

الدالة الأسية واللوغارتمية

(الأقسام النهائية العلمية)

الأستاذ : بوخلاق محمد

الكفاءات المستهدفة

◆ تطبيق خواص الدالة الأسية النيبيرية .

◆ حل مشكلات بتوظيف الدوال الأسية ، الدوال اللوغارتمية .

حل النشاط 1 ص 76 :

- (2) * نبين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$. ثم استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)f(-x)=1$ (3)
- الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $h'(x) = f'(x) \times f(-x) - f'(-x) \times f(x)$.
- بما أن $f' = f$ فإن $h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(-x) \times f(x) = 0$.
- وبالتالي الدالة h ثابتة على $\mathbb{R}$.
- بما أن الدالة h ثابتة على $\mathbb{R}$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = \alpha$ حيث α ثابت حقيقي .
- لدينا : $h(0) = \alpha$ ومن جهة أخرى نجد $h(0) = f(0) \times f(0) = 1$ وعليه : $\alpha = 1$.
- اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = \alpha = 1$ أي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x)f(-x)=1$ (3)
- (4) * نبرهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$.
- نفرض أنه يوجد عدد حقيقي x_0 ، $f(x_0) = 0$.
- لكن لدينا : $h(x_0) = f(x_0) \times f(-x_0) = 0$. تناقض حسب الإجابة الأولى
- وبالتالي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$ (4)
- (3) * نبين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.
- الدالة k قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $k'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - g(x) \times f'(x)}{[f(x)]^2}$.
- بما أن $f' = f$ و $g' = g$ فإن $k'(x) = \frac{g(x) \times f(x) - g(x) \times f(x)}{[f(x)]^2} = 0$.
- وبالتالي الدالة k ثابتة على $\mathbb{R}$.
- (*) استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x)$.
- بما أن الدالة k ثابتة على $\mathbb{R}$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $k(x) = \beta$ حيث β ثابت حقيقي .
- لدينا : $k(0) = \beta$ ومن جهة أخرى نجد $k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$ وعليه : $\beta = 1$.
- اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = \alpha = 1$ أي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$.
- أي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x)$.

(4) * بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ و أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x) = f(y)$.
الدالة i قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $i'(x) = \frac{f'(x+y) \times f(x) - f'(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2}$.
بما أن $f' = f$ فإن $i'(x) = \frac{f(x+y) \times f(x) - f(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$.

وبالتالي الدالة i ثابتة على $\mathbb{R}$.

بما أن الدالة i ثابتة على $\mathbb{R}$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = \theta$ حيث θ ثابت حقيقي .

لدينا : $i(0) = \theta$ ومن جهة أخرى نجد $i(0) = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$ وعليه : $\theta = 1$.

اذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = \theta = f(y)$.

(5) * استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ ،

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = \theta = f(y)$.

أي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{f(x+y)}{f(x)} = f(y)$.

(5) أي من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ ،

(6) * استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ و من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ ،

لدينا : $f(-y) = \frac{1}{f(y)}$: (3) باستعمال () $f(x-y) = f(x+(-y)) = \frac{f(x)}{f(-y)} = \frac{f(x)}{f(y)}$.

(5) * تعيين الدالة المشتقة للدالة j .

الدالة j قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$: $j'(x) = \frac{nf'(nx) \times [f(x)]^n - f(nx) \times nf'(x) \times [f(x)]^{n-1}}{[f(x)]^2}$.

بما أن $f' = f$ فإن $j'(x) = \frac{nf(nx) \times [f(x)]^n - f(nx) \times nf(x) \times [f(x)]^{n-1}}{[f(x)]^2} = 0$.

وبالتالي الدالة j ثابتة على $\mathbb{R}$.

بما أن الدالة j ثابتة على $\mathbb{R}$ فإنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = \mu$ حيث μ ثابت حقيقي .

(7) * استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(nx) = [f(x)]^n$ ،

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = \mu$ حيث μ ثابت حقيقي .

اذن : $i(0) = \mu = \frac{f(0)}{[f(0)]^n} = 1$.

وعليه : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $i(x) = 1$.

أي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{f(nx)}{[f(x)]^n} = 1$.

(7) أي : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(nx) = [f(x)]^n$ ،

تعريف: تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$ الدالة الأسية (النيبيرية). و نرمز إليها بالرمز "exp".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \exp(x)$

(6) كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)، ...، (7)

من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\exp'(x) = \exp(x) \dots (1) \text{ و } \exp(0) = 1 \dots (2) \text{ و } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \dots (3) \text{ و } \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$$

$$\exp(x) \neq 0 \dots (4) \text{ و } \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \dots (5)$$

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \dots (7) \text{ و } \exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \dots (6)$$

الدالة الأسية

1. عموميات

يسمح النشاط الأول من استخلاص النتائج التالية:

مبرهنة و تعريف: توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = f$ و $f(0) = 1$. نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" و نسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة: الدالة الأسية هي إذن الحل الخاص للمعادلة التفاضلية $y' = y$ التي تحقق $y(0) = 1$.

نتائج: $\exp(0) = 1$ *

* من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp'(x) = \exp(x)$

2. خواص جبرية :

خواص: من أجل كل عددين حقيقيين x ، y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\exp(x) \neq 0 \quad (1) \quad \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (2) \quad \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (3)$$

$$\exp(x-y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (4) \quad \exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (5)$$

البرهان: أنظر النشاط الأول.

3. العدد e و الترميز e^x :

(*) العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية أي $e = \exp(1)$. تعطينا الحاسبة $e \approx 2,718281828$.

(*) من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$

لدينا إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n ، $\exp(n) = e^n$

اصطلاحا نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x ، إلى $\exp(x)$ بـ e^x .

$$\exp(x) = e^x \text{ ، من أجل كل عدد حقيقي } x$$

تقرأ e^x : "أسية x ".

ملاحظة: الترميز السابق متلائم مع خواص القوى في الحالة التي يكون فيها الأس عددا صحيحا.

باستعمال الاصطلاح السابق تكتب خواص الدالة الأسية كما يلي:

قواعد الحساب: من أجل كل عددين حقيقيين x, y و من أجل كل عدد صحيح نسبي n لدينا:

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \quad (*) & \exp'(x) &= e^x \quad (*) & e^0 &= 1 \quad (*) \\ e^{nx} &= (e^x)^n \quad (*) & e^{x-y} &= \frac{e^x}{e^y} \quad (*) & e^{x+y} &= e^x e^y \quad (*) \end{aligned}$$

تمرين:

بسط العبارات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} \quad (2) \quad \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} \quad (3) \quad e^{-10x} \times (e^{-x+1}) \times (e^{3x})^3 \\ (4) \quad & \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} \right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \right) \end{aligned}$$

الحل:

$$\begin{aligned} (1) \quad & \frac{2e^2 \times e}{\sqrt{e}} = 2e^{\frac{5}{2}} \\ (2) \quad & \frac{3\sqrt{e}}{e^3 \times e^{-1}} = 3e^{-\frac{3}{2}} \\ (3) \quad & e^{-10x} \times (e^{-x+1}) \times (e^{3x})^3 = e^{-3x+2} \\ (4) \quad & \left(\frac{e^{4x} + e^{-4x}}{2} \right) \left(\frac{e^{4x} - e^{-4x}}{2} \right) = \frac{e^{16x} - 1}{4e^{8x}} \end{aligned}$$

تمرين 2:

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ و (Cf) تمثيلها البياني في المستوي

المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

بين انه من اجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) + f(x) = 1$.
فسر بيانها هذه النتيجة .

الحل:

$$\text{من اجل كل عدد حقيقي } x : f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{e^{-x} + e^x + 2}{e^{-x} + e^x + 2} = 1$$

تذكير: f دالة معرفة على D و (Cf) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.
(1) لإثبات أن المستقيم (d) ذو معادلة $x = a$ هو محور تناظر (Cf) يمكن اتباع احدى الطرق التالية :

$$(*) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ يكون } 2a - x \text{ من } D \text{ و } f(2a - x) = f(x).$$

$$(*) \text{ لكل } x \text{ من } D \text{ يكون } a - x \text{ من } D \text{ و } a + x \text{ من } D \text{ و } f(2a - x) = f(x).$$

(*) نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y \end{cases}$.

تصبح $y = f(x)$ تعني $Y = f(X + a)$ هذه الأخيرة تعرف دالة g .
نبرهن أن g دالة زوجية .

(2) لإثبات أن النقطة $A(a; b)$ هي مركز تناظر (Cf) يمكن اتباع إحدى الطرق التالية :

(*) لكل x من D يكون $2a - x$ من D و $f(2a - x) + f(x) = 2b$.

(*) لكل x من D يكون $a - x$ من D و $a + x$ من D و $f(a - x) + f(a + x) = 2b$.

(*) نقوم بتغيير المعلم بحيث نضع : $\begin{cases} x = X + a \\ y = Y + b \end{cases}$.

تصبح $y = f(x)$ تعني $Y = f(X + a) - b$ هذه الأخيرة تعرف دالة g .
نبرهن أن g دالة فردية.

تفسير النتيجة بياناً : لدينا $f(-x) + f(x) = 1$ يعني $f(2 \times 0 - x) + f(x) = 2 \times \frac{1}{2}$.

اذن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ هي مركز تناظر المنحنى (Cf) .

الدوال الأسية: $x \mapsto e^{kx}$

1. حلول المعادلة $f' = kf$

مبرهنة: ليكن k عدداً حقيقياً.

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $f' = kf$ و $f(0) = 1$ هي الدالة $x \mapsto e^{kx}$.

البرهان:

الوجود: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$.

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x) = ke^{kx} = kf(x)$ ، كما أن $f(0) = e^0 = 1$.

و بالتالي الدالة f تحقق $f' = kf$ و $f(0) = 1$.

الوحدانية: نفرض وجود دالة ثانية g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $g' = kg$ و $g(0) = 1$. نعتبر الدالة h المعرفة

على $\mathbb{R}$ بـ $h(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$. الدالة h قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$h'(x) = \frac{g'(x)f(x) - f'(x)g(x)}{[f(x)]^2} = \frac{kg(x)f(x) - kf(x)g(x)}{[f(x)]^2} = 0$$

و $h(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = \frac{1}{1} = 1$. و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = 1$. إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x)$.

2. دوال تحول المجموع إلى جداء :

مبرهنة: الدوال غير المعدومة f و القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

من أجل كل عددين حقيقيين x و y ، $f(x+y) = f(x)f(y)$ ،

هي الدوال $x \mapsto e^{kx}$ حيث k عدد حقيقي.

البرهان:

لتكن f دالة غير معدومة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث: من أجل كل x, y من $\mathbb{R}$ ،

$$f(x+y) = f(x)f(y)$$

بأخذ $x=0$ و $y=0$ نحصل على $f(0) = [f(0)]^2$ أي $f(0) = 0$ أو $f(0) = 1$.
إذا كان $f(0) = 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = f(x+0) = f(x)f(0) = f(x) \times 0 = 0$ ، مما يعني أن f معدومة وهذا مرفوض و بالتالي $f(0) = 1$.

من أجل كل y ثابت، لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x+y) = f(x)f(y)$. باشتقاق الطرفين بالنسبة إلى x نحصل على: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x+y) = f'(x)f(y)$. من أجل $x=0$ لدينا:

$$f'(y) = f'(0)f(y)$$

بوضع $k = f'(0)$ يكون لدينا من أجل كل y من $\mathbb{R}$ ، $f'(y) = kf(y)$. إذن $f' = kf$ و $f(0) = 1$

و منه حسب المبرهنة السابقة لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = e^{kx}$.

عكسياً: لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{kx}$. باستعمال الخواص الجبرية للدالة الأسية نحصل على:

$$f(x+y) = e^{k(x+y)} = e^{kx+ky} = e^{kx} \times e^{ky} = f(x)f(y) ، x و y عددين حقيقيين$$

تمارين رقم 15 ص 102 :

1. أ- نبين أن $f(0) = 1$.

لدينا : من أجل كل عددين حقيقيين x و y : $f(x+y) = f(x)f(y)$.

بوضع $x=0$ و $y=0$ نجد : $f(0) = f(0)f(0)$ يعني $f(0)^2 - f(0) = 0$ يعني $f(0)[f(0)-1] = 0$ يعني

$$f(0) = 0 \text{ أو } f(0) = 1 \text{ وبما أن } f \text{ غير معدومة فإن } f(0) = 1 .$$

ب- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x) \times f(-x) = 1$$

بوضع $y = -x$ نجد : $f(x-x) = f(x)f(-x)$.

$$\text{لكن : } f(x-x) = f(0) = 1$$

$$\text{وبالتالي نجد : } f(x) \times f(-x) = 1$$

2. أ- نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$.

$$\text{بوضع } x = \frac{z}{2} \text{ و } y = \frac{z}{2} \text{ نجد : } f\left(\frac{z}{2} + \frac{z}{2}\right) = f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\text{أي : } f(z) = f\left(\frac{z}{2}\right)f\left(\frac{z}{2}\right)$$

$$\text{اذن من أجل كل عدد حقيقي } x ، f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

ب- استنتاج إشارة الدالة f .

$$\text{لدينا : من أجل كل عدد حقيقي } x ، f\left(\frac{x}{2}\right) \times f\left(\frac{x}{2}\right) = f(x)$$

أي من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(x) = \left[f\left(\frac{x}{2}\right) \right]^2 > 0$.
اذن f موجبة تماما على $\mathbb{R}$.

دراسة الدالة الأسية

1. اتجاه تغير الدالة الأسية

خاصية 1: من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x > 0$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x = e^{2 \times \frac{x}{2}} = \left(e^{\frac{x}{2}} \right)^2$ ، وبما أن $e^x \neq 0$ فإن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $e^x > 0$.

خاصية 2: الدالة الأسية متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

البرهان: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp'(x) = e^x$ و منه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\exp'(x) > 0$.

نتائج: • من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا: $e^a < e^b$ يعني $a < b$ و $e^a = e^b$ يعني $a = b$.

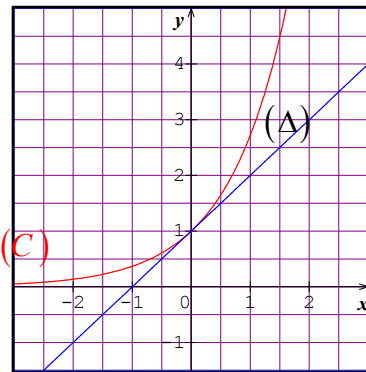
• من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $0 < e^x < 1$ يعني $x < 0$ و $e^x > 1$ يعني $x > 0$.

2. النهايات

خواص: (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$ (2) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

البرهان:

نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$ بـ $f(x) = e^x - x$. من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f'(x) = e^x - 1$ ،
و بما أن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $e^x \geq 1$ فإن $f'(x) \geq 0$ و منه f متزايدة تماما على $[0; +\infty[$ و $f(0) = 1$.
إذن من أجل كل x من $[0; +\infty[$ ، $f(x) \geq 0$ أي $e^x \geq x$. لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و منه $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.
من أجل كل عدد حقيقي x ، $e^x = \frac{1}{e^{-x}}$ و بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.



3. جدول تغيرات- التمثيل البياني

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
e^x		0	$+\infty$

• المنحني (C) الممثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

• لدينا $\exp'(0) = 1$ و $e^0 = 1$. إذن يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماسا $y = x + 1$: (Δ).

• من تعريف العدد المشتق لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0) = 1$ إذن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

نتيجة: الدالة $x \mapsto 1+x$ هي أحسن تقريب تكافئي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \approx 1+x$

تمرين :

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات والمتراجحات :

$$(1) \quad e^{4x} + 1 = 0$$

$$(2) \quad e^{x^2} - e = 0$$

$$(3) \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x}$$

$$(4) \quad e^{x^2} \times e^x < (e^2)^3$$

الحل :

طريقة: المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$

المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ تعني $u(x) \geq v(x)$

$$(1) \quad e^{4x} + 1 = 0 \text{ يعني } e^{4x} = -1 \text{ وبالتالي المعادلة لا تقبل حل في } \mathbb{R}.$$

$$(2) \quad e^{x^2} - e = 0 \text{ يعني } e^{x^2} = e^1 \text{ يعني } x^2 = 1 \text{ يعني } x = 1 \text{ أو } x = -1.$$

$$(3) \quad e^{1+x^2} \leq e^{2x} \text{ يعني } 1+x^2 \leq 2x \text{ يعني } 1+x^2-2x \leq 0 \text{ يعني } (1-x)^2 \leq 0 \text{ يعني } x = 0.$$

$$(4) \quad e^{x^2} \times e^x < (e^2)^3 \text{ يعني } e^{x^2+x} < e^6 \text{ يعني } x^2+x < 6 \text{ يعني } x^2+x-6 < 0 \text{ يعني } x \in]-3; 2[$$

دراسة الدالة $\exp \circ u$

1. النهايات

لدراسة نهاية دالة $\exp \circ u$ نستعمل المبرهنة الخاصة بنهاية دالة مركبة.

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x-2}$

• لدينا $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x-2) = -\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow 0} e^X = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{(x-2)} = 0$ أي $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

• لدينا $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-2) = +\infty$ و بما أن $\lim_{X \rightarrow +\infty} e^X = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{(x-2)} = +\infty$ أي $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2. اتجاه التغيرات

خاصية: إذا كانت u دالة معرفة على مجال I فإن للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

البرهان:

نعلم أن الدالة " $\exp$ " متزايدة تماما على $\mathbb{R}$. إذن حسب المبرهنة الخاصة باتجاه تغير دالة مركبة يكون للدالتين u و $\exp \circ u$ نفس اتجاه التغيرات على المجال I .

مثال:

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{5x^2-2}$

نلاحظ أن $f = \exp \circ u$ حيث u هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $u(x) = 5x^2 - 2$

بما أن الدالة u متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$ فإن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty; 0]$.

وبما ان الدالة u متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$ فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0; +\infty[$.

3. المشتقة

خاصية: إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I ، $(\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}$.

البرهان:

إذا كانت الدالة u قابلة للاشتقاق على I وعلما ان الدالة " $\exp$ " قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ فإن الدالة المركبة $\exp \circ u$ قابلة للاشتقاق على I و بتطبيق قاعدة حساب مشتقة دالة مركبة يكون لدينا:

$$\text{من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) \times (\exp)'[u(x)] = u'(x) \times (\exp)[u(x)]$$

$$\text{أي من أجل كل } x \text{ من } I, (\exp \circ u)'(x) = u'(x) e^{u(x)}.$$

مثال:

- مشتقة الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = e^{x^3}$ هي $f'(x) = 3x^2 e^{x^3}$.
- مشتقة الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ $g(x) = e^{x^3 - \frac{1}{x}}$ هي $g'(x) = \left(3x^2 - \frac{1}{x^2}\right) e^{x^3 - \frac{1}{x}}$.

تمرين رقم 49 ص 105 :

(1) أ) دراسة تغيرات الدالة f .

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f'(x) = \frac{e^x(1+e^x) - e^x \times e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{(1+e^x)^2} > 0 \quad \text{و } \mathbb{R} \quad \text{الدالة قابلة للاشتقاق على}$$

الدالة متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

(ب) احسب نهايات الدالة f عند $-\infty$ و عند $+\infty$. فسر النتائج هندسيا.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

يوجد مستقيمين مقارين معادلتهما $y=1$ و $y=0$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	$\nearrow \frac{1}{2}$	1

(2) نبين أن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C).

لكل x من $\mathbb{R}$ و $-x$ من $\mathbb{R}$:

$$f(-x) + f(x) = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}} + \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$. f(-x) + f(x) = \frac{\frac{1}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}} + \frac{e^x}{1+e^x}$$

$$f(-x) + f(x) = \frac{1}{1+e^x} + \frac{e^x}{1+e^x} = \frac{1+e^x}{1+e^x} = 1 = \frac{1}{2}(1)$$

اذن النقطة $A\left(0; \frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C).

(3) تعين معادلة المماس T للمنحنى (C) عند النقطة A .

$$. T: y = \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}$$

(4) أ) نبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$

الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و :

$$g'(x) = \frac{1}{4} - f'(x)$$

$$g'(x) = \frac{1}{4} - \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

$$. g'(x) = \frac{1+2e^x+e^{2x}-4e^x}{4(1+e^x)^2}$$

$$g'(x) = \frac{(e^x - 1)^2}{4(1+e^x)^2}$$

ب) جدول تغيرات الدالة g .

$$. g'(x) = 0 \text{ يعني } (e^x - 1)^2 = 0 \text{ يعني } x = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

ج) استنتاج إشارة g على $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

(د) استنتاج الوضعية النسبية للمنحني (C) و المستقيم T .

ندرس اشارة الفرق : $f(x) - y = -g(x)$.

(C) فوق T على المجال $]-\infty; 0[$.

(C) تحت T على المجال $]0; +\infty[$.

(C) يقطع T في النقطة O .

(5) رسم T و (C) .

