+2$  و  $u(x) = 3x^2+2x+7$

$$H(x) = -\frac{1}{4(3x^2+2x+7)^2} + c \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

دوالها الأصلية من الشكل  $\frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \right) + c$  أي  $\frac{1}{2} \times \left( -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} \right) + c$

$$v(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}} = 5 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \quad (4)$$

حيث  $v = k \times \frac{u'}{\sqrt{u}}$  أي  $v = 5 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  من الشكل  $v(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$  .  
 $u'(x) = 2x$  و  $u(x) = x^2+1$  حيث  $v = 5 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  أي  $v = 5 \times \frac{u'}{2\sqrt{u}}$  من الشكل  $v(x) = \frac{5x}{\sqrt{x^2+1}}$  .  
دوالها الأصلية من الشكل  $V(x) = 5 \times \sqrt{x^2+1} + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

### 6 الدوال الأصلية للدوال $e^{u(x)}$ $x \mapsto u'(x)$

$u$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  :

بما أن الدالة  $F: x \mapsto e^{u(x)}$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = u'(x)e^{u(x)}$  ،

فإن الدالة  $F: x \mapsto e^{u(x)}$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto u'(x)e^{u(x)}$  على  $I$  .

**تطبيق :** عين في كل حالة من الحالتين التاليتين دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  :

$$f(x) = 2xe^{x^2+3} \quad \text{على } I = \mathbb{R} \quad (1) \quad f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-5} \quad \text{على } I = \mathbb{R} \quad (2)$$

**الحل :**

$$f(x) = 2xe^{x^2+3} \quad \text{من الشكل } f(x) = u'(x)e^{u(x)} \quad \text{حيث } u(x) = x^2+3 \quad \text{و } u'(x) = 2x \quad \text{دوالها الأصلية من الشكل} \quad (1)$$

$$F: x \mapsto e^{u(x)} + c \quad \text{أي } F(x) = e^{x^2+3} + c \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$f(x) = (x+1)e^{x^2+2x-5} = \frac{1}{2}(2x+2)e^{x^2+2x-5} \quad \text{من الشكل } f(x) = \frac{1}{2}u'(x)e^{u(x)} \quad \text{حيث } u(x) = x^2+2x-5 \quad (2)$$

$$u'(x) = 2x+2 \quad \text{و } u(x) = x^2+2x-5 \quad \text{دوالها الأصلية من الشكل } F: x \mapsto \frac{1}{2}e^{u(x)} + c \quad \text{أي } F(x) = \frac{1}{2}e^{x^2+2x-5} + c \quad \text{حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

### 7 الدوال الأصلية للدوال من الشكل $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت  $u$  دالة قابلة للاشتقاق و موجبة تماما على مجال  $I$  فإن:

بما أن الدالة  $F: x \mapsto \ln[u(x)]$  قابلة للاشتقاق على  $I$  ولدينا من أجل كل  $x$  من  $I$  ،  $F'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$  ،

فإن الدالة  $F: x \mapsto \ln[u(x)]$  هي دالة أصلية للدالة  $x \mapsto \frac{u'(x)}{u(x)}$  على  $I$  .

**تطبيق :** عين في كل حالة من الحالات التالية دالة أصلية للدالة  $f$  على المجال  $I$  :

$$f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{على } I = ]-1; +\infty[ \quad (1) \quad f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \quad \text{على } I = ]2; +\infty[ \quad (2)$$

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{على } I = ]0; \pi[ \quad (3) \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1} \quad \text{على } I = ]1; +\infty[ \quad (4) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{على } I = \mathbb{R} \quad (5)$$

**الحل :**

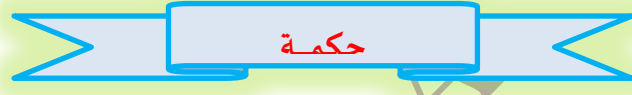
$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{x+1} \quad \text{من الشكل} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{ومنه دوالها الأصلية هي} \quad F(x) = \ln(x+1) + c \quad \text{حيث} \quad c \text{ ثابت حقيقي.} \quad ]-1; +\infty[$$

$$(2) \quad f(x) = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2} \quad \text{دوالها الأصلية هي} \quad F(x) = \ln(x-2) - \ln(x+2) = \ln \frac{x-2}{x+2} + c \quad \text{حيث} \quad c \text{ ثابت حقيقي.} \quad ]2; +\infty[$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad \text{من الشكل} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{ومنه دوالها الأصلية هي} \quad F(x) = \ln(\sin x) + c \quad \text{حيث} \quad c \text{ ثابت حقيقي.} \quad ]0; \pi[$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2-1} \quad \text{من الشكل} \quad f(x) = \frac{1}{2} \times \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{ومنه دوالها الأصلية هي} \quad F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2-1) + c \quad \text{حيث} \quad c \text{ ثابت حقيقي.} \quad ]1; +\infty[$$

$$(5) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad \text{من الشكل} \quad f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} \quad \text{ومنه دوالها الأصلية هي} \quad F(x) = \ln(e^x+1) + c \quad \text{حيث} \quad c \text{ ثابت حقيقي.} \quad \mathbb{R}$$



قال أحد الحكماء لابنه في موعظة : يا بني .. إذا أردت أن تصاحب رجلاً فأغضبه .. فإن أنصفك من نفسه فلا تدع صحبته .. وإلا فاحذره.

## المعادلات التفاضلية

### (1) المعادلات التفاضلية من الشكل $y' = f(x)$

**مبرهنة:** إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  وكانت  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  فإن حلول المعادلة التفاضلية  $y' = f(x)$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = F(x) + c$  حيث  $c$  عدد حقيقي ثابت.

- حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \frac{1}{(x+1)^2}$  في  $] -1; +\infty[$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = -\frac{1}{x+1} + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.
- حلول المعادلة التفاضلية  $y' = \ln x$  في  $] 0; +\infty[$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = x \ln x - x + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

### (2) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = f(x)$

**مبرهنة:** إذا كانت  $f$  دالة مستمرة على مجال  $I$  وإذا كانت  $F$  دالة أصلية لها على  $I$  وكانت  $G$  دالة أصلية للدالة  $F$  على  $I$  فإن حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = f(x)$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = G(x) + c_1 x + c_2$  مع  $c_1$  و  $c_2$  عددين حقيقيين ثابتين.

**مثال:**

- حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = \cos x$  في  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = -\cos x + c_1 x + c_2$  حيث  $c_1$  و  $c_2$  عددين حقيقيين ثابتين.

• حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = 4e^{2x}$  في  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = e^{2x} + c_1 x + c_2$  حيث  $c_1$  و  $c_2$  عددين حقيقيين ثابتان.

### (3) المعادلات التفاضلية من الشكل $y'' = -\omega^2 y$

**مبرهنة:** إذا كان  $\omega$  عددا حقيقيا غير معدوم فإن حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = -\omega^2 y$  هي الدوال  $y$  حيث:

$$y = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x \quad \text{حيث } c_1 \text{ و } c_2 \text{ عددين حقيقيين ثابتان.}$$

**مثال:**

• حلول المعادلة التفاضلية  $y'' = -4y$  في  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = c_1 \cos(2x) + c_2 \sin(2x)$  حيث  $c_1$  و  $c_2$  عددين حقيقيين ثابتان.

• حلول المعادلة التفاضلية  $y'' + 3y = 0$  في  $\mathbb{R}$  هي الدوال  $y$  حيث:  $y = c_1 \cos(\sqrt{3}x) + c_2 \sin(\sqrt{3}x)$  حيث  $c_1$  و  $c_2$  عددين حقيقيين ثابتان.



**تطبيق:**

بين أن الدالة  $f: x \mapsto Ae^{3x} + Be^{-3x}$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y'' - 9y = 0$

**الحل:**

من أجل كل عدد حقيقي  $x$ :  $f'(x) = 3Ae^{3x} - 3Be^{-3x}$  و  $f''(x) = 9Ae^{3x} + 9Be^{-3x} = 9f(x)$

ومنه  $f''(x) - 9f(x) = 0$  ومنه  $f$  هي حل للمعادلة التفاضلية  $y'' - 9y = 0$ .

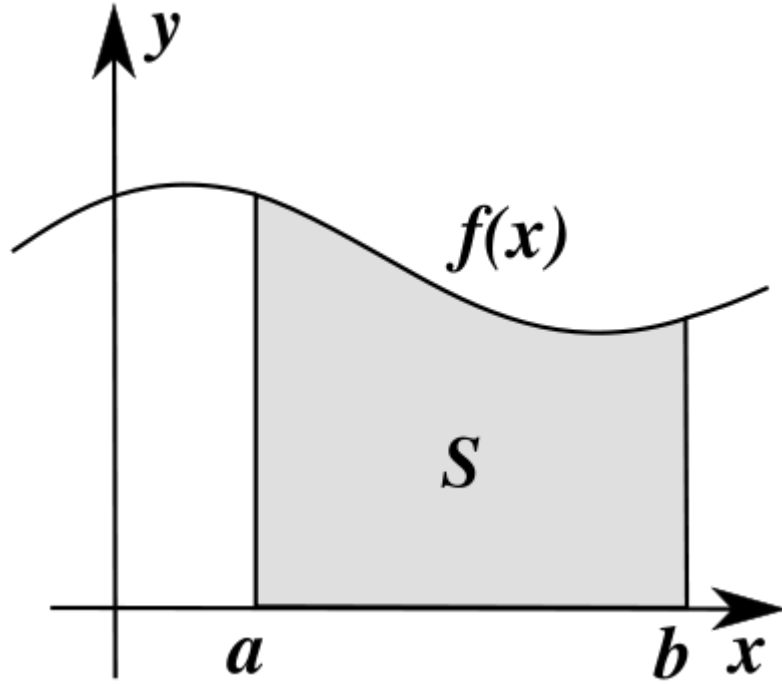


سئل الاسكندر: لِمَ تُكرم معلمك فوق كرامة أبيك فقال: إن أبي سبب حياتي الفانية ومعلمي سبب حياتي الباقية

A

S

## حساب التكامل

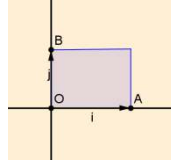


تعلمت أنه خير للإنسان أن يكون كالسلاحفة في الطريق الصحيح على أن يكون غزالاً في الطريق الخاطئ.  
تعلمت أن المتسلق الجيد يركز على هدفه ولا ينظر إلى الأسفل حيث المخاطر التي تشتت الذهن.  
تعلمت أن الذي ينجح في النهاية من لديه القدرة على التحمل والصبر.  
تعلمت أن من أكثر الأسلحة الفعالة التي يملكها الإنسان هي الوقت والصبر.  
تعلمت أنه عندما تضحك يضحك لك العالم وعندما تبكي تبكي وحدك.  
تعلمت أن الشجرة المثمرة هي من يهاجمها الناس.



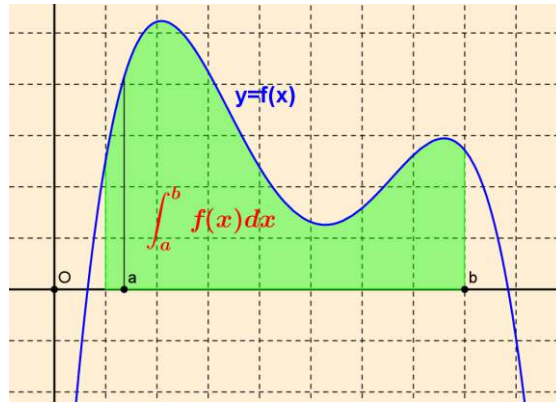
## درس : حساب التكامل

المستوي منسوب إلى معلم متعامد  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  ولتكن  $A$  و  $B$  نقطتان بحيث  $\vec{OB} = \vec{j}$  ,  $\vec{OA} = \vec{i}$  . وحدة المساحة هي مساحة المستطيل الذي ضلعاها  $[OA]$  و  $[OB]$  .



(1) إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة وموجبة على المجال  $[a, b]$  ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة  $f$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$  هي التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $f$  ونرمز لها

$$\int_a^b f(x) dx \text{ وحدة المساحة}$$

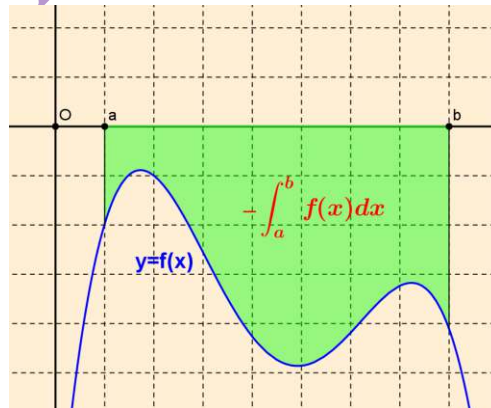


هذه المساحة هي مجموعة النقط  $(x, y)$  التي تحقق

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ 0 \leq y \leq f(x) \end{cases}$$

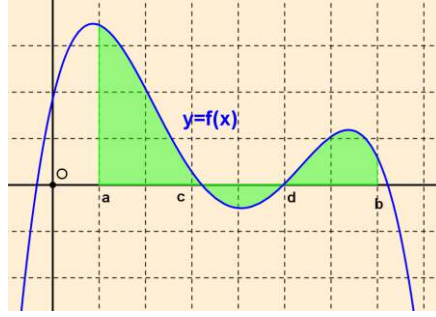
(2) إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة وسالبة على المجال  $[a, b]$  ، فإن مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة  $f$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$  هي التكامل من  $a$  إلى  $b$  للدالة  $f$  ونرمز لها

$$-\int_a^b f(x) dx \text{ وحدة المساحة.}$$



(3) إذا كانت الدالة  $f$  مستمرة وتغير إشارتها على المجال  $[a, b]$  . نجزم هذا المجال إلى مجالات جزئية تحافظ في كل منها الدالة  $f$  على إشارة ثابتة ونطبق القواعد السابقة . الجزء الملون هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بمحور الفواصل والمنحني الممثل للدالة  $f$  والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a$  و  $x = b$  .

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx - \int_c^d f(x) dx + \int_d^b f(x) dx$$

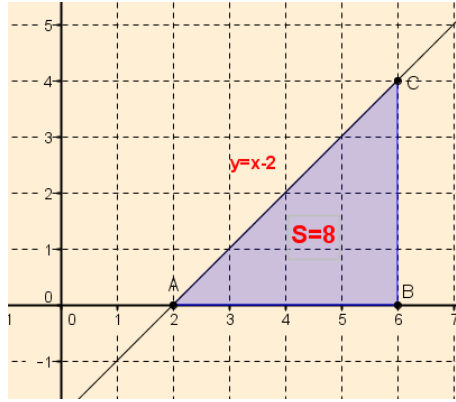


أمثلة :

(1) أحسب التكامل  $\int_2^6 (x-2) dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة  $f: x \mapsto x+2$  وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو مثلث  $ABC$

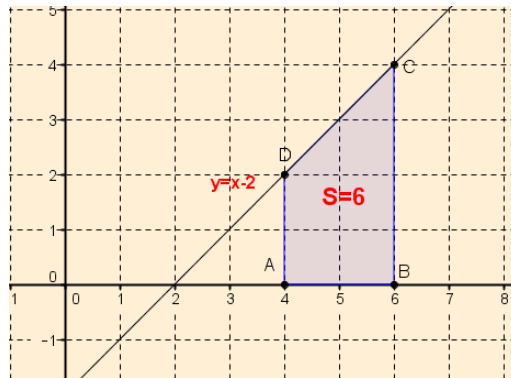
$$\int_2^6 (x-2) dx = S_{ABC} = \frac{1}{2} \times AB \times BC = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8$$



(2) أحسب التكامل  $\int_4^6 (x-2) dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة  $f: x \mapsto x+2$  وهي دالة تآلفية . الحيز في هذه الحالة هو شبه منحرف  $ABCD$

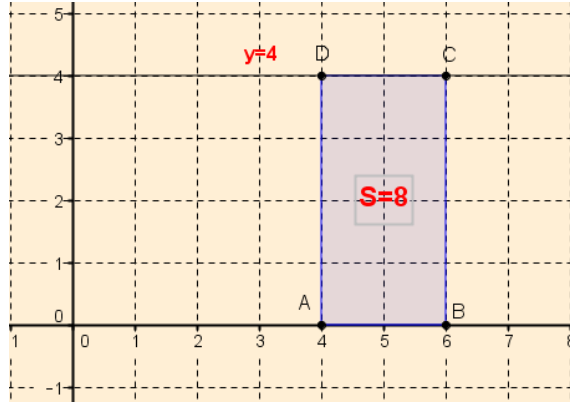
$$\int_4^6 (x-2) dx = S_{ABCD} = \frac{(AD+BC) \times AB}{2} = \frac{(2+4) \times 2}{2} = 6$$



(3) أحسب التكامل  $\int_4^6 4 dx$

أولا نرسم المنحني الممثل للدالة  $f: x \mapsto 4$  وهي دالة ثابتة ( $f(x)=4$ ) . الحيز في هذه الحالة هو مستطيل  $ABCD$

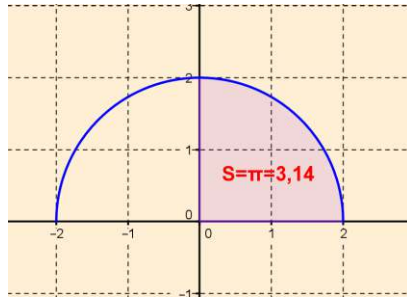
$$\int_4^6 4 dx = S_{ABCD} = AB \times AD = 2 \times 4 = 8$$



(4) بين أن مجموعة النقط  $M(x, y)$  التي معادلتها  $y = \sqrt{4-x^2}$  هي نصف دائرة ثم أحسب التكامل  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$

والمواقعة فوق محور الفواصل أي نصف دائرة.  $y = \sqrt{4-x^2}$  تكافئ  $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y \geq 0 \end{cases}$  تكافئ  $\begin{cases} y^2 = 4-x^2 \\ y \geq 0 \end{cases}$  وهي معادلة جزء من الدائرة التي مركزها  $O$  وطول نصف قطرها 2

التكامل  $\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx$  يمثل إذن مساحة ربع الدائرة التي مركزها  $O$  وطول نصف قطرها 2 .

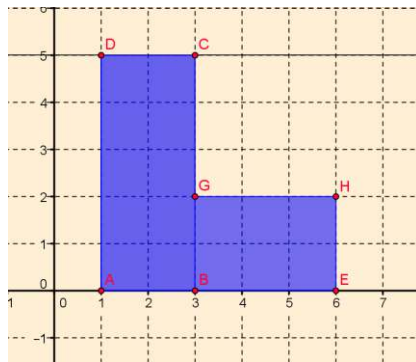


$$\int_0^2 \sqrt{4-x^2} dx = \frac{1}{4}(\pi \times r^2) = \frac{1}{4}(\pi \times 2^2) = \pi$$

(5) نستطيع في بعض الحالات حساب تكامل لدوال غير مستمرة مثلاً: ونحسب  $\int_1^6 f(x) dx$   $\begin{cases} f(x) = 5, & x < 3 \\ f(x) = 2, & x \geq 3 \end{cases}$

$\int_1^6 f(x) dx$  يمثل مساحة الشكل  $AEHGCD$  وهو مجموع مساحتي المستطيلين  $ABCD$  و  $BEHG$

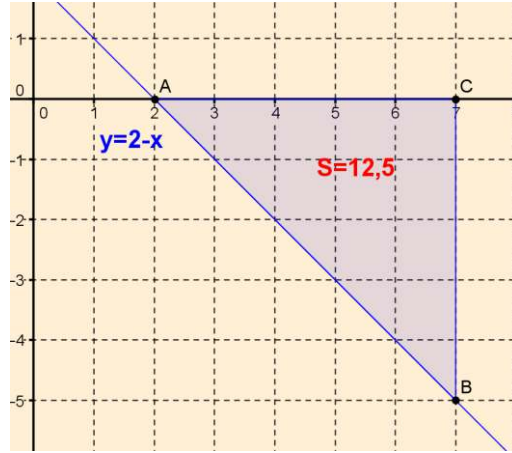
$$\int_1^6 f(x) dx = \int_1^3 f(x) dx + \int_3^6 f(x) dx = AB \times BC + BE \times EH = 2 \times 5 + 3 \times 2 = 16$$



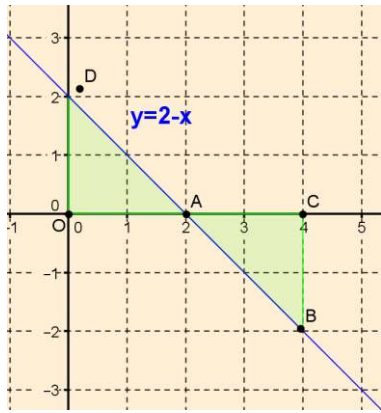
من ضيق حرتي ... ندم يوم حساده

(6) أحسب التكامل  $\int_2^7 (2-x) dx$

$$-\int_2^7 (2-x) dx = 12,5 \text{ هي } ABC \text{ المثلث } \int_2^7 (2-x) dx = -\frac{1}{2} \times 5 \times 5 = -\frac{25}{2} = -12,5$$



(7) أحسب  $\int_0^4 (2-x) dx$



$$\int_0^4 (2-x) dx = S_{OAD} + (-S_{ABC}) = \frac{1}{2}(2)(2) - \frac{1}{2}(2)(2) = 0$$

### الدالة الأصلية و مساحة حيز

$f$  دالة مستمرة و موجبة على مجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان من  $I$  حيث  $a \leq b$ .  $(C_f)$  منحنى  $f$  في معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  و  $F$  دالة أصلية لـ  $f$  على  $I$ . مساحة الحيز تحت المنحنى  $(C_f)$  بين العددين  $a$  و  $b$  هو العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$ .

### تعريف التكامل

$f$  دالة مستمرة على مجال  $I$ .  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيان من  $I$ .  
يسمى العدد الحقيقي  $F(b) - F(a)$ ، حيث  $F$  دالة أصلية للدالة  $f$  على  $I$ ، التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f$  ونرمز إليه بالرمز  $\int_a^b f(x) dx$ . نقرأ: "التكامل من  $a$  إلى  $b$  لـ  $f(x)$  تفاضل  $x$ ".

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال : نحاول حساب التكاملات السابقة باستعمال الدوال الأصلية :

$$\int_0^7 (2-x) dx \quad (4) \quad \int_4^6 4 dx \quad (3) \quad \int_4^6 (x-2) dx \quad (2) \quad \int_2^6 (x-2) dx \quad (1)$$

$$\int_2^6 (x-2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_2^6 = \left( \frac{36}{2} - 12 \right) - \left( \frac{4}{2} - 4 \right) = 8 \quad (1)$$

$$\int_4^6 (x-2) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2x \right]_4^6 = \left( \frac{36}{2} - 12 \right) - \left( \frac{16}{2} - 8 \right) = 6 \quad (2)$$

$$\int_4^6 4 dx = [4x]_4^6 = (24) - (16) = 8 \quad (3)$$

$$\int_2^7 (2-x) dx = \left[ 2x - \frac{x^2}{2} \right]_2^7 = \left( 14 - \frac{49}{2} \right) - \left( 4 - \frac{4}{2} \right) = -\frac{25}{2} \quad (4)$$

تطبيق :

أحسب التكاملات التالية:

$$\int_{-1}^0 (2x-3)(x^2-3x+1) dx \quad (5), \quad \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx \quad (4), \quad \int_0^2 2xe^{x^2} dx \quad (3), \quad \int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx \quad (2), \quad \int_1^3 (3x^2-4x+1) dx \quad (1)$$

الحل :

$$\int_1^3 (3x^2-4x+1) dx = \left[ 3 \frac{x^3}{3} - 4 \frac{x^2}{2} + x \right]_1^3 = [x^3 - 2x^2 + x]_1^3 \quad (1)$$

$$= (27 - 18 + 3) - (1 - 2 + 1) = 12$$

$$\int_0^2 \frac{2x}{x^2+1} dx = [\ln(x^2+1)]_0^2 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5 \quad (2)$$

$$\int_0^2 2xe^{x^2} dx = [e^{x^2}]_0^2 = e^4 - e^0 = e^4 - 1 \quad (3)$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = [\sin x]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \sin \frac{\pi}{2} - \sin -\frac{\pi}{2} = \sin \frac{\pi}{2} + \sin \frac{\pi}{2} = 2 \quad (4)$$

$$\int_{-1}^0 (2x-3)(x^2-3x+1)^3 dx = \left[ \frac{1}{4}(x^2-3x+1)^4 \right]_{-1}^0 = \frac{1}{4} - \frac{625}{4} = \frac{-624}{4} = -156 \quad (5)$$

خواص التكامل

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على المجال  $I$ .  $a$  ،  $b$  عددان حقيقيين من  $I$ .

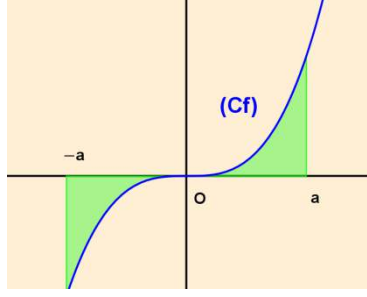
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad (3) \text{ علاقة شال} , \quad \int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx \quad (2) , \quad \int_a^a f(x) dx = 0 \quad (1)$$

$c \in I$

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx \quad (5), \quad k \in \mathbb{R} \text{ حيث } \int_a^b kf(x) dx = k \int_a^b f(x) dx \quad (4)$$

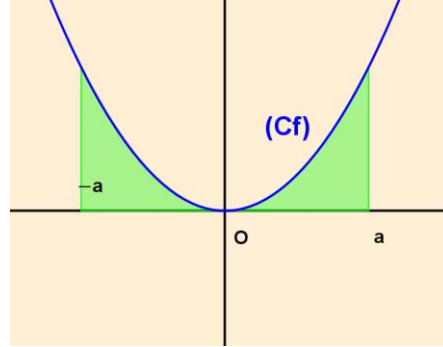
تكامل الدالة الفردية :

إذا كانت الدالة  $f$  فردية ومستمرة على مجال  $I$  مركزه  $O$  فإنه من أجل كل  $a$  من  $I$ :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$



### تكامل الدالة الزوجية:

إذا كانت الدالة  $f$  زوجية ومستمرة على مجال  $I$  مركزه  $O$  فإنه من أجل كل  $a$  من  $I$  :  $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$



### التكامل والمقارنة

$f$  و  $g$  دالتان مستمرتان على مجال  $[a; b]$ .

(1) إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f(x) \geq 0$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \geq 0$

(2) إذا كان من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $f(x) \leq g(x)$  فإن  $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

**مثال :** نعلم أنه من أجل كل عدد حقيقي  $t$  من  $[0, x]$  :  $e^t \geq 1$ .

بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من  $[0, +\infty[$  فإن  $e^x \geq x+1$ .

**الحل :**



بما أن  $e^t \geq 1$  فإن  $\int_0^x e^t dt \geq \int_0^x 1 dt$  وبالتالي  $[e^t]_0^x \geq [t]_0^x$  أي  $e^x - e^0 \geq x - 0$  ومنه  $e^x \geq x+1$

### القيمة المتوسطة لدالة على مجال

$f$  دالة مستمرة على مجال  $[a; b]$ .

القيمة المتوسطة للدالة  $f$  على المجال  $[a; b]$  هي العدد الحقيقي  $m$  حيث :  $m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ .

**مثال :** عين القيمة المتوسطة للدالة الأسية  $(x \mapsto e^x)$  على المجال  $[0, 3]$

**الحل :**

نعلم ان الدالة الأصلية للدالة  $f : x \mapsto e^x$  هي الدوال  $F : x \mapsto e^x + c$  حيث  $c$  ثابت حقيقي.

$$m = \frac{1}{3-0} \int_0^3 e^x dx = \frac{1}{3} [e^x]_0^3 = \frac{e^3 - e^0}{3} = \frac{e^3 - 1}{3}$$

### حصص القيمة المتوسطة

$f$  دالة مستمرة على مجال  $[a; b]$ .

إذا وجد عدنان حقيقيان  $m$  و  $M$  بحيث من أجل كل  $x$  من  $[a; b]$ ،  $m \leq f(x) \leq M$ ، فإن:

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

**مثال:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $f(x) = 1 + \ln(x+1)$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0; e-1]$ .

(2) استنتج حصصاً لـ  $f(x)$ .

(3) استنتج حصصاً للعدد الحقيقي  $I = \int_1^{e-1} f(x) dx$

**الحل:**

(1) لدينا من أجل كل  $x$  من  $]-1; +\infty[$ ،  $f'(x) = \frac{1}{x+1}$  أي  $f'(x) > 0$  ومنه  $f$  متزايدة تماماً على  $]-1; +\infty[$  وبالتالي هي كذلك متزايدة تماماً على المجال  $[0; e-1]$ .

(2) بما أن الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; e-1]$  نستنتج أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; e-1]$ ،  $f(0) \leq f(x) \leq f(e-1)$  أي  $1 \leq f(x) \leq 2$ .

(3) بتطبيق حصص القيمة المتوسطة نجد  $(e-2) \leq \int_1^{e-1} f(x) dx \leq 2(e-2)$ .

### المكاملة بالتجزئة

$u$  و  $v$  دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال  $I$  و  $u'$  و  $v'$  مشتقاتهما على الترتيب مستمرتان على  $I$ . من أجل كل عددين حقيقيين  $a$  و  $b$  من  $I$  لدينا:

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx$$

**مثال:**

باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب:  $A = \int_0^1 xe^{2x} dx$  و  $B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$

**الحل:**

(1) حساب  $A = \int_0^1 xe^{2x} dx$  نضع  $u(x) = x$ ،  $v'(x) = e^{2x}$  ومنه  $u'(x) = 1$ ،  $v(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$

بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة نكتب:  $A = \int_0^1 xe^{2x} dx = \int_0^1 u(x)v'(x) dx = \left[ x \left( \frac{1}{2}e^{2x} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 (1) \left( \frac{1}{2}e^{2x} \right) dx$

$$.A = \frac{e^2 + 1}{4} \text{ إذن } .A = \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{1}{4} e^{2x} \right]_0^1 = \frac{e^2}{2} - \left[ \frac{1}{4} e^2 - \frac{1}{4} e^0 \right] = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4} \text{ ومنه}$$

$$(2) \text{ حساب } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx \text{ نضع } u(x) = x, v'(x) = \cos x, \text{ ومنه } u'(x) = 1, v(x) = \sin x$$

$$B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x)v'(x) dx = \left[ x(\sin x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1)(\sin x) dx$$

$$\text{ ومنه } B = \frac{\pi}{2} - 1 \text{ إذن } .B = \frac{\pi}{2} - \left[ -\cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{2} - \left[ -\cos \frac{\pi}{2} + \cos 0 \right] = \frac{\pi}{2} - 1$$

## حساب الحجم

### حساب حجم بعض المجسمات البسيطة

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  محاوره  $(x'x), (y'y), (z'z)$ .

وحدة الحجم  $(uv)$  هي حجم متوازي المستطيلات المنشأ على  $(O; I, J, K)$ .

المجسم  $\Sigma$  محدد بمستويين  $(P_1), (P_2)$

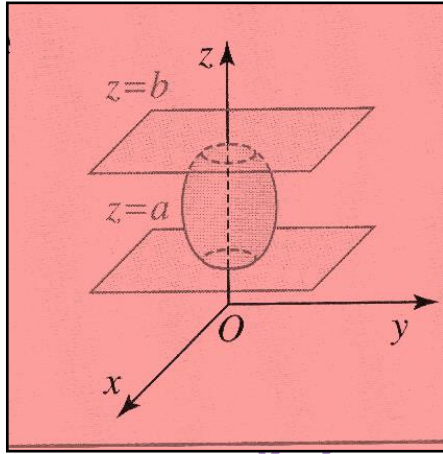
نعتبر في الفضاء  $\Sigma$  مجسماً محددًا بمستويين موازيين

للمستوي  $(xOy)$  معادلتاهما:  $z = a$  و  $z = b$ .

نسبي  $V$  حجم المجسم و  $S(z)$  مساحة مقطع المجسم بمستوي

موازي للمستوي  $(xOy)$  راقمه  $z$  حيث  $a \leq z \leq b$ .

$$.V = \int_a^b S(z) dz \text{ فإن}$$



### حجم مجسم دوراني محوره $(x'x)$

الفضاء منسوب إلى معلم متعامد  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . نعتبر الجزء من المستوي  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  المحدد بالمنحنى الذي معادلته  $y = f(x)$

والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = a, x = b$  والمحور  $(O, \vec{i})$ .

عندما يدور هذا الجزء من المستوي يولد مجسماً دورانياً محددًا بالمستويين الموازيين  $(O, \vec{j}, \vec{k})$  راقمهما على الترتيب  $a$  و  $b$ .

$$.V = \int_a^b S(x) dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \text{ هو وحدة الحجم}$$

**مثال:** أحسب  $V$  حجم المجسم الدوراني المولد بالدوران حول المحور  $(x'x)$  للحيز المحدد بمنحنى الدالة  $f: x \mapsto x^2$

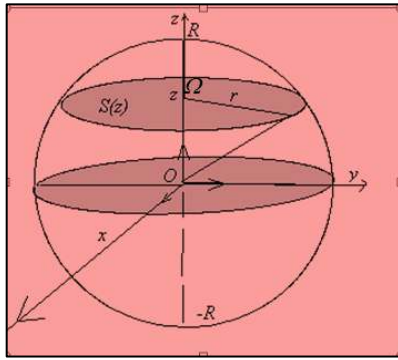
وبالمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x = 0$  و  $x = 1$ .

$$.V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^4) dx = \pi \left[ \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{5} \text{ الحل:}$$

أمثلة متنوعة

$$(1) \text{ برهن أن حجم كرة طول نصف قطرها } R \text{ هو: } V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

الحل :



نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

الكرة التي مركزها  $O$  وطول نصف قطرها  $R$ .

مقطع هذه الكرة بمستو مواز للمستوي  $(xOy)$  وراقمه  $z$  حيث  $-R < z < R$

هي دائرة مركزها  $\Omega(0; 0; z)$  وطول نصف قطرها  $r = \Omega M$  مع  $OM = R$ .

لدينا في المثلث القائم  $O\Omega M$ :  $r^2 + z^2 = R^2$  ومنه  $r^2 = R^2 - z^2$ .

إذن مساحة القرص الذي مركزه  $\Omega$  وطول نصف قطره  $R$  هي:  $S(z) = \pi(R^2 - z^2)$

ونحسب الحجم كما يلي:  $V = \int_{-R}^R S(z) dz = \int_{-R}^R \pi(R^2 - z^2) dz$  وبالتالي:

$$V = \pi \left[ R^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{-R}^R = \pi \left[ \left( R^3 - \frac{1}{3} R^3 \right) - \left( -R^3 + \frac{1}{3} R^3 \right) \right]$$

وحدة الحجم  $V = \frac{4}{3} \pi R^3$  ومنه

(2) برهن أن حجم المخروط الدوراني الذي رأسه  $O$  وارتفاعه  $h$  وطول نصف قطره  $R$  هو  $V = \frac{1}{3} \pi R^2 h$

الحل :

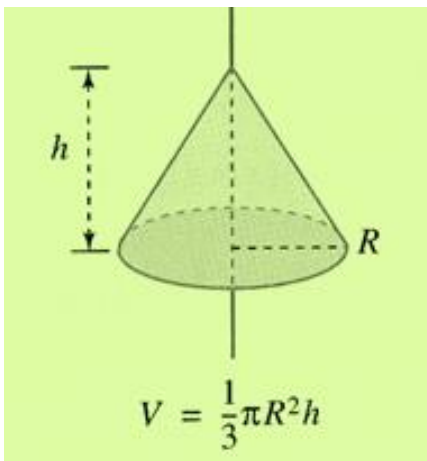
ليكن  $r$  طول نصف قطر القرص

لدينا حسب مبرهنة طاليس  $\frac{r}{R} = \frac{z}{h}$  ومنه  $r = \frac{Rz}{h}$

ومنه مساحة القرص بدلالة  $z$  هي  $S(z) = \pi \times r^2 = \pi \left( \frac{Rz}{h} \right)^2 = \pi \frac{R^2}{h^2} z^2$

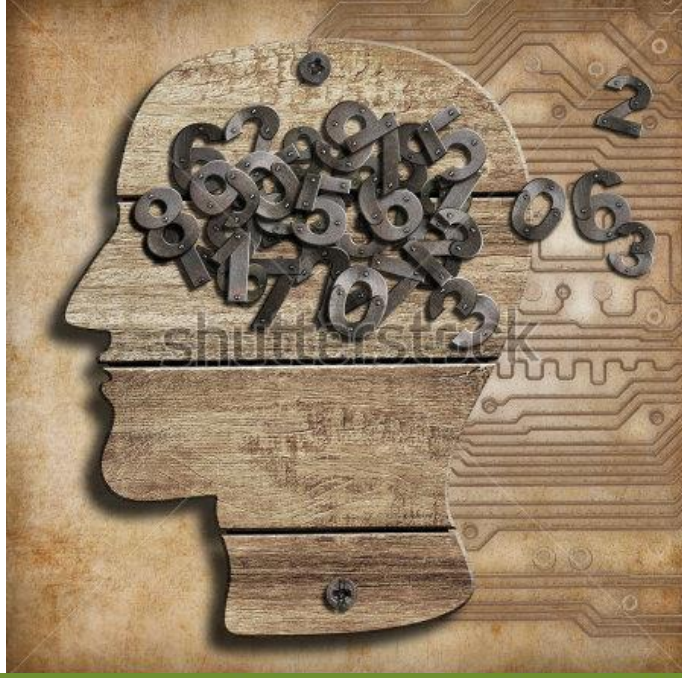
ويكون حجم المخروط

$$V = \int_0^h S(z) dz = \int_0^h \left( \pi \frac{R^2}{h^2} \right) z^2 dz = \left( \pi \frac{R^2}{h^2} \right) \left[ \frac{z^3}{3} \right]_0^h = \left( \pi \frac{R^2}{h^2} \right) \left[ \frac{h^3}{3} - \frac{0}{3} \right] = \frac{1}{3} \pi R^2 h$$



S

## تمارين محلولة للتدريب



### أصعب 8 أشياء في الحياة :

- 1- إن تتعود على شخص وفجأة يغيب
- 2- إن لا تجد من يفهمك أو يحس بك
- 3- أن تحب إنسان ومُسْتَحِيل أن تراه
- 4- أن يموت بعينك إنسان وهو حي
- 5- أن تحب شخص و أنت بحياته ليس لك مكان
- 6- أن يكذب أحدهم وأنت تعلم ولكن تصدقه لأنك تحبه
- 7- أن تبتسم ودموعك على وشك الإتهيار
- 8- أن يجبرك الزمن على شيء أنت لا تريده



## تمارين محلولة حول الدوال الأصلية والتكامل

**التمرين رقم 01 :** أحسب  $F$  الدوال الأصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  للدوال التالية:

(1)  $f(x) = -10x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 4x + 17$  على المجال  $\mathbb{R}$  (2)  $f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{3}$  على المجال  $\mathbb{R}$

(3)  $f(x) = -2\cos x - 4\sin x + 3$  على المجال  $\mathbb{R}$  (4)  $f(x) = 3 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}$  على المجال  $]0, +\infty[$

(5)  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 3$  على المجال  $]0, +\infty[$

**التمرين رقم 02 :** الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $u'u^n$ : أحسب الدوال الأصلية على المجال  $I$  لكل من :

(1)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$  (2)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = -3(-3x + 1)^4$

(3)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = x^2(x^3 - 2)^2$  (4)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{(2x + 3)^3}{7}$

(5)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = e^x(e^x - 2)^3$  (6)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x} + 2)^3$

(7)  $I = ]0; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{1}{x}(\ln x)^2$  (8)  $I = ]1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{3}{x-1}[\ln(x-1)]^2$

(9)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = -2\cos x \sin^2 x$

**التمرين رقم 03 :** الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $\frac{u'}{u^n}$ : أحسب الدوال الأصلية على المجال  $I$  لكل من :

(2)  $I = ]-\frac{1}{2}; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{7}{(2x+1)^3}$

(1)  $I = ]-1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$

(4)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$

(3)  $I = ]1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2}$

(5)  $I = ]0; \pi[$  ،  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$

S

**التمرين رقم 04 :** الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ : أحسب الدوال الأصلية على المجال  $I$  لكل من :

(2)  $I = ]-\infty; 2[$  ،  $f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$

(1)  $I = ]2; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

(4)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x + 1}}$

(3)  $I = \mathbb{R}$  ،  $f(x) = \frac{2e^x}{3\sqrt{e^x + 1}}$

(5)  $I = ]1; +\infty[$  ،  $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}$

**التمرين رقم 05 :** الدوال الأصلية للدوال من الشكل  $\frac{u'}{u}$ : أحسب الدوال الأصلية على المجال  $I$  لكل من :

$$I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{x}{x^2+3} \quad (2) \quad I = ]2; +\infty[ \quad ; \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \quad (1)$$

$$I = ]0; \pi[ \quad ; \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \quad (4) \quad I = \mathbb{R} \quad ; \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x+1} \quad (3)$$

**التمرين رقم 06 :** أحسب الدوال الأصلية لكل من الدوال التالية على المجال المعطى  $I$ :

$$. I = ]0; +\infty[ \quad \text{مع} \quad f(x) = 2x^3 - 4x + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} \quad (1)$$

$$. I = \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad f(x) = (2x+1)^4 \quad (2)$$

$$. I = ]0; +\infty[ \quad \text{مع} \quad f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2} \quad (3)$$

$$. I = \mathbb{R} \quad \text{مع} \quad f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3} \quad (4)$$

**التمرين رقم 07 :**

$$. f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + x - 3}{(x+1)^2} \quad \text{ب:} \quad ]0; +\infty[ \quad \text{تكن} \quad f \quad \text{الدالة المعرفة على}$$

(1) عيّن الأعداد الحقيقية  $a$  ،  $b$  و  $c$  بحيث من أجل كل عدد حقيقي  $x$  من المجال  $]0; +\infty[$ :

$$. f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2}$$

(2) استنتج الدالة الأصلية  $F$  للدالة  $f$  على المجال  $]0; +\infty[$ .

$$B = \int_{-2}^0 \frac{x-1}{x^2-2x+5} dx \quad , \quad A = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad \text{أحسب} \quad \text{التمرين رقم 08} :$$

**التمرين رقم 09 :**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x)$  ونعرف التكامل التالي:  $I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx$

(1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي  $x$  ،  $f(x) > 0$  ، واستنتج إشارة  $I$ .

$$. \frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x} \quad \text{بحيث} \quad a \quad \text{و} \quad b \quad \text{عين العددين الحقيقيين}$$

$$(3) \quad \text{أحسب} \quad A = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx \quad \text{ثم} \quad B = \int_0^{\ln 2} f'(x) dx$$

(4) أحسب  $f(x) + f'(x)$  ثم استنتج قيمة التكامل  $I$ .

**التمرين رقم 10 :**

$$(1) \quad \text{أوجد العددين الحقيقيين} \quad a \quad \text{و} \quad b \quad \text{بحيث من أجل كل عدد حقيقي} \quad x \quad \text{غير معدوم فإن} \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1}$$

$$(2) \text{ باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب } \int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2 + 1)^2} dx$$

**التمرين رقم 11 :**

$$\text{أحسب } \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx$$

**التمرين رقم 12:**

نعتبر الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = x^2 e^{2x}$

(1) عين العددين الحقيقيين  $a$  و  $b$  حتى تكون الدالة  $F$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$  أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$

$$(2) \text{ أحسب } \int_0^1 f(x) dx$$

**التمرين رقم 13 :**

$$(1) \text{ احسب التكامل } I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$(2) \text{ ليكن } I_2 = \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx \text{ احسب } I_1 + I_2 \text{ ثم استنتج قيمة } I_2 .$$

**التمرين رقم 14 :**

$$\text{نضع } A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x dx \text{ و } B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x dx .$$

$$(1) \text{ أحسب } A + B .$$

$$(2) \text{ أحسب باستعمال المكاملة بالتجزئة } A - B .$$

$$(3) \text{ استنتج من (1) و (2) قيمة كلا من } A \text{ و } B .$$

**التمرين رقم 15 :**

$$\text{باستعمال المكاملة بالتجزئة أحسب : } A = \int_0^{\pi} x \sin x dx , B = \int_1^e \ln t dt , C = \int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x} dx .$$



## حلول اللمارلن اللمرلبله



قمة الصبر أن تسكت وفي قلبك جرح يتكلم وقمة القوة أن تبتسم وفي عينك ألف دمعَة!!!!!!

## حلول تطبيقات الدوال الأصلية والتكامل

حل التمرين رقم 01 :

(1) الدالة  $f(x) = -10x^4 + 8x^3 + 3x^2 - 4x + 17$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  أي

$$F(x) = -10 \frac{x^5}{5} + 8 \left( \frac{x^4}{4} \right) + 3 \left( \frac{x^3}{3} \right) - 4 \left( \frac{x^2}{2} \right) + 17x + c = -2x^5 + 2x^4 + x^3 - 2x^2 + 17x + c$$

حقيقي ثابت.

(2) الدالة  $f(x) = \frac{4x^3 + 2x^2 - 5}{3} = \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{5}{3}$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  أي

$$F(x) = \frac{4}{3} \left( \frac{x^4}{4} \right) + \frac{2}{3} \left( \frac{x^3}{3} \right) - \frac{5}{3}x + c = \frac{1}{3}x^4 + \frac{2}{9}x^3 - \frac{5}{3}x + c$$

(3) الدالة  $f(x) = -2\cos x - 4\sin x + 3$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  أي

$$F(x) = -2(\sin x) - 4(-\cos x) + 3x + c = -2\sin x + 4\cos x + 3x + c$$

(4) الدالة  $f(x) = 3 - \frac{1}{x^3} + \frac{5}{x^4}$  معرفة ومستمرة على  $]0, +\infty[$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $]0, +\infty[$  أي

$$F(x) = 3x - \left( \frac{-1}{2x^2} \right) + 5 \left( \frac{-1}{3x^3} \right) + c = 3x + \frac{1}{2x^2} - \frac{5}{3x^3} + c$$

(5) الدالة  $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - 2x + 3$  معرفة ومستمرة على  $]0, +\infty[$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $]0, +\infty[$  أي

$$F(x) = \sqrt{x} - x^2 + 3x + c$$

حل التمرين رقم 02 :

(1) الدالة  $f(x) = 2x(x^2 - 1)^3$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من

$$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \text{ أي } F(x) = \frac{1}{4} (x^2 - 1)^4 + c \text{ مع } c \text{ عدد حقيقي ثابت.}$$

(2) الدالة  $f(x) = -3(-3x+1)^4$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من

$$F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c \text{ أي } F(x) = \frac{1}{5} (-3x+1)^5 + c \text{ مع } c \text{ عدد حقيقي ثابت.}$$

حكمة

خيانة الوطن

مثل الذي خان وطنه و باع بلاده مثل الذي يسرق من مال أبيه ليطعم اللصوص ، فلا أبوه يسامحه ولا اللص

يكافئه

(3)  $f(x) = x^2(x^3 - 2)^2 = \frac{1}{3} \times 3x^2(x^3 - 2)^2$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = \frac{1}{3}u'u^n$  فهي تقبل دوالاً

أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من الشكل  $F = \frac{1}{3} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} (x^3 - 2)^3 + c = \frac{1}{9} (x^3 - 2)^3 + c$  مع عدد حقيقي

ثابت.

(4)  $f(x) = \frac{(2x+3)^3}{7} = \frac{1}{7} (2x+3)^3 = \frac{1}{14} \times 2(2x+3)^3$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = \frac{1}{14}u'u^n$  فهي تقبل دوالاً

أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من الشكل  $F = \frac{1}{14} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{1}{14} \cdot \frac{1}{4} (2x+3)^4 + c = \frac{1}{56} (2x+3)^4 + c$  مع

عدد حقيقي ثابت.

(5)  $f(x) = e^x(e^x - 2)^3$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من

الشكل  $F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{1}{4} (e^x - 2)^4 + c$  مع عدد حقيقي ثابت.

(6)  $f(x) = e^{-2x}(e^{-2x} + 2)^3$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = -\frac{1}{2}u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على

$\mathbb{R}$  من الشكل  $F = -\frac{1}{2} \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = -\frac{1}{8} (e^{-2x} + 2)^4 + c$  مع عدد حقيقي ثابت.

(7)  $f(x) = \frac{1}{x} (\ln x)^2$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]0, +\infty[$  وهي من الشكل  $f = u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على

$]0, +\infty[$  من الشكل  $F = \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{1}{3} (\ln x)^3 + c$  مع عدد حقيقي ثابت.

(8)  $f(x) = \frac{3}{x-1} [\ln(x-1)]^2 = 3 \times \frac{1}{x-1} [\ln(x-1)]^2$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]1, +\infty[$  وهي من الشكل  $f = 3u'u^n$

فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $]1, +\infty[$  من الشكل  $F = 3 \times \frac{1}{n+1} u^{n+1} + c$  أي

مع عدد حقيقي ثابت.  $F(x) = 3 \times \frac{1}{3} [\ln(\ln x - 1)]^3 + c = [\ln(\ln x - 1)]^3 + c$

(9)  $f(x) = -2\cos x \sin^2 x = -2(\cos x)(\sin x)^2$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = -2u'u^n$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من الشكل  $F = -2\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$  أي  $F(x) = \frac{-2}{3}(\sin x)^3 + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

### حل التمرين رقم 03 :

(1)  $f(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]-1; +\infty[$  وهي من الشكل  $f = \frac{u'}{u^n}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على

$]-1; +\infty[$  من الشكل  $F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $F(x) = \frac{-1}{2(x+1)^2} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

(2)  $f(x) = \frac{7}{(2x+1)^3} = \frac{7}{2} \times \frac{2}{(2x+1)^3}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  وهي من الشكل  $f = \frac{7}{2} \times \frac{u'}{u^n}$  فهي تقبل

دوالاً أصلية  $F$  على  $]-\frac{1}{2}; +\infty[$  من الشكل  $F = -\frac{7}{2} \times \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $F(x) = \frac{-7}{4(2x+1)^2} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي

ثابت.

(3)  $f(x) = \frac{1}{x(\ln x)^2} = \frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]1; +\infty[$  وهي من الشكل  $f = \frac{u'}{u^n}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$

على  $]1; +\infty[$  من الشكل  $F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $F(x) = \frac{-1}{\ln x} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

(4)  $f(x) = \frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  وهي من الشكل  $f = 2 \times \frac{u'}{u^n}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $\mathbb{R}$  من

الشكل  $F = 2 \times \frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $F(x) = \frac{-2}{(1+e^x)} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

(5)  $f(x) = \frac{\cos x}{\sin^3 x}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]0; \pi[$  وهي من الشكل  $f = \frac{u'}{u^n}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على  $]0; \pi[$

من الشكل  $F = -\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$  أي  $F(x) = \frac{-1}{2(\sin x)^2} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

### حل التمرين رقم 04 :

(1)  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}}$  الدالة  $f$  معرفة ومستمرة على  $]2; +\infty[$  وهي من الشكل  $f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$  فهي تقبل دوالاً أصلية  $F$  على

$]2; +\infty[$  من الشكل  $F = 2\sqrt{u} + c$  أي  $F(x) = 2\sqrt{x-2} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

$$(2) \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{1}{2} \times \frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } ]-\infty; 2[ \text{ وهي من الشكل } f = \frac{1}{2} \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ فهي تقبل}$$

دوالاً أصلية  $F$  على  $]-\infty; 2[$  من الشكل  $F = \frac{1}{2}(2\sqrt{u}) + c$  أي  $F(x) = \sqrt{x^2-2x} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

$$(3) \quad f(x) = \frac{2e^x}{3\sqrt{e^x+1}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R} \text{ وهي من الشكل } f = \frac{2}{3} \times \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على } \mathbb{R} \text{ من}$$

الشكل  $F = \frac{2}{3}(2\sqrt{u}) + c$  أي  $F(x) = \frac{4}{3}\sqrt{e^x+1} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.



**أضمن طريقة لتدمير الرجل الذي لا يعرف إدارة ماله هي أن تعطيه المزيد من المال**

$$(4) \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x+1}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R} \text{ وهي من الشكل } f = \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على } \mathbb{R} \text{ من}$$

الشكل  $F = 2\sqrt{u} + c$  أي  $F(x) = 2\sqrt{\sin x+1} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

$$(5) \quad f(x) = \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} = \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\ln x}} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } ]1; +\infty[ \text{ وهي من الشكل } f = \frac{u'}{\sqrt{u}} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على}$$

$]1; +\infty[$  من الشكل  $F = 2\sqrt{u} + c$  أي  $F(x) = 2\sqrt{\ln x} + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

**حل التمرين رقم 05 :**

$$(1) \quad f(x) = \frac{1}{x-2} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } ]2; +\infty[ \text{ وهي من الشكل } f = \frac{u'}{u} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على}$$

$]2; +\infty[$  من الشكل  $F = \ln u + c$ . وعلى المجال  $]2; +\infty[$  يكون  $x-2 > 0$  إذن  $F(x) = \ln(x-2) + c$  مع  $c$  عدد

حقيقي ثابت.

$$(2) \quad f(x) = \frac{x}{x^2+3} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{x^2+3} \quad \text{الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R} \text{ وهي من الشكل } f = \frac{1}{2} \cdot \frac{u'}{u} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F$$

على  $\mathbb{R}$  من الشكل  $F = \ln u + c$  إذن  $F(x) = \frac{1}{2} \ln(x^2+3) + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

$$(3) \quad f(x) = \frac{e^x}{e^x + 1} \text{ الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } \mathbb{R} \text{ وهي من الشكل } f = \frac{u'}{u} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على } \mathbb{R} \text{ من}$$

الشكل  $F = \ln u + c$  إذن  $F(x) = \ln(e^x + 1) + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

$$(4) \quad f(x) = \frac{\cos x}{\sin x} \text{ الدالة } f \text{ معرفة ومستمرة على } ]0; \pi[ \text{ وهي من الشكل } f = \frac{u'}{u} \text{ فهي تقبل دوالاً أصلية } F \text{ على } \mathbb{R} \text{ من}$$

الشكل  $F = \ln u + c$  ولدينا  $\sin x > 0$  على  $]0; \pi[$  إذن  $F(x) = \ln(\sin x) + c$  مع  $c$  عدد حقيقي ثابت.

حل التمرين رقم 06 :

$$(1) \quad f(x) = 2x^3 - 4x + \frac{2}{x^2} - \frac{5}{x^3} = 2x^3 - 4x + 2\left(\frac{1}{x^2}\right) - 5\left(\frac{1}{x^3}\right) \text{ حيث دوالها الأصلية } F$$

$$F(x) = 2\frac{x^4}{4} - 4\frac{x^2}{2} + 2\left(-\frac{1}{x}\right) - 5\left(-\frac{1}{2x^2}\right) + c = \frac{x^4}{2} - 2x^2 - \frac{2}{x} + \frac{5}{2x^2} + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$(2) \quad f(x) = (2x+1)^4 = \frac{1}{2}(2)(2x+1)^4 \text{ من الشكل } \frac{1}{2}u'u^n \text{ دوالها الأصلية } F \text{ حيث}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{5}(2x+1)^5\right] + c = \frac{1}{10}(2x+1)^5 + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2} = \frac{1}{3} \times \frac{3}{(3x+2)^2} \text{ من الشكل } \frac{1}{3} \times \frac{u'}{u^2} \text{ دوالها الأصلية } F \text{ حيث}$$

$$F(x) = \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{(2-1)(3x+2)^{2-1}}\right] + c = -\frac{1}{3(3x+2)} + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

$$(4) \quad f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+2)^3} \text{ من الشكل } \frac{u'}{u^3} \text{ دوالها الأصلية } F \text{ حيث}$$

$$F(x) = \left[-\frac{1}{(3-1)(x^2+x+2)^{3-1}}\right] + c = -\frac{1}{2(x^2+x+2)^2} + c \text{ حيث } c \text{ ثابت حقيقي.}$$

حل التمرين رقم 07 :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x+1)^2} = \frac{(ax+b)(x+1)^2 + c}{(x+1)^2} \quad (1)$$

$$f(x) = x - \frac{3}{(x+1)^2}$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} - 3 \left[ \frac{-1}{(2-1)(x+1)^{2-1}} \right] + k = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x+1} + k \quad (2)$$

حل التمرين رقم 08 :

$$A = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx \quad (1)$$

الدالة  $f: x \mapsto \frac{\ln x}{x}$  معرفة ومستمرة على  $[1, e^2]$  فهي تقبل إذن دوالا أصلية على هذا المجال .

$$A = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \int_1^{e^2} \left( \frac{1}{x} \right) (\ln x) dx$$

الدالة  $f = u'u$  من الشكل  $f = u'u$  حيث  $u(x) = \ln x$  و  $u'(x) = \frac{1}{x}$

$$A = \int_1^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \left[ \frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^{e^2} = \frac{1}{2} (\ln e^2)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 = 2$$

$$B = \int_{-2}^0 \frac{x-1}{x^2-2x+5} dx$$

الدالة  $f: x \mapsto \frac{x-1}{x^2-2x+5}$  معرفة ومستمرة على  $\mathbb{R}$  فهي تقبل إذن دوالا أصلية على  $\mathbb{R}$ .

$$B = \int_{-2}^0 \frac{x-1}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx$$

من الشكل من الشكل  $\frac{1}{2} \times \frac{u'}{u}$  حيث  $u(x) = x^2 - 2x + 5$  وهي موجبة تماما

$$u'(x) = 2x - 2 \quad (\Delta < 0)$$

$$B = \int_{-2}^0 \frac{x-1}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} \int_{-2}^0 \frac{2x-2}{x^2-2x+5} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2-2x+5)]_{-2}^0 = \frac{1}{2} [\ln 5 - \ln 13] = \frac{1}{2} \ln \frac{5}{13}$$

حل التمرين رقم 09 :

(1) من أجل كل عدد حقيقي  $x$  لدينا  $e^x > 0$  ومنه  $e^x + 1 > 1$  وبالتالي  $\ln(e^x + 1) > 0$  وكذلك من أجل كل عدد حقيقي

$x$ ،  $e^{-x} > 0$  ومنه  $e^{-x} \ln(1+e^x) > 0$  أي  $f(x) > 0$ . وبما أن  $0 < \ln 2$  فحسب الخاصية :

$$\int_0^{\ln 2} f(x) dx > 0 \quad \text{نستنتج أن} \quad \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad \text{فإن} \quad a \leq b \quad \text{و} \quad f(x) \geq 0$$

$$\frac{e^x}{1+e^x} = 1 - \frac{1}{1+e^x} \quad \text{إذن} \quad b = -1 \quad \text{أي} \quad a + b = 0 \quad \text{و} \quad a = 1 \quad \text{وبالمطابقة نجد} \quad \frac{e^x}{1+e^x} = a + \frac{b}{1+e^x} = \frac{ae^x + a + b}{1+e^x} \quad (2)$$

$$A = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \int_0^{\ln 2} \left( 1 - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = [x - \ln(1+e^x)]_0^{\ln 2} = \ln 2 - \ln(1+e^{\ln 2}) - 0 + \ln(1+e^0) \quad (3)$$

$$\text{أي } A = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \ln 2 - \ln(1+e^{\ln 2}) - 0 + \ln(1+e^0) = \ln 2 - \ln 3 + \ln 2 = 2\ln 2 - \ln 3 = \ln \frac{4}{3}$$

$$A = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx = \ln \frac{4}{3}$$

$$\text{إذن } B = \int_0^{\ln 2} f'(x) dx = [f(x)]_0^{\ln 2} = f(\ln 2) - f(0) = e^{-\ln 2} \ln(1+e^{\ln 2}) - \ln 2 = \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2$$

$$B = \int_0^{\ln 2} f'(x) dx = \frac{1}{2} \ln 3 - \ln 2$$

$$\text{إذن } f'(x) = -e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{e^x}{1+e^x} \times e^{-x} = \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x) \text{ ومنه } f(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) \text{ لدينا (4)}$$

$$f(x) + f'(x) = e^{-x} \ln(1+e^x) + \frac{1}{1+e^x} - e^{-x} \ln(1+e^x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$\text{بما أن } f(x) = \frac{1}{1+e^x} - f'(x) \text{ فإن } f(x) + f'(x) = \frac{1}{1+e^x}$$

$$I = \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3} \text{ وأخيرا } \int_0^{\ln 2} f(x) dx = \int_0^{\ln 2} \frac{1}{1+e^x} dx - \int_0^{\ln 2} f'(x) dx = A - B = \ln \frac{4}{3} - \frac{1}{2} \ln 3 + \ln 2 = \frac{3}{2} \ln \frac{4}{3}$$

حل التمرين رقم 10 :

$$(1) \text{ من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ غير معدوم فإن } \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx}{x^2+1} = \frac{a(x^2+1)+bx^2}{x(x^2+1)} = \frac{(a+b)x^2+a}{x(x^2+1)}$$

$$\cdot \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \text{ ومنه } a=1 \text{ و } a+b=0 \text{ أي } b=-1$$

$$(2) \text{ حساب } \int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx \text{ : نضع } u(x) = \ln x \text{ ، } v'(x) = \frac{x}{(x^2+1)^2} \text{ ، ومنه } u'(x) = \frac{1}{x} \text{ ، } v(x) = -\frac{1}{2(x^2+1)}$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : } \int_a^b u(x)v'(x) dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) dx \text{ : نكتب :}$$

$$\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \left[ (\ln x) \left( \frac{-1}{2(x^2+1)} \right) \right]_1^2 - \int_1^2 \left( \frac{-1}{2(x^2+1)} \right) \left( \frac{1}{x} \right) dx = \left[ \frac{-\ln 2}{10} \right] + \frac{1}{2} \int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx$$

$$\int_1^2 \frac{1}{x(x^2+1)} dx = \int_1^2 \left( \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2+1} \right) dx = \left[ \ln x - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) \right]_1^2 = \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 + \frac{1}{2} \ln 2 = \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 \text{ ولكن}$$

$$\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \left[ \frac{-\ln 2}{10} \right] + \frac{1}{2} \left[ \frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5 \right] = \frac{-\ln 2}{10} + \frac{3 \ln 2}{4} - \frac{\ln 5}{4} = \frac{13 \ln 2}{20} - \frac{\ln 5}{4} \text{ ومنه}$$

$$\int_1^2 \frac{x \ln x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{13 \ln 2}{20} - \frac{\ln 5}{4} \text{ وأخيرا}$$

حل التمرين رقم 11 :

الدالة  $f: x \mapsto \tan x$  معرفة ومستمرة على المجال  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$  فهي تقبل على هذا المجال دوالا أصلية .

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{-\sin x}{\cos x} dx$$

وهذه الدالة  $f$  من الشكل  $-\frac{u'}{u}$  حيث  $u(x) = \cos x$  وهي موجبة تماما على

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = - \left[ \ln(\cos x) \right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} = - \left[ \ln \frac{1}{2} - \ln \frac{\sqrt{2}}{2} \right] = - \left[ \ln \frac{1}{\sqrt{2}} \right] = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2$$

إذن  $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{3}\right]$  المجال

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan x dx = \frac{1}{2} \ln 2$$

وأخيرا :

حل التمرين رقم 12:

(1) أصلية للدالة  $f$  على  $\mathbb{R}$  معناه  $F'(x) = f(x)$  أي

$$F'(x) = (2ax + b)e^{2x} + 2e^{2x}(ax^2 + bx + c) = [2ax^2 + (2a + 2b)x + b + 2c]e^{2x}$$

$$F(x) = \left( \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \right) e^{2x}$$

ومنه  $\left\{ \begin{array}{l} a = \frac{1}{2} \\ b = -\frac{1}{2} \\ c = \frac{1}{4} \end{array} \right.$  تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} 2a = 1 \\ 2a + 2b = 0 \\ b + 2c = 0 \end{array} \right.$  تكافئ  $F'(x) = f(x)$

(2) حساب  $\int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = \frac{1}{4}e^2 - \frac{1}{4}e^0 = \frac{e^2 - 1}{4}$  :  $\int_0^1 f(x) dx$

حل التمرين رقم 13 :

$$I_1 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left[ \ln(1+x^2) \right]_0^1 = \frac{1}{2} \ln 2$$

وأخيرا  $I_1 = \frac{1}{2} \ln 2$

$$I_1 + I_2 = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2} dx + \int_0^1 \frac{x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x+x^3}{1+x^2} dx = \int_0^1 \frac{x(1+x^2)}{1+x^2} dx = \int_0^1 x dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

إذن  $I_1 + I_2 = \frac{1}{2}$

نستنتج أن  $I_2 = \frac{1}{2} - I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ln 2$

حكمة

كن في الدنيا كالنحلة إن أكلت أكلت طيبا وإن أظعمت أظعمت طيبا وإن سقطت على شيء لم تكسره ولم تخذشه.

حل التمرين رقم 14 :

$$\text{إذن } A + B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x + \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \, dx = \left[ \frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi^2}{8} \quad (1)$$

$$A + B = \frac{\pi^2}{8}$$

$$A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos^2 x \, dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x (\cos^2 x - \sin^2 x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx \quad (2)$$

$$v(x) = \frac{1}{2} \sin 2x, \quad u'(x) = 1 \quad \text{ومنه} \quad v'(x) = \cos 2x, \quad u(x) = x \quad \text{نضع}$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : } \int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx \quad \text{نكتب :}$$

$$A - B = -\frac{1}{2} \quad \text{إذن} \quad A - B = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos 2x \, dx = \left[ (x) \left( \frac{1}{2} \sin 2x \right) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2} \sin 2x \, dx = \left[ \frac{1}{4} \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\cdot B = \frac{\pi^2}{16} + \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad A = \frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{4} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} A + B = \frac{\pi^2}{8} \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad (3) \quad \text{لدينا}$$

حل التمرين رقم 15 :

$$(1) \text{ حساب } A = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx \quad \text{نضع} \quad v(x) = -\cos x, \quad u'(x) = 1 \quad \text{ومنه} \quad v'(x) = \sin x, \quad u(x) = x$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : } \int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx \quad \text{نكتب :}$$

$$A = \pi \quad \text{إذن} \quad A = \int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [(x)(-\cos x)]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} -\cos x \, dx = [\pi] + [\sin x]_0^{\pi} = \pi$$

$$(2) \text{ حساب } B = \int_1^e \ln t \, dt \quad \text{نضع} \quad v(t) = t, \quad u'(t) = \frac{1}{t} \quad \text{ومنه} \quad v'(t) = 1, \quad u(t) = \ln t$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : } \int_a^b u(t)v'(t) \, dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t) \, dt \quad \text{نكتب :}$$

$$B = 1 \quad \text{إذن} \quad B = \int_1^e \ln t \, dt = [(t)(\ln t)]_1^e - \int_1^e \frac{1}{t} \times t \, dt = [e \ln e - 1 \ln 1] - [e - 1] = 1$$

$$(1) \text{ حساب } C = \int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x} \, dx$$

$$\text{نضع} \quad v(x) = -e^{-x}, \quad u'(x) = 2 \quad \text{ومنه} \quad v'(x) = e^{-x}, \quad u(x) = 2x+1$$

$$\text{بتطبيق مبدأ المكاملة بالتجزئة : } \int_a^b u(x)v'(x) \, dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x) \, dx \quad \text{نكتب :}$$

$$C = e - 3 \quad \text{إذن} \quad C = \int_{-1}^0 (2x+1)e^{-x} \, dx = [(2x+1)(-e^{-x})]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -2e^{-x} \, dx = [-1 - e] - [2e^{-x}]_{-1}^0 = e - 3$$

استعد للبيكالوريا

تمارين نموذجية



الهدف من هذا التمرين هو حساب التكاملات التالية :

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx \quad , \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \quad , \quad I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

أولاً : حساب  $I$  :

$f(x) = \ln x + \sqrt{x^2 + 2}$  : كما يلي  $[0, 1]$  المعرفة على

(1) أحسب الدالة المشتقة للدالة  $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2}$ .

(2) استنتج الدالة المشتقة  $f'$  للدالة  $f$ .

(3) أحسب قيمة  $I$ .

ثانياً: حساب  $J$  و  $K$

(1) بدون حساب  $J$  و  $K$  بين أن  $J + 2I = K$ .

(2) باستعمال المكاملة بالتجزئة على  $K$ ، بين أن  $K = \sqrt{3} - J$ .

(3) استنتج قيمة كلا من  $J$  و  $K$ .

التمرين رقم 02:

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 1$  كما يلي:

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x} dx \quad \text{حيث } \ln \text{ هو اللوغاريتم النيبري.}$$

1. أحسب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

2. بين أن المتتالية  $(u_n)$  هي متتالية حسابية يطلب تعيين الحد الأول والأساس.

3.  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  حيث  $n \geq 1$  كما يلي:  $v_n = e^{u_n}$  بين أن  $(v_n)$  هي متتالية هندسية

يطلب تعيين الحد الأول والأساس.

4. أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ .

5. أحسب بدلالة  $n$  الجداء  $P_n = v_1 \times v_2 \times v_3 \times \dots \times v_n$ .

التمرين رقم 03:

الأسئلة الثلاثة مستقلة فيما بينها .

$$(1) \text{ نعتبر التكامل } I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx$$

$$(أ) \text{ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } [0, 1] : \frac{x^2}{x^2+2} = x - 2 + \frac{4}{x+2}$$

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لـ  $I$  .

$$(2) \text{ نعتبر التكاملين : } K = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx \text{ و } J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx$$

$$(أ) \text{ أحسب } K - 3J \text{ و } K + J$$

(ب) استنتج القيمة المضبوطة لكل من  $K$  و  $J$  .

$$(3) \text{ لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } [-1, 1] \text{ كما يلي : } f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$(C_f) \text{ هو التمثيل البياني للدالة } f \text{ في معلم متعامد متجانس } (O, \vec{i}, \vec{j})$$

(أ) تحقق من أن  $(C_f)$  هو نصف دائرة مركزها  $O$  وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوي الذي تراتيب نقطه موجبة .

$$(ب) \text{ استنتج أن } \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

**التمرين رقم 04:**

$$1. \text{ من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم نضع. } u_n = \int_0^1 x^n e^{-x} dx$$

$$\text{بين أن } u_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

2. باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن :

$$\text{من أجل كل عدد طبيعي } n \text{ غير معدوم : } u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}$$

3. أحسب  $u_2$  بدلالة  $e$  .

$$4. \text{ بين أن } u_3 = 6 - \frac{16}{e}$$

$$\text{تحقق أن } \int_0^1 2x^3 - 8x^2 + 4x e^{-x} dx = 0$$

لا تكن كلمة الجبل... ترى الناس صغاراً ويراهم الناس صغيراً.

نعتبر المتتالية  $(I_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم كما يلي :  $I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2} dx$ .

(1) أ) لتكن  $g$  الدالة المعرفة بـ  $g(x) = xe^{x^2}$ . بين أن الدالة  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $G(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$  هي دالة أصلية على  $\mathbb{R}$  للدالة  $g$ .

(ب) استنتج قيمة  $I_1$ .

(2) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم لدينا :  $I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$ .

(3) استنتج  $I_3$  و  $I_5$ .

نريد حصرا للتكامل  $I = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx$ .

(1) أدرس تغيرات الدالتين  $u$  و  $v$  المعرفتين على  $[0; 1]$  كما يلي :

$$u(x) = x - 1 + e^{-x} \quad \text{و} \quad v(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x}$$

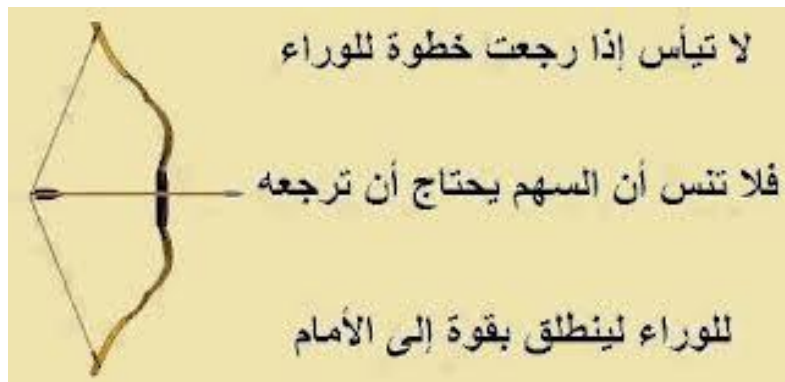
(2) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  :  $1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$  .....(1)

(3) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  :  $1 - x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1 - x + \frac{x^4}{2(1+x)}$  .....(2)

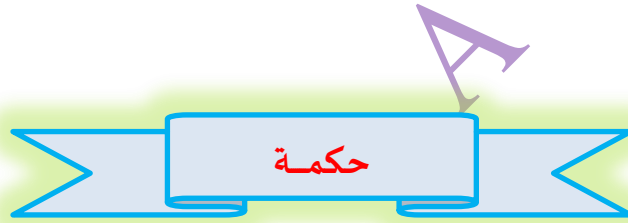
(4) تحقق أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  :  $\frac{x^4}{1+x} = x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$

(5) استنتج من العلاقة (2) أن  $\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} \ln 2$ .

S



## حلول استعد للبيكالوريا



- قال أحمد شوقي : وإذا أصيب القوم في أخلاقهم ... فأقم عليهم مأتما وعويلا



كُنْ مِثْلَ الْقَمَرِ...  
يَرْفَعُ النَّاسُ رُؤُوسَهُمْ  
لِيَرُوهَ... وَلَيْسَ مِثْلَهُ...  
الدُّخَانُ يَرْتَفِعُ لِيَرَاهُ  
النَّاسُ...

أولاً:

$$(1) \text{ نضع } u(x) = \sqrt{x^2 + 2} \text{ ، } u \text{ قابلة للإشتقاق على } [0, 1] \text{ و } u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

$$f'(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \quad (2)$$

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \int_0^1 f'(x) dx = f(1) - f(0) = \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2} \quad (3)$$

ثانياً:  $[f(x)]_0^1$

$$J + 2I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx + 2 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2}} = \int_0^1 \frac{x^2 + 2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx = K \quad (1)$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx \quad (2) \text{ نستعمل المكاملة بالتجزئة}$$

$$u'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}} ; u(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

$$v'(x) = 1 ; v(x) = x$$

$$K = \int_0^1 \sqrt{x^2 + 2} dx = \left[ x \sqrt{x^2 + 2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx = \sqrt{3} - J$$

$$\text{إذن } K = \sqrt{3} - J$$

(4) استنتاج قيمة كلا من  $J$  و  $K$ .

$$\begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - I \\ K = \frac{\sqrt{3}}{2} + I \end{cases} \text{ التي تكافئ } \begin{cases} J + 2I = K \\ K = \sqrt{3} - J \end{cases} \text{ لدينا } J + 2I = K \text{ و } K = \sqrt{3} - J \text{ نحل الجملة:}$$

الإرادة والمثابرة غالباً ما يصنعان الفرق بين الفشل والنجاح.

$$\begin{cases} J = \frac{\sqrt{3}}{2} - \ln(1 + \sqrt{3}) + \ln \sqrt{2} \\ K = \frac{\sqrt{3}}{2} + \ln(1 + \sqrt{3}) - \ln \sqrt{2} \end{cases} \text{ونجد}$$

حل التمرين رقم 02:

$$u_n = \int_{\ln n}^{\ln(n+1)} e^{2x} dx = \left[ \frac{1}{2} e^{2x} \right]_{\ln n}^{\ln(n+1)} = n + \frac{1}{2} \quad (1)$$

$$u_1 = \frac{3}{2} \text{ حسابية أساسها 1 وحده الأول } u_n \text{ ومنه } u_{n+1} - u_n = \left( n + 1 + \frac{1}{2} \right) - \left( n + \frac{1}{2} \right) = 1 \quad (2)$$

$$v_1 = e^{\frac{3}{2}} = e\sqrt{e} \text{ هندسية أساسها } e \text{ وحده الأول } v_n \text{ ومنه } v_{n+1} = e^{u_{n+1}} = e^{u_n+1} = e^{u_n} \times e^1 = v_n \times e \quad (3)$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n) = \frac{n}{2} \left( \frac{3}{2} + n + \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{2}(n+2) \quad (4)$$

$$\begin{aligned} P_n &= v_1 \times v_2 \times v_3 \dots \times v_n = e^{u_1} \times e^{u_2} \times e^{u_3} \times \dots \times e^{u_n} \\ &= e^{u_1 + u_2 + \dots + u_n} = e^{S_n} = e^{\frac{n}{2}(n+2)} \end{aligned} \quad (5)$$

حل التمرين رقم 03:

$$(1) \text{ أ) لدينا من أجل كل عدد حقيقي } x \text{ من } [0, 1] : x - 2 + \frac{4}{x+2} = \frac{(x-2)(x+2)+4}{x+2} = \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2} = \frac{x^2}{x^2 + 2}$$

$$(ب) I = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx = \int_0^1 \left( x - 2 + \frac{4}{x+2} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} - 2x + \ln(x+2) \right]_0^1 = -\frac{3}{2} + 4 \ln \frac{3}{2}$$

$$(2) \text{ أ) لدينا : } J = \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx \text{ و } K = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx$$

$$K - 3J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx - 3 \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x}{e^x + 4} dx = \left[ \ln(e^x + 4) \right]_0^{\ln 16} = \ln 4$$

$$K + J = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 3}{e^x + 4} dx + \int_0^{\ln 16} \frac{1}{e^x + 4} dx = \int_0^{\ln 16} \frac{e^x + 4}{e^x + 4} dx = \left[ x \right]_0^{\ln 16} = \ln 16$$

$$(ب) \text{ لدينا إذن : } \begin{cases} K - 3J = \ln 4 \\ K + J = \ln 16 \end{cases} \text{ نحل الجملة فنجد : } J = \frac{\ln 2}{2} \text{ و } K = \frac{7 \ln 2}{2}$$

(3) الدالة المعرفة على  $[-1, 1]$  كما يلي :  $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ .

(أ) لتكن  $M(x, y)$  نقطة من  $(C_f)$  فيكون لدينا  $y = \sqrt{1-x^2}$  حيث  $y \geq 0$  ومنه النقطة  $M$  تقع في نصف المستوى الذي تراتيب نقطه موجبة .

وكذلك  $OM^2 = x^2 + y^2 = x^2 + 1 - x^2 = 1$  أي  $OM = 1$ .

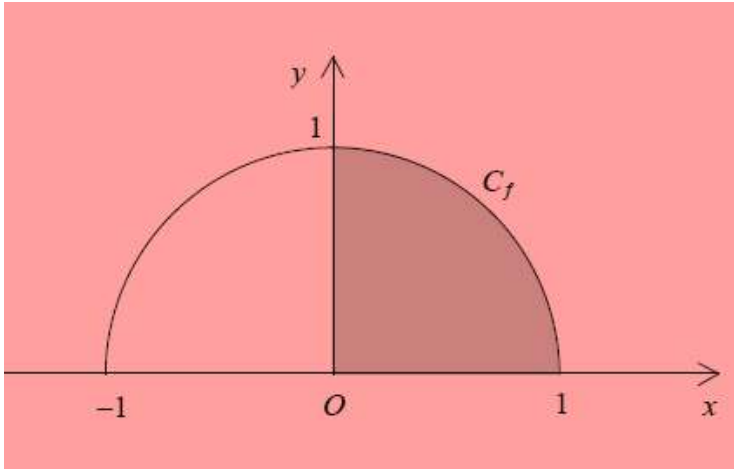
إذن النقطة  $M$  تقع على نصف دائرة مركزها  $O$  وطول نصف قطرها 1 والتي يقع في نصف المستوى الذي تراتيب نقطه موجبة

وبالعكس لتكن  $N(a, b)$  نقطة من هذا نصف الدائرة فيكون :

$(b \geq 0$  و  $ON^2 = 1$ ) أي  $(b \geq 0$  و  $a^2 + b^2 = 1$ ) أو كذلك  $(b \geq 0$  و  $b^2 = 1 - a^2$ )

وبما أن  $a \in [-1, 1]$  فإن  $1 - a^2 \geq 0$  فإن  $b = \sqrt{1 - a^2}$  أي  $b = f(a)$  ومنه  $N \in (C_f)$ .

(ب)  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$  يمثل مساحة الحيز المحدد بـ  $(C_f)$  ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما  $x=0$  و  $x=1$  هذا الحيز



هو ربع القرص الذي طول نصف قطره 1 مساحته  $\frac{\pi}{4}$

إذن :  $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{4}$

### حل التمرين رقم 04:

$$(1) \quad u_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx \quad \text{نكامل بالتجزئة :}$$

$$\text{لدينا} \quad \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \text{ومنه} \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$u_1 = \int_0^1 x e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x} dx = [-x e^{-x}]_0^1 - [-e^{-x}]_0^1 = u_1 = 1 - \frac{2}{e}$$

$$(2) \quad u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx \quad \text{نكامل بالتجزئة :}$$

نضع  $v(x) = -e^{-x}$  و  $u'(x) = n+1 x^n$  ومنه  $v'(x) = e^{-x}$  و  $u(x) = x^{n+1}$

$$u_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1} e^{-x} dx = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 - \int_0^1 -(n+1)x^n e^{-x} dx$$

$$u_{n+1} = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 + (n+1) \int_0^1 x^n e^{-x} dx = [-x^{n+1} e^{-x}]_0^1 + (n+1)u_n$$

$$u_{n+1} = -\frac{1}{e} + (n+1)u_n$$

(3) من العلاقة  $u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}$  نستنتج أن  $u_2 = 2u_1 - \frac{1}{e} = 2\left(1 - \frac{2}{e}\right) - \frac{1}{e} = 2 - \frac{5}{e}$

(4) من العلاقة  $u_{n+1} = (n+1)u_n - \frac{1}{e}$  نستنتج أن  $u_3 = 3u_2 - \frac{1}{e} = 3\left(2 - \frac{5}{e}\right) - \frac{1}{e} = 6 - \frac{16}{e}$

$$\begin{aligned} \int_0^1 2x^3 - 8x^2 + 4x e^{-x} dx &= 2 \int_0^1 x^3 e^{-x} dx - 8 \int_0^1 x^2 e^{-x} dx + 4 \int_0^1 x e^{-x} dx \\ &= 2u_3 - 8u_2 + 4u_1 = 2\left(6 - \frac{16}{e}\right) - 8\left(2 - \frac{5}{e}\right) + 4\left(1 - \frac{2}{e}\right) = 0 \end{aligned} \quad (5)$$

حل التمرين رقم 05:

(1) أ) الدالة  $G$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  و  $G'(x) = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = x e^{x^2} = g(x)$  أي الدالة  $G$  هي دالة أصلية على  $\mathbb{R}$  للدالة  $g$ .

ب)  $I_1 = \frac{e-1}{2}$  ومنه  $I_1 = \int_0^1 x^1 e^{x^2} dx = [G(x)]_0^1 = G(1) - G(0) = \frac{1}{2}e^1 - \frac{1}{2}e^0 = \frac{e-1}{2}$

(2) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم لدينا:  $I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx = \int_0^1 x^{n+1} \times x e^{x^2} dx$

نضع  $v(x) = \frac{1}{2}e^{x^2}$  و  $u'(x) = (n+1)x^n$  ومنه  $v'(x) = x e^{x^2}$  و  $u(x) = x^{n+1}$

$$I_{n+2} = \int_0^1 x^{n+1} \times x e^{x^2} dx = \left[ x^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \frac{1}{2} e^{x^2} dx$$

$$I_{n+2} = \left( 1^{n+1} \times \frac{1}{2} e^1 - 0 \times \frac{1}{2} e^0 \right) - \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n \times e^{x^2} dx = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2} I_n$$

$$(3) \text{ لدينا } I_1 = \frac{e-1}{2} \text{ و } I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n$$

$$I_3 = I_{1+2} = \frac{1}{2}e - \frac{1+1}{2}I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$I_5 = I_{3+2} = \frac{1}{2}e - \frac{3+1}{2}I_3 = \frac{e}{2} - 2I_3 = \frac{e-2}{2}$$

حل التمرين رقم 06

(1) دراسة تغيرات  $u$ : الدالة  $u$  مستمرة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  وخصوصا على  $[0; 1]$

و  $u'(x) = -e^{-x} = 1 - \frac{1}{e^x} > 0$  أي  $u'(x) > 0$  ومنه  $u$  متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال  $[0; 1]$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$ :  $u(x) \geq 0$

$x$	0	1
$u'(x)$	+	
$u(x)$	0	$\frac{1}{e}$

دراسة تغيرات  $v$ : الدالة  $v$  مستمرة وقابلة للإشتقاق على  $\mathbb{R}$  وخصوصا على  $[0; 1]$  و  $v'(x) = -1 + x - e^{-x} = u(x)$

أي  $v'(x) \geq 0$  ومنه  $v$  متزايدة تماما جدول تغيراتها على المجال  $[0; 1]$

$x$	0	1
$v'(x)$	+	
$v(x)$	0	$\frac{e-2}{2e}$

لاحظ من جدول التغيرات أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$ :  $v(x) \geq 0$

(2) لدينا مما سبق  $u(x) \geq 0$  و  $v(x) \geq 0$  أي  $x - 1 + e^{-x} \geq 0$  و  $1 - x + \frac{x^2}{2} - e^{-x} \geq 0$

ومنه  $e^{-x} \geq 1-x$  و  $e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2}$  وبالتالي : (1)  $1-x \leq e^{-x} \leq 1-x + \frac{x^2}{2}$

(3) لدينا  $0 \leq x \leq 1$  ومنه  $0 \leq x^2 \leq 1$  وبالتالي نعوض كل  $x$  بـ  $x^2$  في العلاقة (1) فنجد  $1-x^2 \leq e^{-x^2} \leq 1-x^2 + \frac{x^4}{2}$

ونقسم كل الأطراف على العدد الحقيقي الموجب تماما  $1+x$  فنجد (2)  $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{x^4}{2(1+x)}$

(4) من أجل كل  $x$  من  $[0; 1]$  : نوجد المقامات في  $x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1}$

$$x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1} = \frac{x^4 + x^3 - x^3 - x^2 + x^2 + x - x - 1 + 1}{x+1} = \frac{x^4}{x+1}$$

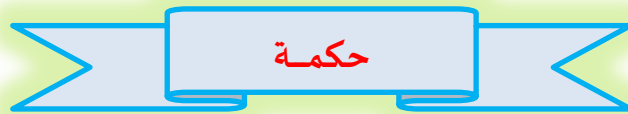
(5) تصبح العلاقة (2) كما يلي :  $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{1}{2} \left( x^3 - x^2 + x - 1 + \frac{1}{x+1} \right)$  أي

$$1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq 1-x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$$

نكامل الأطراف فنجد  $1-x \leq \frac{e^{-x^2}}{1+x} \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}$

فنحصل على :  $\int_0^1 (1-x) dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{1+x} dx \leq \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1} \right) dx$

$$\frac{1}{2} \leq I \leq \frac{5}{24} + \frac{1}{2} \ln 2 \text{ وأخيرا } \left[ x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \leq I \leq \left[ \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x^4 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2} \ln|x+1| \right]_0^1$$



المال كوسخ الأذن ، إن أبقيته ضرك وإن أخرجته نفعك

لا تحزن على شخص  
تغيرت تصرفاته اتجاهك " فجأة "  
فقد يكون أعتزل " التمثيل "