ملخص شامل في

المتتاليات العددية

للسنة 3 ثانوي

إعداد :

الأستاذ مسعود

الأستاذ مسعود بن منصور

الأستاذ مسعود للرياضيات

Proff_Messaoud

المتتاليات العددية

تعريف وتوليد متتالية

تعريف:

متتالية عددية حقيقية U هي دالة ترفق بكل عدد طبيعي n،أكبر من أو يساوي n_0 معطى ، العدد $U(n)$

ترميز:

نرمز إلى صورة n بالمتتالية U بـ: U_n بدلا من $U(n)$ هذا الترميز الجديد يسمى الترميز بدليل

02/توليد متتالية عددية:

أ) توليد متتالية معرفة بحدها العام :

(V_n) متتالية معرفة بحدها العام $V_n = 2n - 3$

هكذا يمكننا حساب الحد الأول V_0 أو أي حد

$V_{10} = 2(10) - 3$	$V_0 = 2(0) - 3$
$V_{10} = 17$	$V_0 = -3$

ب) توليد متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

المتتالية (U_n) المعرفة كما يلي $U_0 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n + 1$

هي متتالية معرفة بعلاقة تراجعية .

ومنه نحسب الحد U_1 U_2

$U_2 = U_1 + 1$	$U_1 = U_0 + 1$
$U_2 = 3 + 1 = 4$	$U_1 = 2 + 1 = 3$

التمثيل البياني لمتتالية

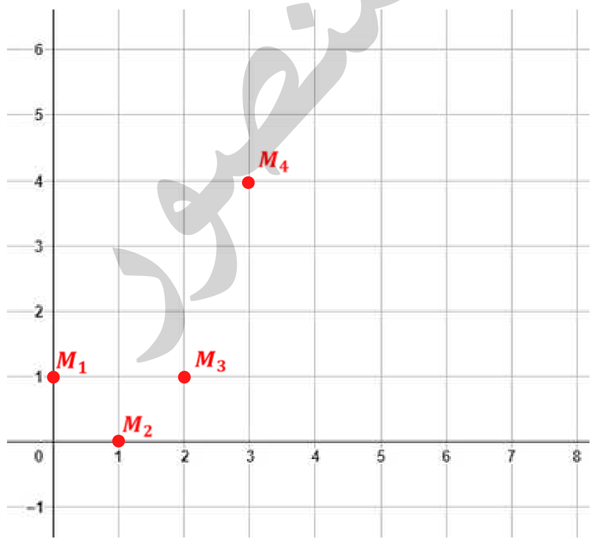
01/متتالية معرفة بحدها العام

◀ يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام على محور

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام على N كمايلي : $U_n = n^2 - 2$

◀ يمكن تمثيل متتالية عددية معرفة بحدها العام على المعلم المتعامد و المتجانس (O, I, J) بحيث يكون تمثيلها البياني هو مجموعة النقط $M(U_n ; f(U_n))$ مع $U_n = f(n)$

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها العام على N كمايلي : $U_n = n^2 - 2n + 1$



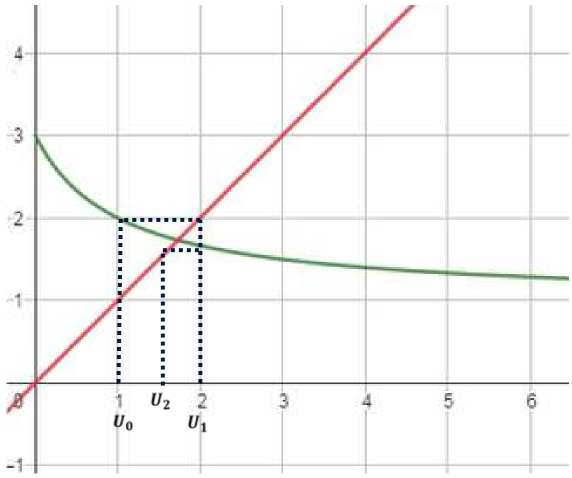
02/متتالية معرفة بعلاقة تراجعية

- لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها الأول U_0 و العلاقة التراجعية $U_{n+1} = f(U_n)$ حيث f دالة معرفة على R

مجموعة النقط $M(n\,;f(U_n))$ هي التمثيل البياني في المستوي المنسوب إلى معلم للمتتالية

مثال: لتكن المتتالية (U_n) المعرفة بحدها الأول $U_0 = 1$ والعلاقة التراجعية $U_{n+1} = \dfrac{U_n + 3}{U_n + 1}$

مثل بيانيا حدود المتتالية (U_n)



إتجاه تغير المتتالية

01/ المتتالية المتزايدة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها متزايدة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \geq U_n$

أي: $U_{n+1} - U_n \geq 0$

02/ المتتالية المتناقصة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها متناقصة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} \leq U_n$

أي: $U_{n+1} - U_n \leq 0$

03/ المتتالية الثابتة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها ثابتة إذا وفقط إذا كان من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = U_n$

أي: $U_{n+1} - U_n = 0$

ملاحظة

نقول عن (U_n) أنها رتيبة إذا كانت متزايدة أو متناقصة.

المتتالية الحسابية

تعريف

نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\epsilon N}$ حسابية إذا و فقط

إذا وجد عدد حقيقي r حيث : $U_{n+1} = U_n + r$

r يسمى أساس المتتالية

ملاحظات:

- نقول إن المتتالية $(U_n)_{n\epsilon N}$ حسابية إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. هذا الأخير هو الأساس r
- نقول إن المتتالية (U_n) حسابية إذا كان فرق حدين متتابعين ثابت. هذا الأخير هو الأساس r
- لإثبات أن المتتالية (U_n) حسابية نحسب الفرق

$$U_{n+1} - U_n = r$$

02/ عبارة الحد العام

لتكن المتتالية (U_n) حسابية أساسها r و حدها الأول U_0

تكتب عبارة الحد العام على الشكل :

$$U_n = U_0 + nr$$

ملاحظة

- إذا كان الحد الأول هو U_1 فإن الحد العام هو:

$$U_n = U_1 + (n-1)r$$

- بصفة عامة إذا كان U_n و U_p حدين من متتالية حسابية أساسها r فإن :

$$U_n = U_p + (n-p)r$$

مع $n > p$

03/ الوسط الحسابي

a ، b و c حدود متتابعة من متتالية حسابية

ومنه حسب خاصية الوسط الحسابي فإن :

$$2b = a + c$$

و منه :

$$b = \frac{a+c}{2}$$

04/ مجموع متتالية حسابية

(U_n) متتالية حسابية معرفة على N أساسها r

و :

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

فإن :

$$S_n = \frac{\text{عدد الحدود}}{2}(U_0 + U_n)$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

05/ إتجاه تغير متتالية حسابية

إتجاه تغير متتالية حسابية (U_n) حسب إشارة الأساس r

- إذا كان : $r < 0$

فإن (U_n) متناقصة تماما

- إذا كان : $r > 0$

فإن (U_n) متزايدة تماما

- إذا كان : $r = 0$

فإن (U_n) ثابتة

المتتالية الهندسية

تعريف

نقول إن المتتالية $(V_n)_{n\epsilon N}$ هندسية إذا و فقط إذا وجد عدد حقيقي q حيث :

$$V_{n+1} = V_n \times q$$

q يسمى أساس المتتالية (V_n)

02/ عبارة الحد العام

لتكن المتتالية (V_n) هندسية أساسها q و حدها الأول V_0

تكتب عبارة الحد العام على الشكل :

$$V_n = V_0 \times q^n$$

ملاحظات:

- إذا كان الحد الأول هو V_1 فإن الحد العام هو:

$$V_n = V_1 \times q^{n-1}$$

- بصفة عامة إذا كان V_n و V_p حدين من متتالية هندسية أساسها q فإن :

$$V_n = V_p \times q^{n-p}$$

مع $n > p$

03/ الوسط الهندسي

a ، b و c حدود متتابعة من متتالية هندسية ومنه حسب خاصية الوسط الهندسي فإن :

$b^2 = a \times c$ و منه : $b = \sqrt{a \times c}$

04/ مجموع متتالية هندسية

(V_n) متتالية هندسية معرفة على N أساسها q

و : $P_n = V_0 + V_1 + \cdots + V_n$

فإن :

$$P_n = V_0 \times \frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q}$$

عدد الحدود = دليل الحد الأخير - دليل الحد الأول + 1

05/ إتجاه تغير متتالية هندسية

إتجاه تغير متتالية حسابية (V_n) حسب إشارة الأساس q و الحد الأول V_0

- في حالة : $V_0 > 0$
  - إذا كان : $q > 1$ فإن (V_n) متزايدة تماما
  - إذا كان : $0 < q < 1$ فإن (V_n) متناقصة تماما
- في حالة : $V_0 < 0$
  - إذا كان : $q > 1$ فإن (V_n) متناقصة تماما
  - إذا كان : $0 < q < 1$ فإن (V_n) متزايدة تماما

ملاحظة :

إذا كان $q < 0$ فإن المتتالية غير رتيبة

- إذا كان : $q = 1$ فإن (V_n) ثابتة

البرهان بالتراجع

مُسَلمَة

$P(n)$ خاصية متعلقة بالعدد الطبيعي n . لإثبات صحة $P(n)$ من أجل كل عدد طبيعي n_0، يكفي أن :

◀ نتأكد من صحة $P(n_0)$

◀ نفرض صحة الخاصية من أجل عدد طبيعي كيفي اكبر من او يساوي n_0 ، أي "$P(n)$ صحيحة " ونثبت صحتها من أجل $n+1$ ، أي صحة $P(n+1)$

المتتالية المحدودة

01/ المتتالية المحدودة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها محدودة يعني أنها إما محدودة من الأعلى أو من الأسفل بعدد حقيقي a

◀ إذا كان : $U_n \leq a$ نقول (U_n) محدودة من الأعلى

◀ إذا كان : $U_n \geq a$ نقول (U_n) محدودة من الأسفل

◀ إذا كان : $b \geq U_n \geq a$ نقول (U_n) محدودة

(أي محدودة من الأسفل و من الأعلى)

نهاية متتالية

01/ نهاية متتالية معرفة بحدها العام

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N كمايلي:

$$U_n = f(n)$$

◀ إذا كانت : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ فإن :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l$$

◀ إذا كانت : $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \infty$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \infty$$

02/ نهاية متتالية هندسية

(V_n)لمتتالية هندسية معرفة على N أساسها q و حدها الأول V_0

◀ إذا كان : $q > 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = \infty$$

◀ إذا كان : $-1 < q < 1$ فإن :

$$\lim_{n\to+\infty} V_n = 0$$

◀ إذا كان : $q < -1$ فإن :

$\lim_{n\to+\infty} V_n =$ غير موجودة

تقارب المتتالية

01/ المتتالية المتقاربة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها متقاربة إذا كان:

- (U_n) متزايدة و محدودة من الأعلى
- (U_n) متناقصة و محدودة من الأسفل

أو :

$$\lim_{n\to\infty} U_n = l \quad (l \in R)$$

02/ المتتالية المتباعدة

(U_n) المتتالية عددية معرفة على N

نقول عن (U_n) أنها متباعدة إذا كان:

$$\lim_{n\to\infty} U_n = \infty$$

أو نهايتها غير موجودة

المتتاليتان المتجاورتان

01/ المتتاليتان المتجاورتان

(U_n) و (V_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على N

نقول عن (U_n) و(V_n) أنهما متجاورتان إذا كان:

- (U_n) متزايدة و (V_n) متناقصة أو العكس

مع $\lim_{n\to\infty}(U_n - V_n) = 0$

مبرهنة:

إذا كانت متتاليتان متجاورتان فإنهما متقاربتان و لهما نفس النهاية