

الهندسة الفضائية

1- التمثيلات الوسيطة

أ- التمثيل الوسيطي لمستقيم:

$\vec{u}(a; b; c)$ شعاع توجيه لمستقيم (D) يشمل نقطة معلومة $A(x_A; y_A; z_A)$ و $M(x; y; z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(D) : \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases} / t \in \mathbb{R}$$

ب- التمثيل الوسيطي لمستوى:

$\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ شعاعان مستقلان خطيا من مستوي (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A; y_A; z_A)$ و $M(x; y; z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$(P) : \begin{cases} x = x_A + at + a'\lambda \\ y = y_A + bt + b'\lambda \\ z = z_A + ct + c'\lambda \end{cases} / t, \lambda \in \mathbb{R}$$

2- الجداء السلمي في الفضاء

أ- العبارة التحليلية للجداء السلمي:

$\vec{u}(a; b; c)$ و $\vec{v}(a'; b'; c')$ شعاعان من الفضاء، فإن:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

ب- تعامد شعاعين:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \text{ يكافئ } aa' + bb' + cc' = 0$$

ج- ملاحظة:

من تعريف الجداء السلمي لدينا:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

3- المعادلات الديكارتية

أ- المعادلة الديكارتية لمستوى:

$\vec{n}(a; b; c)$ شعاع ناظمي لمستوي (P) يشمل نقطة معلومة $A(x_A; y_A; z_A)$ و $M(x; y; z)$ نقطة كيفية منه، فإن:

$$\vec{n} \cdot \vec{AM} = 0 \text{ أي: } \vec{n} \perp \vec{AM} \text{ ومنه:}$$

$$(P) : ax + by + cz + d = 0$$

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة دون حساب الجداء السلمي حيث a, b, c هي إحداثيات الشعاع الناظمي وللحصول على قيمة d نعوض x, y, z بإحداثيات النقطة A

ب- المعادلة الديكارتية لسطح كرة:

(S) سطح كرة مركزها $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ ونصف قطرها r ($r \in \mathbb{R}_+$) و $M(x; y; z)$ نقطة كيفية من (S) فإن:

$$(S) : (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

بعد النشر والتبسيط، تصبح هذه المعادلة من الشكل التالي:

$$(S) : x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

ج- المعادلة الديكارتية لمستوى مماس لسطح كرة:

(P) مستوي مماس لسطح كرة (S) مركزها $\Omega(x_0; y_0; z_0)$ في نقطة $A(x_A; y_A; z_A)$ و $M(x; y; z)$ نقطة كيفية من (P) فإن: $\vec{AO} \perp \vec{AM}$ أي: $\vec{AO} \cdot \vec{AM} = 0$ ومنه:

$$(x_0 - x_A)(x - x_A) + (y_0 - y_A)(y - y_A) + (z_0 - z_A)(z - z_A) = 0$$

بعد النشر والتبسيط، نحصل على معادلة كما في 3-أ أعلاه.

* يمكن وضع هذه المعادلة مباشرة كما في 3-أ أعلاه كذلك، حيث يعتبر $\vec{AO}$ شعاع ناظمي للمستوي (P)

د- ملاحظة:

ينتج المستقيم في الفضاء عن تقاطع مستويين. لذلك ليست له معادلة ديكارتية واحدة وإنما له جملة معادلتين ديكارتيتين لهما انطلاقا من هذه الجملة نحصل على تمثيل وسيطي للمستقيم.

4- المسافات

أ- المسافة بين نقطتين:

$A(x_A; y_A; z_A)$ و $B(x_B; y_B; z_B)$ نقطتان من الفضاء، فإن:

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

ب- المسافة بين نقطة ومستوى:

$A(x_A; y_A; z_A)$ و $(P) : ax + by + cz + d = 0$

$$d(A; (P)) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \text{ لدينا:}$$

ج- المسافة بين نقطة ومستقيم:

لا توجد علاقة تسمح مباشرة بحساب المسافة بين نقطة ومستقيم، لكن يمكن أن نستعين ببعض الحالات التالية:

الحالة 1:

H المسقط العمودي للنقطة A على المستقيم (D) فإن:

$$d(A; (D)) = AH$$

الحالة 2:

$(P_1) \perp (P_2)$ و $(P_1) \cap (P_2) = (D)$ بعد حساب $d(A; (P_1))$ و $d(A; (P_2))$ وتطبيق

مبرهنة فيثاغورس نجد:

$$d(A; (D)) = \sqrt{[d(A; (P_1))]^2 + [d(A; (P_2))]^2}$$

الحالة 3:

$A \in (P)$ و $(D) \perp (P)$ و $(D) \cap (P) = \{B\}$

$$d(A; (D)) = AB$$

5- تذكير: المستوي المحوري - حجم رباعي وجوه

* المستوي المحوري لقطعة مستقيمة هو مستوي يشمل منتصفها ويعامد حاملها.
* حجم رباعي وجوه $= \frac{1}{3}$ مساحة القاعدة في الارتفاع.