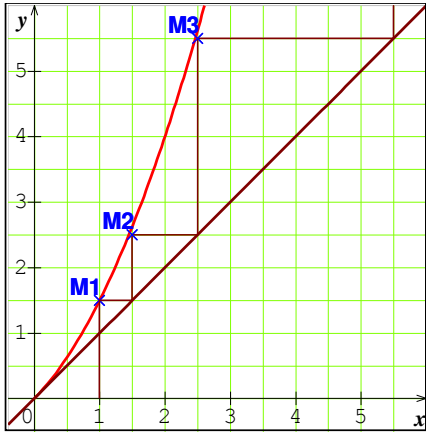
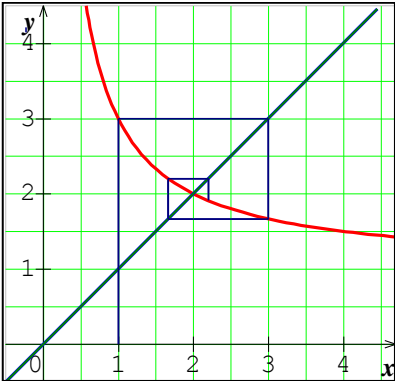


Bac 2019

## مجلة

# سند المجتهد في الرياضيات المتتاليات



تمت دراسة المتتاليات العددية الأولى من طرف اليونان ، مثل متتالية الأعداد الأولية.

أرخميدس قام بأعمال حول المتتاليات التي نهايتها تساوي  $\pi$  .  
في القرن الثالث عشر اكتشف الإيطالي **ليونارد فيبو ناتشي** المتتالية التراجعية البسيطة التي تحمل اسمه  $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$  مع  $u_0 = 1$  و  $u_1 = 1$  ، والتي تترجم تطور نمو تكاثر حيوانات .  
المتتاليات الحسابية و الهندسية ظهرت في أوروبا و في الصين في القرون الوسطى .

في عصر النهضة درست المتتاليات المعروفة لدينا اليوم .

## التحضير لشهادة البكالوريا

Math

من إعداد الاستاذة :  
أزرايب جميلة

- شعبة الرياضيات
- شعبة علوم تجريبية
- شعبة تقني رياضي

" لكي تنجح يجب على رغبتك بالنجاح أن تفوق خوفك من الفشل "

## ملخص : المتتاليات الحسابية والهندسية

### المتتاليات الهندسية

$(u_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q$

التعريف (العلاقة التراجعية):  $u_{n+1} = u_n \times q$

عبارة الحد العام :

حدها الأول  $u_0$  :  $u_n = u_0 \times q^n$

حدها الأول  $u_1$  :  $u_n = u_1 \times q^{n-1}$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية هندسية:

إذا كان  $q \neq 1$  :  $S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$

$$= u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$$

$$= u_p \times \frac{q^{n-p+1} - 1}{q - 1} \quad \text{أو}$$

إذا كان  $q = 1$  : معناه المتتالية ثابتة

$$u_p = u_{p+1} = \dots = u_n$$

$$S = u_p \times (n - p + 1) \quad \text{ومنه}$$

اتجاه التغير : إذا كان الحد الأول غير معدوم

$q < 0$  معناه المتتالية  $(u_n)$  غير رتيبة

$q = 1$  معناه المتتالية  $(u_n)$  ثابتة

$q > 0$  معناه المتتالية  $(u_n)$  رتيبة

ولمعرفة اتجاه تغيرها في هذه الحالة نختار طريقة مناسبة لذلك

(الفرق أو الدالة المرفقة  $u_n = f(n)$  أو المقارنة )

العلاقة بين حدين :  $\frac{u_m}{u_p} = q^{m-p}$

الوسط الهندسي :  $a$  ،  $b$  و  $c$  حدود متتابعة لمتتالية هندسية:

$$b^2 = a \times c$$

### المتتاليات الحسابية

$(u_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r$

التعريف (العلاقة التراجعية):  $u_{n+1} = u_n + r$

عبارة الحد العام :

حدها الأول  $u_0$  :  $u_n = u_0 + nr$

حدها الأول  $u_1$  :  $u_n = u_1 + (n-1)r$

حساب المجموع حدود متعاقبة من متتالية حسابية:

$$S = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$= \frac{n - p + 1}{2} (u_p + u_n)$$

اتجاه التغير : لنا  $u_{n+1} - u_n = r$  ومنه

$r = 0$  معناه المتتالية  $(u_n)$  ثابتة

$r > 0$  معناه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما

$r < 0$  معناه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما

العلاقة بين حدين :  $u_m - u_p = (m - p)r$

الوسط الحسابي :  $a$  ،  $b$  و  $c$  حدود متتابعة لمتتالية حسابية :

$$2b = a + c$$

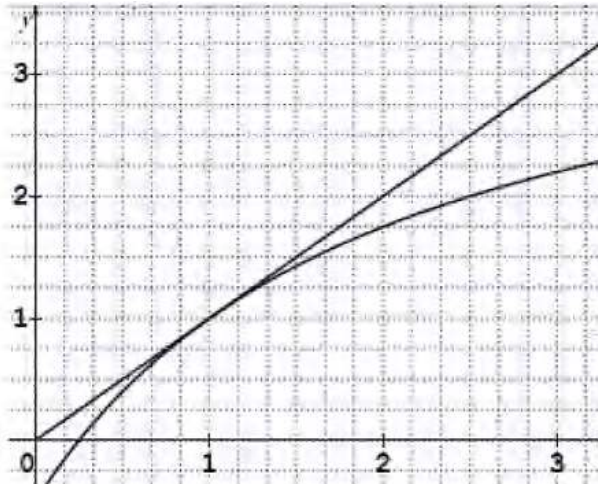
Bac 2019

إذا أنت لم تزرع ورأيت غيرك حاصداً ، ندمت على تقريطك أيام الزرع

### تمرين (1):

( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة على  $\square$  ب:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2}$

(1) الشكل المقابل هو تمثيل بياني للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; 5]$  ب:  $f(x) = \frac{4x-1}{x+2}$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$



(أ) مثل على حامل محور الفواصل الحدود :

$u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  و  $u_4$  دون حسابها .

(ب) أعط تخميناً حول اتجاه تغير وتقارب المتتالية ( $u_n$ ) .

(ج) برهن بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$

(د) أدرس اتجاه تغير المتتالية ( $u_n$ ) واستنتج أنها متقاربة ، عين نهايتها

(2) نعتبر المتتالية العددية ( $v_n$ ) المعرفة على  $\square$  ب:

$$v_n = \frac{1}{u_n - 1}$$

(أ) أحسب الحدود  $v_0$  ،  $v_1$  و  $v_2$  ، أعط تخمين حول طبيعة المتتالية ( $v_n$ ) ؟

(ب) برهن أن المتتالية ( $v_n$ ) حسابية أساسها  $\frac{1}{3}$  ثم أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  . أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) أحسب بدلالة  $n$  ، المجموع :  $S_n = u_n \cdot v_n + u_{n+1} \cdot v_{n+1} + u_{n+2} \cdot v_{n+2} + \dots + u_{n+2018} \cdot v_{2018}$

### تمرين (2):

لتكن ( $u_n$ ) المتتالية العددية المعرفة كمايلي ، من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2+3u_n^2}{1+3u_n} \end{cases}$$

① بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 - u_{n+1} = \frac{3u_n(2-u_n)}{1+3u_n}$

② برهن بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$

③ بين أن المتتالية ( $u_n$ ) متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

④ (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\frac{3u_n}{1+3u_n} < \frac{6}{7}$  ثم استنتج أن  $2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$

(ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$  ثم اوجد نهاية المتتالية ( $u_n$ ) .

### تمرين (3):

نعتبر المتتاليتين ( $u_n$ ) و ( $v_n$ ) المعرفتان ب:  $u_0 = 0$  و  $v_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$  و  $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$

1- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq 1 \leq v_n$  فان

2- بين أن المتتالية ( $t_n$ ) المعرفة على  $\square$  ب:  $t_n = v_n - u_n$  هندسية ثم استنتج نهايتها .

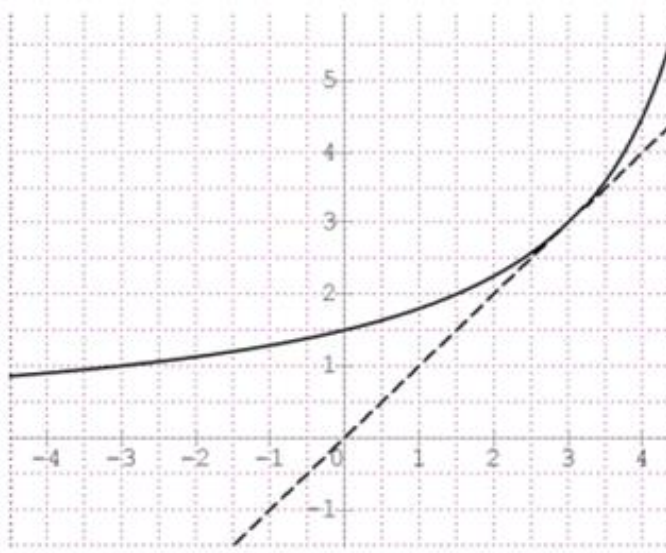
3- أثبت أن المتتاليتين ( $u_n$ ) و ( $v_n$ ) متجاورتان ووجد نهايتهما المشتركة .

#### تمرين (4) :

نعتبر الدالة العددية  $f$  المعرفة على المجال  $]-\infty; 6[$  بـ :  $f(x) = \frac{9}{6-x}$

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = -3$  و من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ، يعطى المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  و  $(C_f)$  التمثيل البياني للدالة  $f$  كما هو مبين في الشكل المقابل .



① أ) أعد رسم الشكل المقابل ثم مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  دون حسابها مبرزاً خطوط التمثيل

ب) ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وحول تقاربها

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n < 3$

③ أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$$

ب) استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

ج) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة

④ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$v_n = \frac{1}{u_n - 3}$$

أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$

ت) استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

#### تمرين (5) :

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ :  $u_0 = \frac{11}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 4$

① أحسب  $u_1$  و  $u_2$  .

② أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $u_n > 2$  .

ب - أدرس رقابة المتتالية  $(u_n)$  .

③ نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{Q}$  بـ :  $v_n = 4u_n + \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .

أ- عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- باستعمال قيمة  $\alpha$  المحصل عليها سابقاً ، أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج- هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

④ نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا :  $\frac{u_n}{4^n} = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n$  ثم استنتج بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  .

## تمرين (6):

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$   $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$

(1) في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  أرسم المستقيمين  $(D): y = \frac{2}{3}x + 1$  و  $(\Delta): y = x$ .

أ- مثل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$ . ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان  $u_n > 3$

ج- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج تقاربها.

(2) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، المتتالية  $(v_n)$  حيث :  $v_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$ .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$  يطلب تعيين حدها الأول .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $v_n = u_n - 3$  . استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

(3) لتكن  $(w_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $w_n = \ln(v_n)$

أ- بين أن  $(w_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب- ليكن المجموع :  $S_n = \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n}$  ، بين ان :  $S_n = 2\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} + n - 1$ .

## تمرين (7):

$f$  دالة عددية معرفة على  $]-3; 6]$  حيث :  $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$  و  $(C)$  تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  حيث :  $\|\vec{i}\| = 1cm$  و  $\|\vec{j}\| = 2cm$ .

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بعدها الأول  $u_0 = 6$  ومن أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فان  $u_{n+1} = f(u_n)$

① بين ان  $f$  متزايدة على المجال  $]-3; 6]$

② حل في المجال  $]-3; 6]$  المعادلة :  $f(x) = x$ .

③ أرسم المنحنى  $(C)$ .

④ مثل دون حساب الحدود  $u_0, u_1, u_2, u_3$  على حامل محور الفواصل ثم ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$

⑤ برهن بالتراجع أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فان :  $u_n > -2$

⑥ بين ان المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ثم استنتج أنها متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  حيث :  $v_n = \ln(u_n + 3)$

أ- بين ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  يطلب تعيين حدها الأول .

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ . أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

ج- لتكن  $(w_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{N}$  حيث :  $w_n = u_n + 3$

- أحسب بدلالة  $n$  الجداء  $p_n$  حيث :  $p_n = w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n$ .

## تمرين (8) :

✍ الدالة العددية المعرفة على  $[0; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 + 3}$

(1) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$ .

(2) بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $f(x) \geq 0$ .

✍ لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) احسب الحدين  $u_1$  و  $u_2$

(2) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ .

ب) استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

✍ لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n^2 - 1$

(1) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

(2) عبر عن  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

(3) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

(4) عبر عن المجاميع التالية بدلالة  $n$  :

$$S_n = (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1)$$

$$S'_n = (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n)$$

## تمرين (9) :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

① تحقق انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$ .

② أ) برهن انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < u_n < \frac{1}{2}$ .

ب) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$  ، ثم بين ان المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة

ج) هل  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة ؟ عين نهايتها .

③ نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

أ) أثبت ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 6.

ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج ان  $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$ .

ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

د) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$

## تمرين 10 :

$$(u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بحددها الاول } u_0 = \frac{1}{2} \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{u_n}{3-2u_n}$$

(1) أ- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$ .

ب- بين أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما ثم استنتج أنها متقاربة .

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$ .

أ- بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{3}$  وأحسب حددها الاول  $v_0$  .

ب- أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{1}{1+3^n}$ .

ج- احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

د - أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n}$

## تمرين (11) :

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة بـ : } u_0 = \alpha \text{ حيث } \alpha \text{ عدد حقيقي ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$$

I( عين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة .

II) فيما يلي نفرض أن  $u_0 = 3$  .

① أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  ، خمن اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

② برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq -4$

③ أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

④ هل  $(u_n)$  متقاربة ؟ حدد نهايتها .

لتكن  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n + 4$

أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحددها الاول .

ب) أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$  . أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

## تمرين (12) :

$$(u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{Q} \text{ بـ : } u_0 = 6 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$$

(1) أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$

(2) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 4$  .

(3) بين أن  $(u_n)$  متتالية متناقصة . هل  $(u_n)$  متتالية متقاربة ؟ عين نهايتها .

(4) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n - 4$

أ) بين أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحددها الاول  $v_0$  .

ب) أكتب عبارة الحد العام  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$

ج) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = 2\left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$  ، ثم أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د) أحسب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

### تمرين (13):

لنكن  $f$  دالة معرفة على المجال  $[0; 2]$  كمايلي :  $f(x) = -x^2 + 2x$  .  
- أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  .

لنكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الاول  $u_0 = \frac{1}{8}$  ومن اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$  .

① برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $0 < u_n < 1$  .

ب- بين أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة ، ماذا تستنتج ؟

② نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $v_n = 1 - u_n$

أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = (v_n)^2$  .

ب- برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج- أحسب نهاية  $u_n$  لما  $n$  يؤول الى  $+\infty$  .

### تمرين (14):

لنكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \\ eu_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \end{cases}$$

1) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $u_n \geq \frac{1}{2}$  .

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  واستنتج انها متقاربة .

لنكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي :  $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$  .

3) بين أن  $(v_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

4) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

5) أ- أحسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$

ب - أحسب المجموع  $T_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

### تمرين (15):

لنكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الاول  $u_0 = 3$  ومن اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3 - \frac{9}{4u_n}$  .

1) برهن بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

2) أدرس اتجاه تغير  $(u_n)$  ثم استنتج انها متقاربة .

3) لنكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$  .

أ) بين ان  $(v_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

4) أحسب بدلالة  $n$  ، المجموع :  $S_n = u_0v_0 + u_1v_1 + \dots + u_nv_n$

### تمرين (16):

$$(u_n) \text{ متتالية عددية حدها الاول } u_1 = \frac{1}{4} \text{ و من اجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n$$

① أ) احسب الحدود  $u_2$  و  $u_3$ .

ب) برهن أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > 0$

ج) أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج انها متقاربة وأحسب نهايتها.

② نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = n.2^n .u_n$

أ- بين أن  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_1$

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  وأثبت تقارب المتتالية  $(u_n)$ .

③ أحسب المجموع  $S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n$

• أحسب الجداء  $p_n = u_1 (2u_2) (3u_3) \dots (nu_n)$

### تمرين (17):

$$(u_n) \text{ المتتالية المعرفة كمايلي : } u_0 = 0, u_1 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+2} = \frac{2}{5} u_{n+1} - \frac{1}{25} u_n$$

نضع من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5} u_n$  و  $w_n = 5^n u_n$

① أ- بين ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$

ب- أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

② بين ان  $(w_n)$  متتالية حسابية أساسها 5 ، ثم عين  $w_n$  بدلالة  $n$ .

③ أحسب بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ .

④ أكتب  $u_n$  بدلالة  $n$ .

⑤ أ- بين انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$

ب- استنتج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج- استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$ .

### تمرين (18):

$$\text{لتكن الدالة } f \text{ المعرفة على } [0;1] \text{ بـ : } f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$$

① أ) أدرس تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0;1]$ .

ب) استنتج أنه إذا كان  $x \in [0;1]$  فان  $f(x) \in [0;1]$ .

ج) مثل بيانيا المنحنى  $(C)$  الممثل للدالة  $f$  في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$  ( الوحدة 10cm ).

② نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بـ :  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} = f(u_n)$

أ) باستعمال المنحنى  $(C)$  عين على حامل محور الفواصل الحدود :  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$

ب) أعط تخمينا حول اتجاه وتقارب المتتالية  $(u_n)$

③ أ) برهن انه من اجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n \leq 1$

ب) بين ان :  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

ج) هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟ برر اجابتك .

④ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) برهن أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

ب) أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

ج) استنتج نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

**تمرين (19):**

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_0 = 3$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1+u_n^2}{2}}$  .

1) أ- أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  ، ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

ب - بين أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تها على  $\mathbb{N}$  .

ج - استنتج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، ثم أحسب نهايتها .

2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $v_n = u_n^2 - 1$  .

أ- بين انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2v_{n+1} = v_n$  .

ب - استنتج أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  .

ج - أكتب بدلالة  $n$  ، كلا من  $v_n$  و  $u_n$  ، ثم أحسب من جديد  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

3) أحسب بدلالة  $n$  كلا من  $S_n$  و  $T_n$  حيث :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$T_n = v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n$$

**تمرين (20):**

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة بدها الاول  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$  .

① أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  ،  $u_3$  و  $u_4$  .

② أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n \geq 4$  ،  $u_n \geq 0$  .

ب ) استنتج أنه من أجل كل  $n \geq 5$  ،  $u_n \geq n - 3$  .

ج ) أحسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

③ نعرف المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  كمايلي :  $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$  .

أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

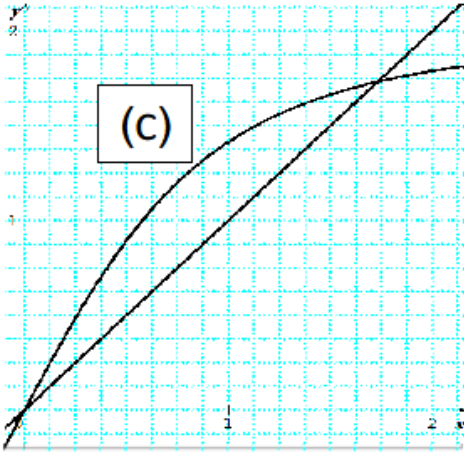
ب ) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  .

ج ) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{25}{4} \left( \frac{1}{3} \right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

④ نضع من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  و  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

- أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $T_n$  ثم استنتج المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  .

## تمرين (21):



الشكل المقابل هو التمثيل البياني (C) للدالة  $f$  المعرفة على المجال  $[0; +\infty[$

ب:  $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{x^2 + 1}}$  و  $(\Delta)$  المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  في المستوي

المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

1- أ) أدرس اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$ .

ب) بين أنه إذا كان  $x \in [1; \sqrt{3}]$  فإن  $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$ .

2-  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :

$$u_0 = 1 \text{ ومن أجل كل عدد طبيعي } n : u_{n+1} = f(u_n)$$

أ) باستعمال التمثيل البياني (C) والمستقيم  $(\Delta)$  ، مثل الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  على حامل محور الفواصل — دون حسابها — مبرزا خطوط التمثيل

ب) اعط تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .

3- أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$ .

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ .

ج) استنتج أن  $(u_n)$  متقاربة .

4-  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n : v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

أ) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

ب) أكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

5- أحسب  $P_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $P_n = \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)}$

## تمرين (22):

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $u_0 = 1$  ومن أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \alpha)$  ،  $\alpha$  من  $\mathbb{R}$

1- عين قيمة  $\alpha$  التي من أجلها تكون المتتالية  $(u_n)$  ثابتة .

لنعتبر في كل ما يأتي  $\alpha = -2$

2- برهن بالتراجع أنه من أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  فإن  $u_n \geq -2$  .

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ثم استنتج تقاربها .

4- لتكن  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_n + 2$

أ) أثبت أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$ .

ب) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$ .

ج) أحسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .

د) أحسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

### تمرين (23):

I -  $f$  الدالة العددية المعرفة على المجال  $[-6; +\infty[$  بـ :  $f(x) = \sqrt{x+6}$  وليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في المستوى المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس  $(O; \vec{i}; \vec{j})$ .

1- أدرس تغيرات الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها .

2- عين نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = x$  .

3 - أنشئ المنحنى  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  .

II - نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ  $u_0 = -1$  ومن أجل كل  $n$  من  $\mathbb{N}$  ،  $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 6}$  .

1- أ- مثل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  على حامل محور الفواصل مبرزاً خطوط التمثيل .

ب - ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها .

2- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $-2 < u_n < 3$  .

3- أدرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

4- برر تقارب المتتالية  $(u_n)$  ثم احسب نهايتها .

5- أ) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $|3 - u_{n+1}| \leq \frac{1}{5} |3 - u_n|$  ثم استنتج أن  $|3 - u_n| \leq \frac{2^2}{5^n}$  .

ب ) احسب نهاية المتتالية  $(u_n)$  مرة أخرى .

### تمرين (24):

I)  $(u_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $u_0 = \frac{1}{3}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$  .

1) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{1}{1+2u_n} \right)$  .

ب ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$  .

2) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}$  ، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  .

ب - بين ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ، ثم احسب نهايتها .

II)  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $v_n = \frac{1-u_n}{2u_n}$  .

1) بين ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الاول .

2) أكتب  $v_n$  بدلالة  $n$  واستنتج  $u_n$  بدلالة  $n$  ، ثم احسب من جديد نهاية المتتالية  $(u_n)$  .

3) احسب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  حيث :  $S = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_{n-1}}$  . واستنتج قيمة  $S_{2019}$  .

### تمرين (25):

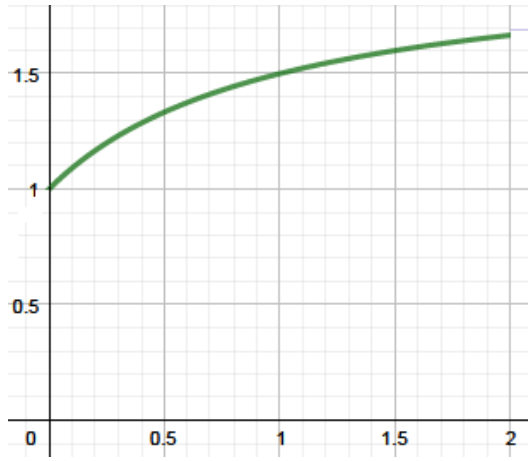
$(u_n)$  المتتالية العددية المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :  $u_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 5 - \frac{4}{u_n}$  .

1) احسب :  $u_1$  و  $u_2$  ثم برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 \leq u_n \leq 4$  .

2) بين أن  $(u_n)$  متزايدة ثم استنتج أنها متقاربة .

3) برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $4 - u_{n+1} \leq \frac{4 - u_n}{2}$  .

4) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq 4 - u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  ثم احسب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  .



I ( في الشكل المقابل التمثيل البياني للدالة  $f$  المعرفة على

$$f(x) = \frac{2x+1}{x+1} \quad \text{المجال } [0; 2] \text{ ب:}$$

① أدرس اتجاه تغير  $f$  على المجال  $[0; 2]$ .

② بين أنه من أجل كل  $x \in [1; 2]$  فإن  $f(x) \in [1; 2]$ .

II (  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متتاليتان معرفتان على  $\square$  ب:

$$\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = f(v_n) \end{cases} \quad \text{و} \quad \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

① (أ) انشئ على حامل محور الفواصل الحدود الثلاثة الاولى مبرزا خطوط الاسقاط.

ب ( خمن اتجاه تغير وتقارب كل من المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  .

② (أ) برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq v_n \leq 2$  .

- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} \leq v_n$  .

ب ( برهن بالتراجع :

- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq 2$  .

- من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq u_{n+1}$  .

③ (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{v_n - u_n}{(v_n + 1)(u_n + 1)}$  .

ب ( استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n - u_n \geq 0$  و  $v_{n+1} - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(v_n - u_n)$  .

ج ( بين أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n - u_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$  .

د ( بين أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متقاربتين نحو نفس العدد الحقيقي  $\alpha$  . حدد القيمة المضبوطة ل  $\alpha$  .

لتكن  $(u_n)$  متتالية معرفة يحددها الاول  $u_0 = 0$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2 - u_n}$  .

① أحسب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  وأكتبها على شكل كسر غير قابل للاختزال .

② قارن الحدود الاربعة الاولى من المتتالية  $(u_n)$  مع الحدود الاربعة الاولى من المتتالية  $(w_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ب:

$$w_n = \frac{n}{n+1}$$

③ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n = w_n$  .

لتكن  $(v_n)$  المتتالية المعرفة ب:  $v_n = \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)$  .

① برهن أن :  $v_1 + v_2 + v_3 = -\ln(4)$  .

② (أ) ليكن المجموع  $S_n$  المعرف من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$  . أكتب  $S_n$  بدلالة  $n$  .

ب ( أحسب نهاية  $S_n$  لما  $n$  يؤول الى  $+\infty$  .

## تمرين 28 :

➡  $f$  دالة معرفة على المجال  $[2; +\infty[$  كمايلي :  $f(x) = \frac{x^3 + 2}{x^2 + 1}$

- بين انه من أجل كل  $[2; +\infty[$  فان :  $f'(x) = \frac{x^4 + x^2 + 2x(x-2)}{(x^2 + 1)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  على المجال  $[2; +\infty[$ .

➡  $(u_n)$  متتالية معرفة بـ :  $u_0 = \frac{5}{2}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = f(u_n)$

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2 < u_n < 3$ .

(2) بسط العبارة  $u_n^2 - \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$  ، ثم استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n^2 < \frac{9}{10}(u_n^2 + 1)$ .

(3) أثبت أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ، هل المتتالية  $(u_n)$  متقاربة ؟

(4) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - 2 = \frac{u_n^2}{u_n^2 + 1}(u_n - 2)$

(5) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < u_n - 2 < \left(\frac{9}{10}\right)^n$  ، ثم استنتج  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

## تمرين 29 :

I-  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_1 = e^2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n}{e}}$

① أحسب كل من  $u_2$  و  $u_3$

② أ- أثبت بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > \frac{1}{e}$

ب- بين انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  غير معدوم :  $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$

ج- تحقق ان  $(u_n)$  متناقصة ، ثم استنتج انها متقاربة .

II- نعتبر المتتالية  $(w_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  بـ :  $w_n = \frac{1 + \ln u_n}{2}$

① بين ان  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$

② أ- عبر عن  $w_n$  بدلالة  $n$  ثم استنتج ان  $u_n = e^{6\left(\frac{1}{2}\right)^n - 1}$

ب- أحسب نهاية  $(u_n)$ .

## تمرين 30 :

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة بحددها الأول  $u_0 = e$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$

ولتكن  $(v_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ :  $v_n = \ln(u_n)$

(1) أثبت ان  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_0$

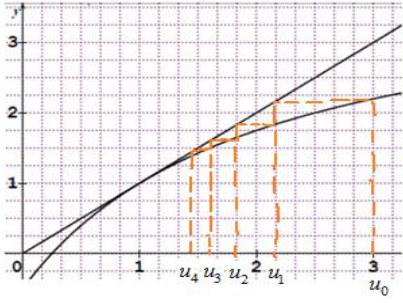
(2) أوجد عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$

(3) من أجل كل عدد طبيعي  $n$  نضع :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n$  ،  $P_n = u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n$

- أثبت انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $P_n = e^{S_n}$

(4) استنتج عبارة  $P_n$  بدلالة  $n$  . أوجد نهاية  $S_n$  ثم استنتج نهاية  $P_n$  لها  $n$  يؤول الى  $+\infty$  .

## حل التمرين 1 :



(أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .

(ب) التخمين حول اتجاه التغير وتقاربها:

من تمثيل الحدود يبدو أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ومقاربة .

(ج) البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_n > 1$

طريقة أولى: كتابة  $u_{n+1}$  من الشكل  $a + \frac{b}{u_n + 2}$  .

$$\text{لدينا: } a + \frac{b}{u_n + 2} = \frac{a(u_n + 2) + b}{u_n + 2} = \frac{au_n + 2a + b}{u_n + 2}$$

$$\text{بالمطابقة نجد: } \begin{cases} a = 4 \\ b = -9 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} a = 4 \\ 2a + b = -1 \end{cases} \text{ وعليه: } u_{n+1} = 4 - \frac{9}{u_n + 2}$$

من أجل  $n = 0: u_0 = 3 > 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي:  $u_n > 1$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي:  $u_{n+1} > 1$ )

$$\text{لدينا: } u_n > 1 \text{ تكافئ: } u_n + 2 > 3 \text{ تكافئ: } \frac{1}{u_n + 2} < \frac{1}{3} \text{ تكافئ: } \frac{-9}{u_n + 2} > -3 \text{ تكافئ: } 4 - \frac{9}{u_n + 2} > 1 \text{ ومنه: } u_{n+1} > 1$$

ومنه: الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن: من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_n > 1$  .

طريقة ثانية:

من أجل  $n = 0: u_0 = 3 > 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ( $u_n > 1$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  ( $u_{n+1} > 1$  أي  $u_{n+1} - 1 > 0$ )

$$u_{n+1} - 1 = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1 = \frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2} = \frac{3u_n - 3}{u_n + 2} = \frac{3(u_n - 1)}{u_n + 2}$$

بما أن:  $u_n > 1$  فإن  $3(u_n - 1) > 0$  و  $u_n + 2 > 0$  ومنه  $u_{n+1} - 1 > 0$  ومنه  $u_{n+1} > 1$

ومنه: الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن: من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_n > 1$  .

(د) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$ : ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - u_n = \frac{4u_n - 1 - u_n(u_n + 2)}{u_n + 2} = \frac{4u_n - 1 - u_n^2 - 2u_n}{u_n + 2} = \frac{-u_n^2 + 2u_n - 1}{u_n + 2} = \frac{-(u_n - 1)^2}{u_n + 2}$$

بما أن  $u_n > 1$  فإن  $u_n + 2 > 0$  و  $-(u_n - 1)^2 < 0$  اذن  $u_{n+1} - u_n < 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  .

استنتاج أنها مقاربة: المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي مقاربة .

حساب النهاية: بما أن المتتالية  $(u_n)$  مقاربة فانه يوجد عدد حقيقي  $l$  حيث:  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\text{لنا: } \frac{4l - 1}{l + 2} = l \text{ تكافئ: } 4l - 1 = l(l + 2) \text{ تكافئ: } 4l - 1 = l^2 + 2l \text{ تكافئ: } l^2 - 2l + 1 = 0 \text{ تكافئ: } (l - 1)^2 = 0$$

$$\text{تكافئ: } l = 1 \text{ ومنه: } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

(أ) حساب الحدود:

$$v_2 = \frac{1}{u_2 - 1} = \frac{1}{4 \times \frac{11}{5} - 1} = \frac{1}{\frac{13}{5} - 1} = \frac{5}{3} , \quad v_1 = \frac{1}{u_1 - 1} = \frac{1}{4 \times 3 - 1} = \frac{1}{11 - 1} = \frac{1}{10} , \quad v_0 = \frac{1}{u_0 - 1} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

اعطاء تخمين حول طبيعة المتتالية : نلاحظ أن  $v_1 - v_0 = v_2 - v_1 = \frac{1}{3}$  فنخمن أن  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{1}{3}$ .

ب) البرهان أن المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها  $\frac{1}{3}$ :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1}{u_n + 2} - 1} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{4u_n - 1 - u_n - 2}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{1}{\frac{3u_n - 3}{u_n + 2}} - \frac{1}{u_n - 1} \\ &= \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{1}{u_n - 1} = \frac{u_n + 2}{3(u_n - 1)} - \frac{3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n + 2 - 3}{3(u_n - 1)} = \frac{u_n - 1}{3(u_n - 1)} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$ :

$$v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n \quad \text{لدينا: } v_n = v_0 + nr \quad \text{ومنه: } v_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}n$$

كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$ :

$$u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1 \quad \text{لدينا: } v_n = \frac{1}{u_n - 1} \quad \text{تكافئ: } \frac{1}{v_n} = u_n - 1 \quad \text{تكافئ: } u_n = \frac{1}{v_n} + 1 \quad \text{ومنه: } u_n = \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + 1 = 0 + 1 = 1 \quad \text{حساب نهاية المتتالية } (u_n)$$

(3) حساب المجموع  $S_n$ :  $v_n = \frac{1}{u_n - 1}$  تكافئ:  $v_n(u_n - 1) = 1$  تكافئ:  $v_n u_n - v_n = 1$  تكافئ:  $v_n u_n = v_n + 1$  ومنه:

$$\begin{aligned} S_n &= u_n \cdot v_n + u_{n+1} \cdot v_{n+1} + u_{n+2} \cdot v_{n+2} + \dots + u_{n+2018} \cdot v_{n+2018} \\ &= v_n + 1 + v_{n+1} + 1 + v_{n+2} + 1 + \dots + v_{n+2018} + 1 \\ &= v_n + v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+2018} + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= \frac{n + 2018 - n + 1}{2} (v_n + v_{n+2018}) + 1 \times (n + 2018 - n + 1) \\ &= \frac{2019}{2} \left( \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}n} + \frac{1}{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}(n+2018)} \right) + 2019 \\ &= \frac{2019}{2} \left( 1 + \frac{2}{3}n + \frac{2018}{3} \right) + 2019 \\ &= \frac{2019}{2} + \frac{2019}{3}n + \frac{2037171}{3} + 2019 \\ &= 673n + \frac{4092513}{6} = 673n + \frac{1364171}{2} \end{aligned}$$

**حل التمرين 2:**

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} \end{cases} \quad \text{لدينا: } (u_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة كمايلي، من اجل كل عدد طبيعي } n$$

$$\textcircled{1} \text{ بيان انه من اجل كل عدد طبيعي } n: 2 - u_{n+1} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$$

$$2 - u_{n+1} = 2 - \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{2(1 + 3u_n) - (2 + 3u_n^2)}{1 + 3u_n} = \frac{2 + 6u_n - 2 - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{6u_n - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n}$$

$$\textcircled{2} \text{ البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي } n: 0 < u_n < 2$$

من اجل  $n = 0$ :  $0 < u_0 = 1 < 2$  محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $0 < u_n < 2$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $0 < u_{n+1} < 2$ )

$$\begin{cases} u_{n+1} > 0 \\ u_{n+1} < 2 \end{cases} \text{ لدينا : } 0 < u_{n+1} < 2 \text{ تكافئ :}$$

لدينا :  $0 < u_n < 2$  إذن :  $2 + 3u_n^2 > 0$  و  $1 + 3u_n > 0$  ومنه :  $\frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} > 0$  وبالتالي :  $u_{n+1} > 0$  ..... (1)

لدينا :  $0 < u_n < 2$  ومنه :  $2 - u_n > 0$  و  $3u_n > 0$  و  $1 + 3u_n > 0$  ومنه :  $\frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n} > 0$

ومنه :  $2 - u_{n+1} > 0$  أي :  $u_{n+1} < 2$  ..... (2)

من (1) و (2) نجد :  $0 < u_{n+1} < 2$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

إذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 2$ .

③ بيان أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2 + 3u_n^2}{1 + 3u_n} - u_n = \frac{2 + 3u_n^2 - u_n(1 + 3u_n)}{1 + 3u_n} = \frac{2 + 3u_n^2 - u_n - 3u_n^2}{1 + 3u_n} = \frac{2 - u_n}{1 + 3u_n}$$

لدينا :  $0 < u_n < 2$  إذن :  $2 - u_n > 0$  و  $1 + 3u_n > 0$  أي :  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$ .

استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة : لدينا  $(u_n)$  متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 2 فهي متقاربة .

$$\textcircled{4} \text{ أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي } n : \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7} \text{ (نبين أن } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} < 0 \text{)}$$

$$\frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} = \frac{7 \times 3u_n - 6(1 + 3u_n)}{7(1 + 3u_n)} = \frac{21u_n - 6 - 18u_n}{7(1 + 3u_n)} = \frac{-6 + 3u_n}{7(1 + 3u_n)} = \frac{-3(2 - u_n)}{7(1 + 3u_n)}$$

$$\text{لدينا } 0 < u_n < 2 \text{ إذن : } 2 - u_n > 0 \text{ و } 7(1 + 3u_n) > 0 \text{ و } -3 < 0 \text{ ومنه } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} - \frac{6}{7} < 0 \text{ معناه } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$$

الاستنتاج :

$$\text{لدينا : } \frac{3u_n}{1 + 3u_n} < \frac{6}{7}$$

$$\text{بما أن : } 2 - u_n > 0 \text{ فإن : } \frac{3u_n(2 - u_n)}{1 + 3u_n} < \frac{6(2 - u_n)}{7} \text{ ومنه : } 2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$$

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$

$$\text{لدينا : } 2 - u_{n+1} < \frac{6}{7}(2 - u_n)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 2 - u_1 < \frac{6}{7}(2 - u_0) : n=0 \text{ من أجل} \\ 2 - u_2 < \frac{6}{7}(2 - u_1) : n=1 \text{ من أجل} \\ 2 - u_3 < \frac{6}{7}(2 - u_2) : n=2 \text{ من أجل} \\ \vdots \\ 2 - u_n < \frac{6}{7}(2 - u_{n-1}) : n-1 \text{ من أجل} \end{array} \right.$$

بضرب المتباينات نجد :  $(2 - u_0) \left(\frac{6}{7}\right)^{n-0+1} > 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n (2 - 1)$  أي :  $2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$  ومنه :  $2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$

نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2 \text{ ومنه } \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 - u_n = 0 \text{ أي } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{6}{7}\right)^n = 0 \text{ و } 0 < 2 - u_n < \left(\frac{6}{7}\right)^n$$

### حل التمرين 3:

لدينا المتتاليتان  $(u_n)$  و  $(v_n)$  المعرفتان بـ:  $u_0 = 0$  و  $v_0 = 2$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4}$  و  $v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4}$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq 1 \leq v_n$  فان  $n=0$  :  $u_0 = 0 \leq 1 \leq v_0 = 2$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n \leq 1 \leq v_n$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}$ )

$$\text{لنا : } u_n \leq 1 \leq v_n \text{ تكافئ : } 3u_n + 1 \leq 3 \times 1 + 1 \leq 3v_n + 1 \text{ تكافئ : } \frac{3u_n + 1}{4} \leq \frac{3 \times 1 + 1}{4} \leq \frac{3v_n + 1}{4}$$

$$\text{تكافئ : } \frac{3u_n + 1}{4} \leq 1 \leq \frac{3v_n + 1}{4} \text{ ومنه : } u_{n+1} \leq 1 \leq v_{n+1}$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq 1 \leq v_n$  .

(2) بيان أن المتتالية  $(t_n)$  المعرفة على  $t_n = v_n - u_n$  هندسية.

$$t_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4} = \frac{3v_n + 1 - 3u_n - 1}{4} = \frac{3v_n - 3u_n}{4} = \frac{3(v_n - u_n)}{4} = \frac{3}{4}t_n$$

ومنه  $(t_n)$  هندسية أساسها  $\frac{3}{4}$  .

استنتاج نهاية  $(t_n)$  : لدينا :  $t_0 = v_0 - u_0 = 2 - 0 = 2$  ومنه :  $t_n = t_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

$$\text{ومنه : } \lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 2 \times 0 = 0$$

(3) اثبات أن المتتاليتين  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان وإيجاد نهايتهما المشتركة :

$$\text{لدينا } u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{4} - u_n = \frac{3u_n + 1 - 4u_n}{4} = \frac{1 - u_n}{4} \geq 0 \text{ لان } u_n \leq 1 \text{ ومنه } (u_n) \text{ متزايدة تماما على } \mathbb{N}.$$

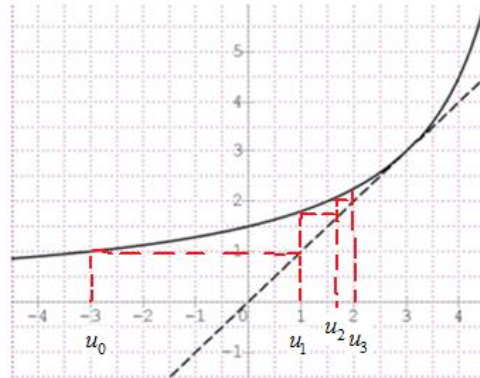
$$\text{ولنا : } v_{n+1} - v_n = \frac{3v_n + 1}{4} - v_n = \frac{3v_n + 1 - 4v_n}{4} = \frac{1 - v_n}{4} \leq 0 \text{ لان } v_n \geq 1 \text{ ومنه } (v_n) \text{ متناقصة تماما على } \mathbb{N}.$$

ولنا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$  ومنه  $(u_n)$  و  $(v_n)$  متجاورتان .

استنتاج النهاية : لدينا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \leq 1 \leq v_n$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

### حل التمرين 4:

① أ) تمثيل الحدود :



ب) التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :

انطلاقا من تمثيل الحدود نخمن أن  $(u_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$  و متقاربة .

ج ( البرهان بالتراجع على انه من اجل كل عدد طبيعي  $n: u_n < 3$

من اجل  $n=0: 3 > -3 = u_0$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n < 3$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} < 3$  )

لدينا :  $u_n < 3$  تكافئ :  $-u_n > -3$  تكافئ :  $6-u_n > 3$  تكافئ :  $\frac{1}{6-u_n} < \frac{1}{3}$  تكافئ :  $\frac{9}{6-u_n} < \frac{9}{3}$  ومنه :  $u_{n+1} < 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من اجل كل عدد طبيعي  $n: u_n < 3$  .

③ (أ) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_{n+1} - u_n = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{9}{6 - u_n} - u_n = \frac{9 - u_n(6 - u_n)}{6 - u_n} = \frac{9 - 6u_n + u_n^2}{6 - u_n} = \frac{(u_n - 3)^2}{6 - u_n}$$

لدينا : (ب) استنتاج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا :  $u_n < 3$  اذن :  $6 - u_n > 0$  ولنا  $(u_n - 3)^2 > 0$  اذن  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه  $(u_n)$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  .

ج) استنتاج أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة : المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد 3 فهي متقاربة .

④ لدينا المتتالية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n: v_n = \frac{1}{u_n - 3}$

(أ) بيان ان  $(v_n)$  متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9}{6 - u_n} - 3} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 3(6 - u_n)}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{1}{\frac{9 - 18 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} \\ &= \frac{1}{\frac{-9 + 3u_n}{6 - u_n}} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{-9 + 3u_n} - \frac{1}{u_n - 3} = \frac{6 - u_n}{3(u_n - 3)} - \frac{3}{3(u_n - 3)} = \frac{6 - u_n - 3}{3(u_n - 3)} = \frac{-u_n + 3}{3(u_n - 3)} = \frac{-(u_n - 3)}{3(u_n - 3)} = \frac{-1}{3} \end{aligned}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \frac{-1}{3}$

حساب حدها الأول :

$$v_0 = \frac{1}{u_0 - 3} = \frac{1}{-3 - 3} = \frac{-1}{6}$$

ب) التعبير عن  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = v_0 + nr = \frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n$$

ت) استنتاج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لدينا : } v_n = \frac{1}{u_n - 3} \text{ تكافئ : } \frac{1}{v_n} = u_n - 3 \text{ تكافئ : } u_n = \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3 \text{ ومنه : } u_n = \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3$$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{-1}{6} - \frac{1}{3}n} + 3 = 0 + 3 = 3$$

( $u_n$ ) متتالية عددية معرفة بـ:  $u_0 = \frac{11}{4}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 3u_n - 4$ .

(1) حساب  $u_1$  و  $u_2$  :  $u_1 = 3u_0 - 4 = 3 \times \frac{11}{4} - 4 = \frac{17}{4}$  و  $u_2 = 3u_1 - 4 = 3 \times \frac{17}{4} - 4 = \frac{35}{4}$

(2) أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n > 2$

من أجل  $n=0$  :  $u_0 = \frac{11}{4} > 2$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n > 2$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} > 2$ )

لدينا :  $u_n > 2$  تكافئ :  $3u_n > 6$  تكافئ :  $3u_n - 4 > 2$  ومنه  $u_{n+1} > 2$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n > 2$ .

ب - دراسة رقابة المتتالية ( $u_n$ ) :

لدينا المتتالية العددية ( $v_n$ ) المعرفة على  $v_n = 4u_n + \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي .

(3) تعيين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  حتى تكون المتتالية ( $v_n$ ) هندسية وتعيين أساسها وحدها الأول :

أ-  $v_{n+1} = 4u_{n+1} + \alpha = 4(3u_n - 4) + \alpha = 12u_n - 16 + \alpha = 3(4u_n + \alpha) - 3\alpha + \alpha - 16 = 3v_n - 2\alpha - 16$

لدينا  $v_{n+1} = 3v_n - 2\alpha - 16$  حتى تكون المتتالية ( $v_n$ ) هندسية أساسها 3 من أجل  $-2\alpha - 16 = 0$  أي :  $\alpha = -8$ .

حساب الحد الأول :  $v_0 = 4u_0 - 8 = 4 \times \frac{11}{4} - 8 = 3$

ب - كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = 3 \times 3^n = 3^{n+1}$

• استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  : لدينا :  $v_n = 4u_n - 8$  تكافئ :  $u_n = \frac{v_n + 8}{4}$  ومنه :  $u_n = \frac{3^{n+1} + 8}{4}$

ج - دراسة تقارب المتتالية ( $u_n$ ) : لنا  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^{n+1} + 8}{4} = +\infty$  ومنه المتتالية ( $u_n$ ) متباعدة.

(4) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  لدينا :  $\frac{u_n}{4^n} = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n$

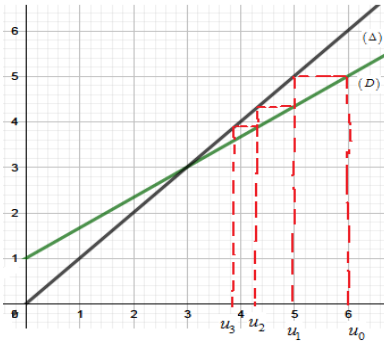
$$\frac{u_n}{4^n} = \frac{\frac{3^{n+1} + 8}{4}}{4^n} = \frac{3^{n+1} + 8}{4} \times \frac{1}{4^n} = \frac{3^{n+1}}{4^{n+1}} + \frac{8}{4^{n+1}} = \frac{3 \times 3^n}{4 \times 4^n} + \frac{8}{4 \times 4^n} = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + \frac{2}{4^n} = \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + 2 \times \left( \frac{1}{4} \right)^n$$

حساب المجموع :  $S_n = \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n}$

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_0}{4^0} + \frac{u_1}{4^1} + \frac{u_2}{4^2} + \dots + \frac{u_n}{4^n} \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^0 + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^0 + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^1 + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^1 + \dots + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n \\ &= \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^0 + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^1 + \dots + \frac{3}{4} \left( \frac{3}{4} \right)^n + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^0 + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^1 + \dots + 2 \left( \frac{1}{4} \right)^n \\ &= \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} + 2 \times \frac{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{1 - \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1}}{\frac{1}{4}} + 2 \times \frac{1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} \\ &= 3 \times \left( 1 - \left( \frac{3}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{8}{3} \times \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) \end{aligned}$$

## حل التمرين 6 :

لدينا المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  ب:  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$   $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1$



(1) أ- التمثيل على حامل محور الفواصل الحدود  $u_0, u_1, u_2$  و  $u_3$  :

(2) وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$  ومتقاربة .

ب - البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_n > 3$

من أجل  $n=0: u_0 = 6 > 3$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n > 3$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} > 3$  )

لدينا :  $u_n > 3$  تكافئ :  $\frac{2}{3}u_n > 2$  تكافئ :  $\frac{2}{3}u_n + 1 > 3$  ومنه :  $u_{n+1} > 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n: u_n > 3$  .

ج - دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  : ندرس إشارة الفرق  $u_{n+1} - u_n$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + 1 - u_n = \frac{-1}{3}u_n + 1 = \frac{3 - u_n}{3}$$

بما أن  $u_n > 3$  فإن  $3 - u_n < 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$  .

• استنتاج أنها متقاربة : لدينا  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{N}$  ومحدودة من الأسفل بالعدد 3 هي متقاربة .

(3) نعتبر من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ، المتتالية  $(v_n)$  حيث :  $v_n = 2^n \cdot 3^{1-n}$  .

أ- بيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{2}{3}$  وتعيين حدها الأول :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2^{n+1} \times 3^{1-(n+1)}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^{n+1} \times 3^{-n}}{2^n \times 3^{1-n}} = \frac{2^n \times 2 \times 3^{-n}}{2^n \times 3 \times 3^{-n}} = \frac{2}{3}$$

ومنه  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{2}{3}$

• تعيين الحد الأول  $v_0$  :  $v_0 = 2^0 \cdot 3^{1-0} = 3$

ب- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 3$  .

من أجل  $n=0: v_0 = u_0 - 3$  أي :  $3 = 6 - 3$  ومنه  $3 = 3$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (  $v_n = u_n - 3$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (  $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$  )

لدينا :  $v_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^{1-(n+1)}$  تكافئ :  $v_{n+1} = 2^{n+1} \cdot 3^{-n}$  ..... (1)

ومن جهة أخرى لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 3 &= \frac{2}{3}u_n + 1 - 3 = \frac{2}{3}(v_n + 3) - 2 = \frac{2}{3}(2^n \times 3^{1-n} + 3) - 2 \\ &= \frac{2^{n+1} \times 3^{1-n} + 6}{3} - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n} + 2 - 2 = 2^{n+1} \times 3^{-n} \end{aligned}$$

أي :  $u_{n+1} - 3 = 2^{n+1} \times 3^{-n}$  ..... (2)

من (1) و (2) نجد :  $v_{n+1} = u_{n+1} - 3$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n - 3$  .

● استنتاج النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (v_n + 3) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ 3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n + 3 \right] = 3 \times 0 + 3 = 3$$

(4) لتكن  $(w_n)$  متتالية معرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $w_n = \ln(v_n)$

أ- بيان أن  $(w_n)$  متتالية حسابية يطلب وتعيين أساسها وحدها الاول :

$$\begin{aligned} w_{n+1} &= \ln(v_{n+1}) = \ln \left( 3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^{n+1} \right) = \ln \left( 3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n \times \frac{2}{3} \right) \\ &= \ln \left( 3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n \right) + \ln \left( \frac{2}{3} \right) = \ln(v_n) + \ln \left( \frac{2}{3} \right) = w_n + \ln \left( \frac{2}{3} \right) \end{aligned}$$

ومنه المتتالية  $(w_n)$  متتالية حسابية أساسها  $r = \ln \left( \frac{2}{3} \right)$ .

$$\frac{u_n}{v_n} = \frac{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n + 3}{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n} = \frac{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n}{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n} + \frac{3}{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n} = 1 + \frac{3}{3 \times \left( \frac{2}{3} \right)^n} = 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^n$$

ب- بيان ان :  $S_n = 2 \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} + n - 1$  لدينا :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{u_0}{v_0} + \frac{u_1}{v_1} + \frac{u_2}{v_2} + \dots + \frac{u_n}{v_n} = 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^0 + 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^1 + 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^2 + \dots + 1 + \left( \frac{3}{2} \right)^n \\ &= \left( \frac{3}{2} \right)^0 + \left( \frac{3}{2} \right)^1 + \left( \frac{3}{2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{3}{2} \right)^n + 1 + 1 + 1 + \dots + 1 \\ &= \left( \frac{3}{2} \right)^0 \times \frac{1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{2}} + 1 \times (n - 0 + 1) = \frac{1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1}}{-\frac{1}{2}} + (n+1) \\ &= -2 \times \left( 1 - \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} \right) + n + 1 = -2 + 2 \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} + n + 1 \\ &= 2 \left( \frac{3}{2} \right)^{n+1} + n - 1 \end{aligned}$$

**حل التمرين 7 :**

$f$  دالة عددية معرفة على  $]-3; 6]$  حيث :  $f(x) = -3 + \sqrt{x+3}$

① بيان ان  $f$  متزايدة على المجال  $]-3; 6]$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+3}} > 0 \quad : x \in ]-3; 6]$$

بما ان  $f'(x) > 0$  فان الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $]-3; 6]$ .

② تعيين الحلول في المجال  $]-3; 6]$  للمعادلة  $f(x) = x$  :

$$f(x) = x \quad \text{تكافئ} : -3 + \sqrt{x+3} = x \quad \text{تكافئ} : \sqrt{x+3} - (x+3) = 0$$

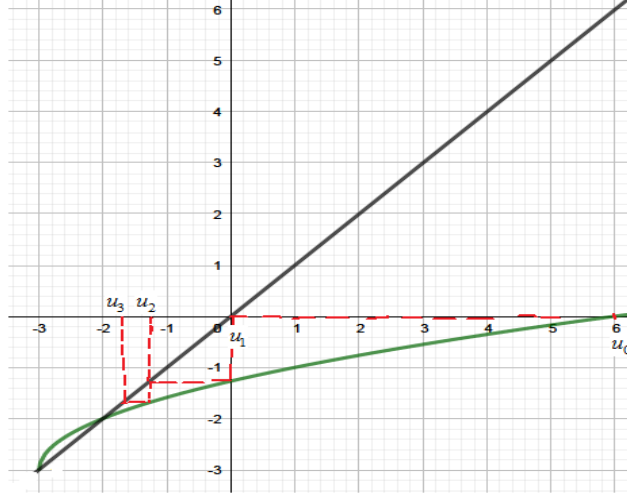
$$\frac{x+3 - (3+x)^2}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{(\sqrt{x+3} - (3+x))(\sqrt{x+3} + (3+x))}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0$$

$$\frac{-x^2 - 5x - 6}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{x+3 - 9 - 6x - x^2}{\sqrt{x+3} + (3+x)} = 0$$

$$\begin{cases} -x^2 - 5x - 6 = 0 \\ \sqrt{x+3} + (3+x) \neq 0 \end{cases} \text{ تكافئ :}$$

$$S = \{-3; -2\} : \text{أي : } \begin{cases} x_1 = \frac{-(-5)+1}{2(-1)} = -3 \\ x_2 = \frac{-(-5)-1}{2(-1)} = -2 \end{cases} \text{ حساب المميز } \Delta : \Delta = (-5)^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 1 \text{ ومنه :}$$

③ رسم المنحنى (C) : المنحنى (C) هو صورة لتمثيل الدالة مقلوب بانسحاب شعاعه  $\vec{v}(-3, -3)$ .



④ تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل : موضح في الشكل .

• التخمين حول اتجاه التغير والتقارب :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً ومتقاربة .

⑤ البرهان بالتراجع على أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > -2$

من أجل  $n=0 : u_0 = 6 > -2$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n > -2$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} > -2$ )

لدينا :  $u_n > -2$  تكافئ :  $u_n + 3 > 1$  تكافئ :  $\sqrt{u_n + 3} > 1$  تكافئ :  $-3 + \sqrt{u_n + 3} > -3 + 1$  ومنه :  $u_{n+1} > -2$  ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n : u_n > -2$

⑥ بيان أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة ثم استنتاج أنها متقاربة :

من السؤال (2) نجد

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = \frac{-u_n^2 - 5u_n - 6}{\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3)}$$

لنا  $\Delta = 1$  ،  $x_1 = -3$  ،  $x_2 = -2$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n + 3)(u_n + 2)}{\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3)}$$

بما أن :  $u_n > -2$  فإن  $u_n + 2 > 0$  و  $u_n + 3 > 0$  و  $-1 < 0$  و  $\sqrt{u_n + 3} + (u_n + 3) > 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{R}$  .

• استنتاج تقاربها :

المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماماً على  $\mathbb{R}$  ومحدودة من الأسفل بالعدد -2- اذن هي متقاربة .

⑦ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\square$  حيث :  $v_n = \ln(u_n + 3)$

أ- بيان ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  وتعيين حدها الأول :

$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1} + 3) = \ln(-3 + \sqrt{u_n + 3} + 3) = \ln(\sqrt{u_n + 3}) = \ln\left((u_n + 3)^{\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2} \ln(u_n + 3) = \frac{1}{2} v_n$$

• تعيين حدها الأول :  $v_0 = \ln(u_0 + 3) = \ln(6 + 3) = \ln(9) = \ln(3^2) = 2 \ln(3)$

ب- كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n$  وبالتالي  $v_n = 2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

• استنتاج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا  $v_n = \ln(u_n + 3)$  تكافئ :  $e^{v_n} = u_n + 3$  تكافئ :  $u_n = e^{v_n} - 3$  ومنه :  $u_n = e^{2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3$

• حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ e^{2 \ln(3) \times \left(\frac{1}{2}\right)^n} - 3 \right] = e^0 - 3 = 1 - 3 = -2$$

ج- حساب الجداء  $P_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا  $w_n = u_n + 3$  أي  $w_n = e^{v_n} - 3 + 3$  ومنه  $w_n = e^{v_n}$  ومنه :

$$\begin{aligned} P_n &= w_0 \times w_1 \times \dots \times w_n = e^{v_0} \times e^{v_1} \times \dots \times e^{v_n} = e^{v_0 + v_1 + \dots + v_n} \\ &= e^{2 \ln(3) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}}} = e^{2 \ln(3) \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}}} \\ &= e^{4 \ln(3) \times \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]} \end{aligned}$$

### حل التمرين 8 :

✍ الف الدالة العددية المعرفة على  $[0; +\infty[$  ب :  $f(x) = \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 3}$

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

$$f'(x) = \frac{1}{2} \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 3}} = \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 3}} : x \in [0; +\infty[$$

من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :  $f'(x) \geq 0$  لأن  $x \geq 0$  و  $2\sqrt{x^2 + 3} \geq 0$  على المجال  $[0; +\infty[$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$ .

(2) بيان أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  :  $f(x) \geq 0$

لدينا  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; +\infty[$  إذن من أجل كل  $x \in [0; +\infty[$  :

$$f(x) \geq f(0) \text{ أي } f(x) \geq \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وبالتالي : } f(x) \geq 0$$

✍ لتكن  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\square$  كمايلي :  $u_0 = 0$  و  $u_{n+1} = f(u_n)$

(3) حساب الحدين  $u_1$  و  $u_2$  :

$$u_2 = \frac{1}{2} \sqrt{u_1^2 + 3} = \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 3} = \frac{\sqrt{15}}{4} \quad \text{و} \quad u_1 = \frac{1}{2} \sqrt{u_0^2 + 3} = \frac{1}{2} \sqrt{0^2 + 3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(4) أ- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$

من أجل  $n = 0$  :  $0 \leq u_0 = \frac{\sqrt{3}}{2} < u_1 = \frac{\sqrt{15}}{4} < 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ ) ونبرهن على صحتها

من أجل  $n+1$  (أي :  $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$ )

لدينا :  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$  تكافئ :  $0 \leq u_n^2 < u_{n+1}^2 < 1$  تكافئ :  $3 \leq u_n^2 + 3 < u_{n+1}^2 + 3 < 4$

تكافئ :  $\sqrt{3} \leq \sqrt{u_n^2 + 3} < \sqrt{u_{n+1}^2 + 3} < 2$  تكافئ :  $\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 3} < \frac{1}{2} \sqrt{u_{n+1}^2 + 3} < 1$  ومنه :  $0 \leq u_{n+1} < u_{n+2} < 1$  ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

أذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$ .

ب — استنتاج ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة :

لدينا  $0 \leq u_n < u_{n+1} < 1$  أي  $u_n < u_{n+1}$  ومنه  $u_{n+1} - u_n > 0$  وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماما وكذلك محدودة من الاعلى بالعدد 1 إذن هي متقاربة .

● حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  : بما أن  $(u_n)$  متقاربة فإن  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

$$\left\{ \begin{array}{l} l^2 = 1 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 3l^2 = +3 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } \left\{ \begin{array}{l} 4l^2 = l^2 + 3 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } l = \frac{1}{2} \sqrt{l^2 + 3} \text{ تكافئ } 2l = \sqrt{l^2 + 3} \text{ تكافئ } l = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1 \text{ وبالتالي } l = 1 \text{ أي : } \left\{ \begin{array}{l} l = 1 \\ l \geq 0 \end{array} \right\} \text{ تكافئ } l = 1$$

👉 لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_n^2 - 1$

(5) بيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1} = (u_{n+1}^2 - 1) = \left( \frac{1}{2} \sqrt{u_n^2 + 3} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} (u_n^2 + 3) - 1 = \frac{1}{4} u_n^2 + \frac{3}{4} - 1 = \frac{1}{4} u_n^2 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (u_n^2 - 1) = \frac{1}{4} v_n$$

ومنه  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$ .

● تعيين حدها الاول :  $v_0 = u_0^2 - 1 = 0^2 - 1 = -1$

(6) التعبير عن  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه  $v_n = -\left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

● استنتاج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = u_n^2 - 1$  تكافئ :  $v_n + 1 = u_n^2$  تكافئ :  $u_n = \sqrt{v_n + 1}$  وبالتالي  $u_n = \sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1}$

(7) حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{-\left(\frac{1}{4}\right)^n + 1} = \sqrt{-0 + 1} = 1$$

(8) التعبير عن المجاميع التالية بدلالة  $n$  :

$$\begin{aligned} S_n &= (u_0 - 1)(u_0 + 1) + (u_1 - 1)(u_1 + 1) + (u_2 - 1)(u_2 + 1) + \dots + (u_n - 1)(u_n + 1) \\ &= u_0^2 - 1^2 + u_1^2 - 1^2 + u_2^2 - 1^2 + \dots + u_n^2 - 1^2 \\ &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \\ &= -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{4}} = -1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{\frac{3}{4}} \\ &= \frac{-4}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S'_n &= (u_0^2 - 0) + (u_1^2 - 1) + (u_2^2 - 2) + \dots + (u_n^2 - n) \\
&= (v_0 + 1 - 0) + (v_1 + 1 - 1) + (v_2 + 1 - 2) + \dots + (v_n + 1 - n) \\
&= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + 1 + 0 + (-1) + \dots + (1 - n) \\
&= S_n + \frac{n - 0 + 1}{2} (1 + 1 - n) \\
&= \frac{-4}{3} \times \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{(n+1)(2-n)}{2} \\
&= \frac{-4}{3} \times \left( 1 - \left( \frac{1}{4} \right)^{n+1} \right) + \frac{-n^2 + n + 2}{2}
\end{aligned}$$

### حل التمرين 9:

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  المعرفة بـ  $u_0 = \frac{1}{5}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$

① التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1}$

$$u_{n+1} = 1 - \frac{1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n + 1 - 1}{2u_n + 1} = \frac{2u_n}{2u_n + 1}$$

② أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < u_n < \frac{1}{2}$

من أجل  $n = 0$  :  $0 < u_0 = \frac{1}{5} < \frac{1}{2}$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ( أي :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  ( أي :  $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$  )

لدينا :  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  تكافئ :  $0 < 2u_n < 1$  تكافئ :  $1 < 2u_n + 1 < 2$  تكافئ :  $\frac{1}{2} < \frac{1}{2u_n + 1} < 1$

تكافئ :  $-1 < -\frac{1}{2u_n + 1} < -\frac{1}{2}$  تكافئ :  $1 - \frac{1}{2u_n + 1} < 1 - \frac{1}{2}$  تكافئ :  $0 < u_{n+1} < \frac{1}{2}$  ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $0 < u_n < \frac{1}{2}$

ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{2u_n + 1} - u_n = \frac{2u_n - u_n(2u_n + 1)}{2u_n + 1} = \frac{2u_n - 2u_n^2 - u_n}{2u_n + 1} = \frac{-2u_n^2 + u_n}{2u_n + 1} = \frac{u_n(1 - 2u_n)}{2u_n + 1}$$

• بيان ان المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة:

لنا  $0 < u_n < \frac{1}{2}$  تكافئ  $-2 \times \frac{1}{2} < -2u_n < -2 \times 0$  تكافئ  $1 - 2u_n > 0$  تكافئ  $1 - 2u_n < 1$  تكافئ  $1 - 2u_n < 1 - 0$  تكافئ  $0 < 1 - 2u_n$  اذن :

$1 - 2u_n > 0$  وكذلك  $2u_n + 1 > 0$  و  $u_n > 0$  وبالتالي  $u_{n+1} - u_n > 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة تماما على  $\mathbb{N}$

ج) استنتاج تقارب المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  :

المتتالية  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة لأنها متزايدة تماما ومحدودة من الاعلى بالعدد  $\frac{1}{2}$  .

• تعيين نهايتها :

بما أن  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متقاربة فان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

• بالتعويض نجد :  $l = \frac{2l}{2l+1}$  تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} l(2l+1) = 2l \\ 2l+1 \neq 0 \end{array} \right.$  و تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} 2l^2 + l = 2l \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$

تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} 2l^2 - l = 0 \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$  و تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} l(2l-1) = 0 \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$  و تكافئ  $\left\{ \begin{array}{l} l = 0 \\ l = \frac{1}{2} \\ l \neq \frac{-1}{2} \end{array} \right.$

بما ان  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  متزايدة تماما فان  $l = \frac{1}{2}$  وبالتالي  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$ .

③ نضع من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$

( ا ) اثبات ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها 6:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{3^{n+1} u_{n+1}}{2u_{n+1} - 1} = \frac{3^{n+1} \times \frac{2u_n}{2u_n + 1}}{2 \times \frac{2u_n}{2u_n + 1} - 1} = \frac{\frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n + 1}}{\frac{4u_n - 2u_n - 1}{2u_n + 1}} = \frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n + 1} \times \frac{2u_n + 1}{2u_n - 1} \\ &= \frac{3^{n+1} \cdot 2u_n}{2u_n - 1} = \frac{3^n \times 3 \times 2u_n}{2u_n - 1} = 6 \times \frac{3^n u_n}{2u_n - 1} = 6v_n \end{aligned}$$

( ب ) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

لنا  $v_n = v_0 \times q^n$  و  $v_0 = \frac{3^0 u_0}{2u_0 - 1} = \frac{1 \times \frac{1}{5}}{2 \times \frac{1}{5} - 1} = \frac{-1}{3}$  ومنه  $v_n = \frac{-1}{3} \times 6^n = \frac{-6^n}{3}$ .

• استنتاج ان  $u_n = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}}$  :

لدينا  $v_n = \frac{3^n u_n}{2u_n - 1}$  تكافئ  $v_n(2u_n - 1) = 3^n u_n$  تكافئ  $2u_n v_n - v_n = 3^n u_n$  تكافئ  $2u_n v_n - 3^n u_n = v_n$

تكافئ  $u_n(2v_n - 3^n) = v_n$  تكافئ  $u_n = \frac{v_n}{2v_n - 3^n}$

بالتعويض نجد :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{\frac{-6^n}{3}}{2 \times \frac{-6^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-(2 \times 3)^n}{3}}{2 \times \frac{-(2 \times 3)^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-2^n \times 3^n}{3}}{2 \times \frac{-2^n \times 3^n}{3} - 3^n} = \frac{\frac{-2^n \times 3^n}{3}}{\frac{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}}{3}} \\ &= \frac{-2^n \times 3^n}{3} \times \frac{3}{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}} = \frac{-2^n \times 3^n}{-2^{n+1} \times 3^n - 3^{n+1}} = \frac{-3^n \times 2^n}{-3^n(2^{n+1} + 3^1)} = \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}} \end{aligned}$$

( ج ) حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{3 + 2^{n+1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{2^n \left( \frac{3}{2^n} + 2^1 \right)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{3}{2^n} + 2} = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$$

د) حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n}$ .

$$\frac{1}{u_n} = \frac{3+2^{n+1}}{2^n} = \frac{3}{2^n} + \frac{2^{n+1}}{2^n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2$$

ومنه :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \dots + \frac{1}{u_n} = 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + 2 + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 \\ &= 3\left(\frac{1}{2}\right)^0 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^1 + \dots + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2 + 2 + \dots + 2 \\ &= 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 2(n+1) = 3 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + 2(n+1) \\ &= 6 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + 2(n+1) \end{aligned}$$

### حل التمرين 10 :

1- البرهان بالتراجع على انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $0 < u_n < 1$  :

من أجل  $n=0$  لنا :  $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي نبرهن من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_{n+1} < 1$ ).

لنا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $0 < u_n < 1$  ..... (1)

لدينا  $0 < u_n < 1$  أي  $-2 < -2u_n < 0$  ومنه :  $1 < 3 - 2u_n < 3$  ..... (2)

من (1) و (2) نجد :  $0 < \frac{u_n}{3-2u_n} < 1$  أي :  $0 < u_{n+1} < 1$ .

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $0 < u_n < 1$ .

ب) بيان ان  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n}{3-2u_n} - u_n = \frac{u_n - u_n(3-2u_n)}{3-2u_n} = \frac{u_n - 3u_n + 2u_n^2}{3-2u_n} = \frac{2u_n^2 - 2u_n}{3-2u_n} = \frac{2u_n(u_n - 1)}{3-2u_n}$$

لنا :  $0 < u_n < 1$  أي :  $2u_n > 0$  و  $-1 < u_n - 1 < 0$  أي :  $u_n - 1 < 0$  ولنا :  $1 < 3 - 2u_n < 3$  أي :  $3 - 2u_n > 0$

ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  أي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$ .

ج) استنتاج ان  $(u_n)$  متقاربة : لنا  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{Q}$  ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فهي متقاربة .

2- أ- بيان ان  $(v_n)$  هندسية اساسها  $q = \frac{1}{3}$  وحساب حدها الأول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{u_{n+1} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n}{3-2u_n} - 1} = \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{\frac{u_n - (3-2u_n)}{3-2u_n}} = \frac{u_n}{3u_n - 3} = \frac{1}{3} \times \frac{u_n}{u_n - 1} = \frac{1}{3} v_n$$

ومنه  $(v_n)$  هندسية اساسها  $q = \frac{1}{3}$ .

$$\text{حساب الحد الأول : } v_0 = \frac{u_0}{u_0 - 1} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - 1} = -1$$

ب - كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = -1 \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n$ .

استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا :  $v_n = \frac{u_n}{u_n - 1}$  تكافئ :  $v_n(u_n - 1) = u_n$  تكافئ :  $v_n u_n - v_n = u_n$  تكافئ :  $v_n u_n - u_n = v_n$  تكافئ :  $u_n(v_n - 1) = v_n$

$$u_n = \frac{-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{-\left(\frac{1}{3}\right)^n - 1} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^n}{\left(\frac{1}{3}\right)^n + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1}{3^n} + 1} = \frac{\frac{1}{3^n}}{\frac{1+3^n}{3^n}} = \frac{1}{3^n} \times \frac{3^n}{1+3^n} = \frac{1}{1+3^n}$$

تكافئ :  $u_n = \frac{v_n}{v_n - 1}$  ومنه :

ج - حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+3^n} = 0$  (لان :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ )

د - حساب المجموع  $S_n$  :

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{u_0} + \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2} + \dots + \frac{1}{u_n} = \frac{1}{\frac{1}{1+3^0}} + \frac{1}{\frac{1}{1+3^1}} + \dots + \frac{1}{\frac{1}{1+3^n}} \\ &= 1+3^0 + 1+3^1 + \dots + 1+3^n = 1+1+\dots+1+3^0+3^1+\dots+3^n \\ &= 1 \times (n-0+1) + 3^0 \times \frac{3^{n-0+1}-1}{3-1} = n+1 + \frac{3^{n+1}-1}{2} \\ &= n+1 + \frac{1}{2} \times (3^{n+1}-1) \end{aligned}$$

### حل التمرين 11 :

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة بـ :  $u_0 = \alpha$  حيث  $\alpha$  عدد حقيقي ومن اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n - 2$

I( تعيين قيمة العدد الحقيقي  $\alpha$  بحيث تكون  $(u_n)$  متتالية ثابتة :

$(u_n)$  متتالية ثابتة معناه  $u_{n+1} = u_n = \alpha$  ومنه  $u_{n+1} = u_n = \alpha$

بالتعويض نجد  $\alpha = \frac{1}{2}\alpha - 2$  تكافئ  $\frac{1}{2}\alpha = -2$  تكافئ  $\alpha = -4$ .

II) فيما يلي نفرض أن  $u_0 = 3$ .

① حساب  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  :

$$u_3 = \frac{1}{2}u_2 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-9}{4} - 2 = \frac{-25}{8} \text{ و } u_2 = \frac{1}{2}u_1 - 2 = \frac{1}{2} \times \frac{-1}{2} - 2 = \frac{-9}{4} \text{ و } u_1 = \frac{1}{2}u_0 - 2 = \frac{1}{2} \times 3 - 2 = \frac{-1}{2}$$

• تخمين اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

نلاحظ أن  $u_3 < u_2 < u_1$  فنحن أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

② البرهان بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $u_n \geq -4$

من اجل  $n = 0$  :  $u_0 = 3 \geq -4$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ( أي :  $u_n \geq -4$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  ( أي :  $u_{n+1} \geq -4$  )

$$\text{لدينا : } u_n \geq -4 \text{ تكافئ : } \frac{1}{2}u_n \geq -2 \text{ تكافئ : } \frac{1}{2}u_n - 2 \geq -4 \text{ ومنه } u_{n+1} \geq -4$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

اذن : من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $u_n \geq -4$ .

③ دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2}u_n - 2 - u_n = \frac{-1}{2}u_n - 2 = \frac{-u_n - 4}{2}$$

لنا  $u_n \geq -4$  تكافئ  $-u_n \leq 4$  تكافئ  $-u_n - 4 \leq 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

#### ④ استنتاج تقارب المتتالية $(u_n)$ :

لدينا  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\square$  ومحدودة من الاسفل بالعدد -4 فهي متقاربة .

● حساب نهايتها :

بما ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة فان  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = l$

بالتعويض نجد :  $l = \frac{1}{2}l - 2$  تكافئ  $\frac{1}{2}l = -2$  تكافئ  $l = -4$  وبالتالي :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -4$  .

لتكن  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n + 4$

أ) البرهان أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = u_{n+1} + 4 = \frac{1}{2}u_n - 2 + 4 = \frac{1}{2}u_n + 2 = \frac{1}{2}(u_n + 4) = \frac{1}{2}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{2}$  .

● تعيين الحد الأول :  $v_0 = u_0 + 4 = 3 + 4 = 7$  .

ب) كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه  $v_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$  .

ج) اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$  :

لدينا :  $v_n = u_n + 4$  ومنه  $u_n = v_n - 4$  وبالتعويض نجد  $u_n = 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4$  .

● حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 7 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 = 7 \times 0 - 4 = -4$  .

د) حساب بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 - 4 + v_1 - 4 + v_2 - 4 + \dots + v_n - 4$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + (-4) + (-4) + (-4) + \dots + (-4)$$

$$= 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} + (-4)(n+1)$$

$$= 7 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} - 4(n+1) = 14 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) - 4(n+1)$$

#### حل التمرين 12 :

$(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\square$  بـ :  $u_0 = 6$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + 3$  .

(1) حساب الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  :

$$u_3 = \frac{1}{4}u_2 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{33}{8} + 3 = \frac{129}{32} \text{ و } u_2 = \frac{1}{4}u_1 + 3 = \frac{1}{4} \times \frac{9}{2} + 3 = \frac{33}{8} \text{ و } u_1 = \frac{1}{4}u_0 + 3 = \frac{1}{4} \times 6 + 3 = \frac{9}{2}$$

(2) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n \geq 4$  .

من أجل  $n = 0$  :  $u_0 = 6 \geq 4$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n \geq 4$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} \geq 4$ )

لدينا :  $u_n \geq 4$  تكافئ :  $\frac{1}{4}u_n \geq 1$  تكافئ :  $\frac{1}{4}u_n + 3 \geq 4$  ومنه  $u_{n+1} \geq 4$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$ .

اذن : من اجل كل عدد طبيعي  $n$  فان :  $u_n \geq 4$ .

(3) بيان ان  $(u_n)$  متتالية متناقصة :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{4}u_n + 3 - u_n = \frac{-3}{4}u_n + 3 = \frac{-3u_n + 12}{4} = \frac{-3(u_n - 4)}{4}$$

لنا  $u_n \geq 4$  تكافئ  $u_n - 4 \geq 0$  و  $-3 < 0$  و  $4 > 0$  وبالتالي  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متتالية متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

• لنا  $(u_n)$  متناقصة ومحدودة من الاسفل بالعدد 4 ومنه المتتالية  $(u_n)$  متقاربة.

(4) نعتبر المتتالية العددية  $(v_n)$  المعرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  بـ :  $v_n = u_n - 4$

(أ) بيان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية وتعيين أساسها  $q$  :

$$v_{n+1} = u_{n+1} - 4 = \frac{1}{4}u_n + 3 - 4 = \frac{1}{4}u_n - 1 = \frac{1}{4}(u_n - 4) = \frac{1}{4}v_n$$

ومنه المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{4}$ .

• تعيين الحد الأول :  $v_0 = u_0 - 4 = 6 - 4 = 2$ .

(ب) كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_0 \times q^n$  ومنه  $v_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n$ .

• حساب النهاية :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = 2 \times 0 = 0$

(ج) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

لدينا :  $u_n - 4 = v_n$  ومنه  $u_n = v_n + 4$  وبالتعويض نجد  $u_n = 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4$

• حساب  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n + 4 = 2 \times 0 + 4 = 4$

(د) حساب بدلالة  $n$  المجموع :  $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= v_0 + 4 + v_1 + 4 + v_2 + 4 + \dots + v_n + 4$$

$$= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n + 4 + 4 + 4 + \dots + 4$$

$$= 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{4}} + 4(n - 0 + 1) = 2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{\frac{3}{4}} + 4(n+1)$$

$$= \frac{8}{3} \times \left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right) + 4(n+1)$$

### حل التمرين 13 :

لتكن  $f$  دالة معرفة على المجال  $[0; 2]$  كمايلي :  $f(x) = -x^2 + 2x$

- دراسة اتجاه تغير الدالة  $f$  :

من أجل كل  $[0; 2]$  :  $f'(x) = -2x + 2 = 2(-x + 2)$

$f'(x) \geq 0$  لأن  $x \in [0; 2]$  ومنه الدالة  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0; 2]$ .

| $x$    | $-\infty$ | 2          | $+\infty$ |
|--------|-----------|------------|-----------|
| $-x+2$ | +         | $\bigcirc$ | -         |

①  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة بحددها الأول  $u_0 = \frac{1}{8}$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_{n+1} = -u_n^2 + 2u_n$  ،

أ- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $0 < u_n < 1$  :

من أجل  $n = 0$  :  $0 < u_0 = \frac{1}{8} < 1$  محققة.

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $0 < u_n < 1$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $0 < u_{n+1} < 1$ )

لدينا :  $0 < u_n < 1$  وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0; 2]$  فإن  $f(0) < f(u_n) < f(1)$  ومنه :  $0 < u_{n+1} < 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن  $0 < u_n < 1$  .

ب- بيان أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة :

$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 + 2u_n - u_n = -u_n^2 + u_n = u_n(-u_n + 1)$$

$$\text{لنا } 0 < u_n < 1 \text{ ومنه } 0 < -u_n + 1 < 1 \text{ أي } -1 < -u_n < 0 \text{ ومنه } -u_n + 1 > 0$$

$$\text{ولنا } u_n > 0 \text{ وبالتالي } u_{n+1} - u_n > 0 \text{ ومنه المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة تماماً على } \mathbb{N}.$$

الاستنتاج : المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{N}$  ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة .

② نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كمايلي :  $v_n = 1 - u_n$

أ- بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = (v_n)^2$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ : لنا } v_0 = 1 - u_0 = \frac{7}{8} \text{ و } v_1 = 1 - u_1 = 1 - \left( -\left(\frac{1}{8}\right)^2 + 2 \times \frac{1}{8} \right) = \frac{49}{64} \text{ ومنه : } v_1 = (v_0)^2 \text{ "الخاصية محققة" .}$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $v_{n+1} = (v_n)^2$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $v_{n+2} = (v_{n+1})^2$ )

$$v_{n+2} = 1 - u_{n+2} = 1 - (-u_{n+1}^2 + 2u_{n+1}) = 1 + u_{n+1}^2 - 2u_{n+1} = (1 - u_{n+1})^2 = (v_{n+1})^2$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_{n+1} = (v_n)^2$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

$$\text{من أجل } n = 0 \text{ : لنا } v_0 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\frac{7}{8}\right)^1 = \frac{7}{8} \text{ "الخاصية محققة" .}$$

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $v_{n+1} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ )

$$\text{لنا : } v_{n+1} = (v_n)^2 = \left( \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \right)^2 = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n \times 2} = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$

ج- حساب النهاية :

$$\text{لنا : } v_n = 1 - u_n \text{ ومنه } u_n = 1 - v_n = 1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} \text{ وبالتالي } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \\ eu_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \end{cases} \quad (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ كمايلي :}$$

(1) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n \geq \frac{1}{2}$

من أجل  $n=0$  : لنا  $u_0 = \frac{1}{2} + e^2 \geq \frac{1}{2}$  "الخاصية محققة".

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n \geq \frac{1}{2}$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} \geq \frac{1}{2}$ ).

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{e-1}{2} \text{ ومنه : } eu_{n+1} = u_n + \frac{e-1}{2} \text{ أي } u_{n+1} = \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e}$$

$$\text{ولنا : } u_n \geq \frac{1}{2} \text{ تكافئ } \frac{1}{e}u_n \geq \frac{1}{2e} \text{ تكافئ } \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} \geq \frac{1}{2e} + \frac{e-1}{2e} = \frac{1}{2} \text{ ومنه } u_{n+1} \geq \frac{1}{2} \text{ ومنه : الخاصية صحيحة من أجل } n+1$$

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  فإن :  $u_n \geq \frac{1}{2}$ .

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - u_n = \left(\frac{1}{e} - 1\right)u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} = \frac{1-e}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$$

لدينا :  $u_n \geq \frac{1}{2}$  ومنه  $u_n - \frac{1}{2} \geq 0$  ولنا  $\frac{1-e}{e} < 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}$ .

• استنتاج تقارب المتتالية  $(u_n)$  :

المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد  $\frac{1}{2}$  فهي متقاربة.

لتكن المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي :  $v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right)$

(3) بيان أن  $(v_n)$  متتالية حسابية وتعيين أساسها وحدها الأول :

$$v_{n+1} = \ln\left(u_{n+1} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1}{2e} - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n + \frac{e-1-e}{2e}\right) = \ln\left(\frac{1}{e}u_n - \frac{1}{2e}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{1}{e}\left(u_n - \frac{1}{2}\right)\right) = \ln\left(\frac{1}{e}\right) + \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) = -\ln e + v_n = -1 + v_n$$

ومنه  $(v_n)$  حسابية أساسها  $r = -1$ .

• حساب الحد الأول :  $v_0 = \ln\left(u_0 - \frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{2} + e^2 - \frac{1}{2}\right) = \ln(e^2) = 2\ln e = 2$

(4) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_0 + nr$  ومنه  $v_n = 2 - n$ .

(5) أ- حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = \frac{n-0+1}{2}(v_0 + v_n) = \frac{n+1}{2}(2+2-n) = \frac{(n+1)(4-n)}{2}$$

ب- حساب المجموع  $T_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لدينا : } v_n = \ln\left(u_n - \frac{1}{2}\right) \text{ تكافئ } v_n = e^{v_n} \text{ تكافئ } u_n - \frac{1}{2} = e^{v_n} \text{ تكافئ } u_n = e^{v_n} + \frac{1}{2}$$

نضع  $w_n = e^{v_n}$  لدينا :  $e^{v_n} = e^{2-n} = e^2 \times e^{-n} = e^2 \times \frac{1}{e^n} = e^2 \times \left(\frac{1}{e}\right)^n$  ومنه  $(w_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{e}$  وحدها الأول  $w_0 = e^2$

$$\begin{aligned} T_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n = e^{v_0} + \frac{1}{2} + e^{v_1} + \frac{1}{2} + \dots + e^{v_n} + \frac{1}{2} \\ &= e^{v_0} + e^{v_1} + \dots + e^{v_n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} = w_0 + w_1 + \dots + w_n + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} \\ &= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{e}} + \frac{1}{2}(n-0+1) \\ &= e^2 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}}{\frac{e-1}{e}} + \frac{n+1}{2} = \frac{e^3}{e-1} \times \left[1 - \left(\frac{1}{e}\right)^{n+1}\right] + \frac{n+1}{2} \end{aligned}$$

**حل التمرين 15 :**

(1) البرهان بالتراجع، من أجل كل عدد طبيعي  $n: \frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

من أجل  $n=0$  :  $\frac{3}{2} \leq u_0 = 3 \leq 3$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$  صحيحة) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي  $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$ )  
لدينا :  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$  تكافئ :  $6 \leq 4u_n \leq 12$  تكافئ :  $\frac{1}{6} \leq \frac{1}{4u_n} \leq \frac{1}{12}$  تكافئ :  $\frac{-9}{12} \leq \frac{-9}{4u_n} \leq \frac{-9}{6}$  تكافئ :  $\frac{-3}{4} \leq \frac{-9}{4u_n} \leq \frac{-3}{6}$

تكافئ :  $3 - \frac{3}{2} \leq 3 - \frac{9}{4u_n} \leq 3 - \frac{3}{4}$  تكافئ :  $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq \frac{9}{4}$  ومنه  $\frac{3}{2} \leq u_{n+1} \leq 3$   
ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

وعليه : من أجل كل عدد طبيعي  $n: \frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$

(2) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= 3 - \frac{9}{4u_n} - u_n \\ &= \frac{12u_n - 9 - u_n(4u_n)}{4u_n} \\ &= \frac{-4u_n^2 + 12u_n - 9}{4u_n} \end{aligned}$$

حساب المميز  $\Delta = 12^2 - 4 \times (-4) \times (-9) = 0$  : ومنه  $x_0 = \frac{-12}{-8} = \frac{3}{2}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2}{4u_n} \quad \text{ومنه :}$$

بما ان :  $\frac{3}{2} \leq u_n \leq 3$  فان  $-4\left(u_n - \frac{3}{2}\right)^2 \leq 0$  و  $4u_n > 0$  فان  $u_{n+1} - u_n \leq 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$ .

• استنتاج تقارب المتتالية  $(u_n)$  :

بما ان  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد  $\frac{3}{2}$  فهي متقاربة .

حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

بما ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي  $l$

$$\text{حيث : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$$

$$\text{لنا : } l = 3 - \frac{9}{4l} \text{ ومنه : } 4l^2 - 12l - 9 = 0 \text{ حيث } l \neq 0 \text{ تكافئ : } -4l^2 + 12l - 9 = 0$$

$$\text{حساب المميز } \Delta : \Delta = 0 \text{ ومنه : } x_0 = \frac{3}{2} \text{ وبالتالي : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{3}{2}$$

$$(3) \text{ نعتبر المتتالية العددية } (v_n) \text{ المعرفة على } \square \text{ بـ : } v_n = \frac{2}{2u_n - 3}$$

(أ) البرهان ان المتتالية  $(v_n)$  حسابية أساسها وتعيين أساسها :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{2}{2u_{n+1} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{2\left(3 - \frac{9}{4u_n}\right) - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{6 - \frac{18}{4u_n} - 3} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{2}{3 - \frac{9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3} \\ &= \frac{2}{\frac{6u_n - 9}{2u_n}} - \frac{2}{2u_n - 3} = \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{2 \times 3}{(2u_n - 3) \times 3} = \frac{4u_n}{6u_n - 9} - \frac{6}{6u_n - 9} = \frac{4u_n - 6}{6u_n - 9} = \frac{2(2u_n - 3)}{3(2u_n - 3)} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$\text{ومنه } (v_n) \text{ متتالية حسابية أساسها } r = \frac{2}{3}$$

(ب) كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{- حساب الحد الاول : } v_0 = \frac{2}{2u_0 - 3} = \frac{2}{2 \times 3 - 3} = \frac{2}{3}$$

$$\text{لدينا : } v_n = v_0 + nr$$

$$v_n = \frac{2}{3} + \frac{2}{3}n$$

ومنه :

$$= \frac{2 + 2n}{3}$$

• استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لنا : } v_n = \frac{2}{2u_n - 3} \text{ تكافئ : } \frac{1}{v_n} = \frac{2u_n - 3}{2} \text{ تكافئ : } \frac{2}{v_n} = 2u_n - 3 \text{ تكافئ : } 2u_n = \frac{2}{v_n} + 3 \text{ تكافئ : } u_n = \frac{1}{v_n} + \frac{3}{2}$$

$$\text{تكافئ : } u_n = \frac{3}{2 + 2n} + \frac{3}{2} \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2(1+n)} + \frac{3}{2} \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left( \frac{1}{1+n} + 1 \right) \text{ تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left( \frac{1+1+n}{1+n} \right)$$

$$\text{تكافئ : } u_n = \frac{3}{2} \left( \frac{n+2}{n+1} \right)$$

(3) حساب المجموع :

$$\text{لنا : } u_n v_n = \frac{3}{2} \left( \frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2+2n}{3}$$

$$= \frac{3}{2} \left( \frac{n+2}{n+1} \right) \times \frac{2(n+1)}{3}$$

$$= n + 2$$

ومنه :

$$S_n = u_0 v_0 + u_1 v_1 + \dots + u_n v_n = \frac{n-0+1}{2} (2+n+2) = \frac{(n+1)(n+4)}{2}$$

$$u_{n+1} = \frac{n}{4(n+1)} u_n : n \text{ من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم } u_1 = \frac{1}{4}$$

① (أ) حساب الحدود  $u_2$  و  $u_3$  :

$$u_3 = \frac{2}{4(2+1)} u_2 = \frac{1}{6} \times \frac{1}{32} = \frac{1}{192} \quad \text{و} \quad u_2 = \frac{1}{4(1+1)} u_1 = \frac{1}{8} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$$

ب) البرهان أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $u_n > 0$  :

من اجل  $n=1$  :  $u_1 = \frac{1}{4} > 0$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $u_n > 0$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $u_{n+1} > 0$  )

لدينا :  $u_n > 0$  تكافئ :  $\frac{n}{4(n+1)} u_n > 0$  ( لأن  $n \in \mathbb{N}^*$  فان  $\frac{n}{4(n+1)} > 0$  ) ومنه  $u_{n+1} > 0$  .

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$

اذن : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $u_n > 0$  :

ج) دراسة اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{n}{4(n+1)} u_n - u_n = \left( \frac{n}{4(n+1)} - 1 \right) u_n = \left( \frac{n-4(n+1)}{4(n+1)} \right) u_n = \left( \frac{n-4n-4}{4(n+1)} \right) u_n = \left( \frac{-3n-4}{4(n+1)} \right) u_n$$

لنا  $n \in \mathbb{N}^*$  اذن  $4(n+1) > 0$  و  $-3n-4 < 0$  ولدينا  $u_n > 0$  ومنه  $u_{n+1} - u_n < 0$

وبالتالي المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{N}^*$

• استنتاج ان  $(u_n)$  متقاربة :

بما ان  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الاسفل بالعدد 0 فان  $(u_n)$  متقاربة .

• حساب نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

بما ان المتتالية  $(u_n)$  متقاربة فانه يوجد عدد حقيقي  $l$  حيث :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$  بالتعويض نجد :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0 \quad \text{ومنه} \quad l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad \frac{3}{4}l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad l - \frac{1}{4}l = 0 \quad \text{تكافئ} \quad l = \frac{1}{4}l \quad \text{تكافئ} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{n}{4(n+1)} u_n \right]$$

② نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة كمايلي من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $v_n = n \cdot 2^n \cdot u_n$  :

أ- بيان أن  $(v_n)$  هندسية و تعيين أساسها  $q$  وحدها الأول  $v_1$  :

$$v_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot u_{n+1} = (n+1) \cdot 2^{n+1} \cdot \frac{n}{4(n+1)} u_n = 2 \times 2^n \times \frac{n}{4} u_n = \frac{1}{2} 2^n \times n \times u_n = \frac{1}{2} v_n$$

• حساب  $v_1$  :  $v_1 = 1 \times 2^1 \times u_1 = \frac{1}{2}$

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_1 \times q^{n-1}$  ومنه  $v_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$  أي  $v_n = \left( \frac{1}{2} \right)^n$  .

• استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  :

$$u_n = \frac{\left( \frac{1}{2} \right)^n}{n \cdot 2^n} \quad \text{لدينا} \quad v_n = n \cdot 2^n \cdot u_n \quad \text{تكافئ} \quad u_n = \frac{v_n}{n \cdot 2^n} \quad \text{ومنه} \quad u_n = \frac{1}{n \cdot 2^n}$$

$$\text{أي} \quad u_n = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2^n} \times \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{n} \times \left( \frac{1}{2} \right)^n \times \left( \frac{1}{2} \right)^n = \frac{1}{n} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{2n}$$

• اثبات تقارب المتتالية  $(u_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1}{n} \times \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \right] = 0 \times 0 = 0$$

ومنه المتتالية متقاربة نحو العدد 0 .

③ حساب المجموع :

$$S_n = v_1 + v_2 + v_3 + \dots + v_n = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1+1}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{\frac{1}{2}} = 1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n$$

• حساب الجداء :

$$\begin{aligned} p_n &= u_1 (2u_2) (3u_3) \dots (nu_n) = \frac{1}{4} \times \left( 2 \times \frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} \right)^4 \right) \times \left( 3 \times \frac{1}{3} \left( \frac{1}{2} \right)^6 \right) \times \dots \times \left( n \times \frac{1}{n} \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \right) \\ &= \frac{1}{4} \times \left( \frac{1}{2} \right)^4 \times \left( \frac{1}{2} \right)^6 \times \dots \times \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^2 \times \left( \frac{1}{2} \right)^4 \times \left( \frac{1}{2} \right)^6 \times \dots \times \left( \frac{1}{2} \right)^{2n} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{2+4+6+\dots+(2n)} = \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n-1+1}{2}(2+2n)} \\ &= \left( \frac{1}{2} \right)^{\frac{n(2+2n)}{2}} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n(1+n)} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n^2+n} \end{aligned}$$

حل التمرين (17) :

نعتبر المتتالية  $(u_n)$  المعرفة كمايلي :  $u_0 = 0$  ،  $u_1 = 1$  ، ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n$

نضع من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$  و  $w_n = 5^n u_n$

① أ- بيان ان المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$  :

$$v_{n+1} = u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1} = \left( \frac{2}{5} - \frac{1}{5} \right) u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n = \frac{1}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n = \frac{1}{5} \left( u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \right) = \frac{1}{5}v_n$$

ومنه  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$  .

ب- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $v_n = v_0 \times q^n$

$$v_n = \left( \frac{1}{5} \right)^n \quad \text{ومنه} \quad v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1 - \frac{1}{5} \times 0 = 1$$

② بيان ان  $(w_n)$  متتالية حسابية أساسها 5 :

$$w_{n+1} - w_n = 5^{n+1}u_{n+1} - 5^n u_n = 5^{n+1} \left( u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n \right) = 5^{n+1}v_n = 5^{n+1} \times \left( \frac{1}{5} \right)^n = 5 \times 5^n \times \frac{1}{5^n} = 5$$

ومنه  $(w_n)$  متتالية حسابية أساسها 5.

• كتابة  $w_n$  بدلالة  $n$  :

$$w_0 = 5^0 u_0 = 1 \times 0 = 0$$

$$w_n = w_0 + nr = 0 + 5n = 5n \quad \text{لنا}$$

③ حساب بدلالة  $n$  ، المجموع  $S_n$  حيث :  $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$ .

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = 1 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1-0+1}}{1 - \frac{1}{5}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{\frac{4}{5}} = \frac{5}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n\right)$$

④ كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  : لنا  $w_n = 5^n u_n$  ومنه :  $u_n = \frac{w_n}{5^n}$  أي  $u_n = \frac{5n}{5^n}$  وبالتالي  $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$ .

⑤ أ- بيان انه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$  ،

لدينا  $u_n = \frac{n}{5^{n-1}}$  ومنه  $u_{n+1} = \frac{n+1}{5^n} > 0$  لان  $n \in \mathbb{N}^*$ .

ومن جهة اخرى  $0 < u_{n+1} - \frac{2}{5} u_n = \frac{n+1}{5^n} - \frac{2}{5} \times \frac{n}{5^{n-1}} = \frac{n+1}{5^n} - \frac{2n}{5^n} = \frac{-n+1}{5^n} < 0$  لان  $n \in \mathbb{N}^*$  أي  $u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$

ومنه : من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$  ،

ب- استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$  ،

لدينا من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم  $n$  ،  $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5} u_n$  ،

$$\begin{cases} 0 < u_2 \leq \frac{2}{5} u_1 : n=1 \text{ من اجل} \\ 0 < u_3 \leq \frac{2}{5} u_2 : n=2 \text{ من اجل} \\ 0 < u_4 \leq \frac{2}{5} u_3 : n=3 \text{ من اجل} \\ \vdots \\ 0 < u_n \leq \frac{2}{5} u_{n-1} : n-1 \text{ من اجل} \end{cases}$$

بضرب المتباينات (علما أنها موجبة) نجد :  $u_1$  ومنه  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1-1+1}$  ومنه  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$

ج- استنتاج نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا :  $0 < u_n \leq \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} = 0$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

### حل التمرين 18 :

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $[0;1]$  بـ :  $f(x) = \frac{3x+2}{x+4}$

① أ) دراسة تغيرات الدالة  $f$  على المجال  $[0;1]$

- المشتقة واتجاه التغير : من أجل كل  $x \in [0;1]$

$$f'(x) = \frac{3(x+4) - (3x+2)}{(x+4)^2} = \frac{3x+12-3x-2}{(x+4)^2} = \frac{10}{(x+4)^2} > 0$$

بما أن  $f'(x) > 0$  فان  $f$  متزايدة تماما على المجال  $[0;1]$ .

- جدول التغيرات :

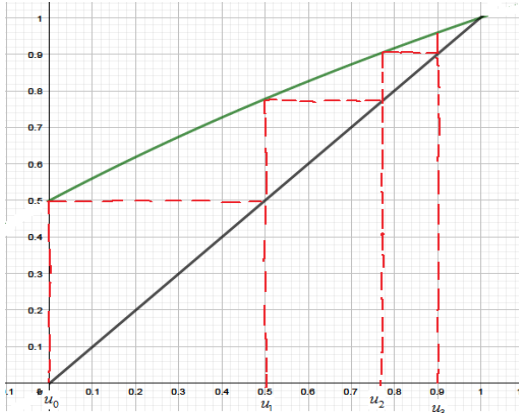
|         |               |   |
|---------|---------------|---|
| $x$     | 0             | 1 |
| $f'(x)$ |               | + |
| $f(x)$  | $\frac{1}{2}$ | 1 |

ب) استنتاج أنه إذا كان  $x \in [0;1]$  فإن  $f(x) \in [0;1]$  :

$x \in [0;1]$  معناه  $0 \leq x \leq 1$  وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على المجال  $[0;1]$  فإن  $f(0) \leq f(x) \leq f(1)$  ومنه  $\frac{1}{2} \leq f(x) \leq 1$

أي  $0 \leq f(x) \leq 1$  إذن  $f(x) \in [0;1]$  .

ج) التمثيل البياني للمنحنى (C) :



② أ) تمثيل الحدود على حامل محور الفواصل .

ب) التخمين حول اتجاه وتقارب المتتالية  $(u_n)$  :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً ومتقاربة .

③ أ) البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n \leq 1$

من أجل  $n = 0 : 0 \leq u_0 = 0 \leq 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  (أي :  $0 \leq u_n \leq 1$  صحيحة ) ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  (أي :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  )

لدينا :  $0 \leq u_n \leq 1$  تكافئ :  $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$  :  $0 \leq u_{n+1} \leq 1$  ومنه  $\frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 1$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

إذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n : 0 \leq u_n \leq 1$  .

ب) بيان أن  $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n+2}{u_n+4} - u_n = \frac{3u_n+2-u_n^2-4u_n}{u_n+4} = \frac{-u_n^2-u_n+2}{u_n+4} = \frac{(1-u_n)(u_n+2)}{u_n+4}$$

• استنتاج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

بما أن  $0 \leq u_n \leq 1$  فإن  $1-u_n \geq 0$  و  $u_n+2 > 0$  ومنه  $(1-u_n)(u_n+2) \geq 0$  و  $u_n+4 > 0$  وبالتالي  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

أي المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{R}$  .

ج) نعم المتتالية  $(u_n)$  متقاربة لأنها متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد 1 .

④ نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  كمايلي :  $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2}$

أ) البرهان أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= \frac{u_{n+1}-1}{u_{n+1}+2} = \frac{\frac{3u_n+2}{u_n+4}-1}{\frac{3u_n+2}{u_n+4}+2} = \frac{\frac{3u_n+2-u_n-4}{u_n+4}}{\frac{3u_n+2+2u_n+8}{u_n+4}} = \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2u_n-2}{u_n+4} \times \frac{u_n+4}{5u_n+10} \\ &= \frac{2u_n-2}{5u_n+10} = \frac{2(u_n-1)}{5(u_n+2)} = \frac{2}{5} \times \frac{u_n-1}{u_n+2} = \frac{2}{5} v_n \end{aligned}$$

• حساب الحد الاول :  $v_0 = \frac{u_0-1}{u_0+2} = \frac{0-1}{0+2} = -\frac{1}{2}$

ب) كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n \text{ لئنا } v_n = v_0 \times q^n \text{ ومنه } v_n = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

• تعيين عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لنا  $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$  تكافئ :  $v_n(u_n + 2) = u_n - 1$  تكافئ  $v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$  تكافئ  $1 + 2v_n = u_n - v_n u_n$

تكافئ  $1 + 2v_n = u_n(1 - v_n)$  وبالتالي  $u_n = \frac{1 + 2v_n}{1 - v_n}$  .

بالتعويض نجد :  $u_n = \frac{1 + 2\left(\frac{-1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n\right)}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n}$

ج) استنتاج نهاية المتتالية  $(u_n)$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \times \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$$

### حل التمرين 19 :

(1) لنا :  $u_0 = 3$  ،  $u_{n+1} = \sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}}$

أ- حساب الحدود :

$$u_3 = \sqrt{\frac{1 + u_2^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{3}^2}{2}} = \sqrt{2} \text{ و } u_2 = \sqrt{\frac{1 + u_1^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{5}^2}{2}} = \sqrt{3} \text{ و } u_1 = \sqrt{\frac{1 + u_0^2}{2}} = \sqrt{\frac{1 + 3^2}{2}} = \sqrt{5}$$

البرهان بالتراجع انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  من أجل  $n = 0$  :  $u_0 = 3 > 1$  محققة .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n + 1$

لنا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n > 1$  تكافئ :  $u_n^2 > 1$  تكافئ :  $\frac{1 + u_n^2}{2} > \frac{2}{2}$  تكافئ :  $\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} > 1$  تكافئ :  $u_{n+1} > 1$  .

اذن : الخاصية صحيحة من أجل  $n + 1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $u_n > 1$  .

ب- بيان أن المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  :

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} - u_n = \frac{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} - u_n\right)\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 + u_n^2}{2} - u_n^2}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 + u_n^2 - 2u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{\frac{1 - u_n^2}{2}}{\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)} = \frac{1 - u_n^2}{2\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right)}$$

لنا  $u_n > 1$  تكافئ :  $u_n^2 > 1$  تكافئ :  $-u_n^2 < -1$  تكافئ :  $1 - u_n^2 < 0$

ولنا :  $2\left(\sqrt{\frac{1 + u_n^2}{2}} + u_n\right) > 0$  ومنه :  $u_{n+1} - u_n < 0$  ومنه المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  .

ج- استنتاج ان  $(u_n)$  متقاربة : المتتالية  $(u_n)$  متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بالعدد 1 فهي متقاربة .

حساب النهاية : بما أن المتتالية  $(u_n)$  متقاربة فان :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = l$

ومنه :  $l = \sqrt{\frac{1+l^2}{2}}$  تكافئ :  $\frac{1+l^2}{2} = l^2$  مع  $l \geq 0$  تكافئ :  $1+l^2 = 2l^2$  تكافئ :  $l^2 = 1$

تكافئ :  $l = 1$  ( مقبول ) أو  $l = -1$  ( مرفوض ) . ومنه :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

(2) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  بـ :  $v_n = u_n^2 - 1$  .

أ- بيان انه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2v_{n+1} = v_n$  .

من أجل  $n=0$  لدينا :  $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$  ولنا :  $v_1 = u_1^2 - 1 = \sqrt{5}^2 - 1 = 4$  ومنه :  $2v_1 = v_0$  .

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل  $n$  ونبرهن على صحتها من أجل  $n+1$  ( أي نبرهن أنه :  $2v_{n+2} = v_{n+1}$  )

لنا من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $2v_{n+2} = 2(u_{n+2}^2 - 1) = 2\left(\sqrt{\frac{1+u_{n+1}^2}{2}} - 1\right) = 2\left(\frac{1+u_{n+1}^2 - 2}{2}\right) = u_{n+1}^2 - 1 = v_{n+1}$

ومنه : الخاصية صحيحة من أجل  $n+1$  .

اذن : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2v_{n+1} = v_n$  .

ب- استنتاج أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول  $v_0$  :

لنا : من أجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $2v_{n+1} = v_n$  تكافئ :  $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$  ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $q = \frac{1}{2}$  .

حساب  $v_0$  :  $v_0 = u_0^2 - 1 = 3^2 - 1 = 8$

ج- كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :  $v_n = v_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$

- كتابة  $u_n$  بدلالة  $n$  : لدينا  $v_n = u_n^2 - 1$  تكافئ :  $u_n^2 = v_n + 1$  تكافئ :  $u_n = \sqrt{v_n + 1} = \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$

حساب النهاية :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1} = \sqrt{8 \times 0 + 1} = \sqrt{0 + 1} = 1$$

(3) حساب المجموع :

$$S_n = u_0^2 + u_1^2 + \dots + u_n^2$$

$$= v_0 + 1 + v_1 + 1 + \dots + v_n + 1$$

$$= v_0 + v_1 + \dots + v_n + 1 + 1 + \dots + 1$$

$$= v_0 \times \frac{1 - (q)^{n-0+1}}{1 - q} + 1 \times (n - 0 + 1)$$

$$= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{2}} + 1 \times (n + 1)$$

$$= 8 \times \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} + (n + 1)$$

$$= 16 \times \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right) + (n + 1)$$

- حساب  $T_n$ :

$$\begin{aligned} T_n &= v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 v_0 + 2v_1 + \dots + 2^n v_n \\ &= 2^0 \times 8 + 2 \times 8 \times \frac{1}{2} + \dots + 2^n \times 8 \times \frac{1}{2^n} \\ &= 8 + 8 + \dots + 8 \\ &= 8 \times (n - 0 + 1) \\ &= 8n + 8 \end{aligned}$$

**حل تمرين 20:**

1- حساب الحدود:

$$u_4 = \frac{1}{3} \times u_3 + 3 - 2 = \frac{67}{81}, \quad u_3 = \frac{1}{3} \times u_2 + 2 - 2 = \frac{-14}{27}, \quad u_2 = \frac{1}{3} \times u_1 + 1 - 2 = \frac{-14}{9}, \quad u_1 = \frac{1}{3} \times u_0 + 0 - 2 = \frac{-5}{3}$$

2- أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي  $n \geq 4$  فان  $u_n \geq 0$ :  
نسمي الخاصية من اجل كل عدد طبيعي  $n \geq 4$ ,  $p(n): u_n \geq 0$ .

من اجل  $n = 4$ :  $u_4 = \frac{67}{81} \geq 0$  محققة.

نفرض  $p(n)$  صحيحة ونبرهن صحة  $p(n+1)$

لدينا:  $u_n \geq 0$  يكافئ  $\frac{1}{3}u_n \geq 0$ ..... (1)

بما ان  $n \geq 4$  فان  $n-2 \geq 2$  ومنه  $n-2 \geq 0$ ..... (2)

من (1) و (2) نجد:  $\frac{1}{3}u_n + n - 2 \geq 0$  ومنه  $u_{n+1} \geq 0$ .

ومنه:  $p(n+1)$  صحيحة.

اذن: الخاصية  $p(n)$  صحيحة.

ب) استنتاج انه من اجل كل  $n \geq 5$ :  $u_n \geq n - 3$

لدينا:  $u_n = \frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3$  اذن  $u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + n - 2$

لدينا من اجل كل  $n \geq 4$  فان  $u_n \geq 0$  معناه من اجل  $n \geq 5$  فان  $u_{n-1} \geq 0$  يكافئ  $\frac{1}{3}u_{n-1} \geq 0$  يكافئ  $\frac{1}{3}u_{n-1} + n \geq n$

يكافئ  $\frac{1}{3}u_{n-1} + n - 3 \geq n - 3$  ومنه  $u_n \geq n - 3$

ج) استنتاج نهاية المتتالية  $(u_n)$ :

لدينا  $u_n \geq n - 3$  و  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n - 3 = +\infty$  ومنه  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

3- لدينا:  $v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$

أ- البرهان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= -2u_{n+1} + 3(n+1) - \frac{21}{2} = -2\left(\frac{1}{3}u_n + n - 2\right) + 3n + 3 - \frac{21}{2} \\ &= \frac{-2}{3}u_n - 2n + 4 + 3n - \frac{15}{2} = \frac{-2}{3}u_n + n - \frac{7}{2} = \frac{1}{3}\left(-2u_n + 3n - \frac{21}{2}\right) \\ &= \frac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

ومنه  $(v_n)$  متتالية هندسية أساسها  $\frac{1}{3}$ .

- حساب الحد الاول :

$$v_0 = -2u_0 + 3 \times 0 - \frac{21}{2} = \frac{-25}{2}$$

ب - كتابة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

ج - استنتاج أنه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_n = \frac{25}{4} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$

$$\text{لدينا } v_n = \frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n \text{ ومن جهة اخرى لنا } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \text{ ومنه } \frac{-25}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2}$$

$$\text{تكافئ } 2u_n = \frac{25}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^n + 3n - \frac{21}{2} \text{ تكافئ } u_n = \frac{25}{4} \times \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

④ حساب المجموع  $T_n$  بدلالة  $n$  :

$$T_n = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \times \frac{1 - (q)^{n-0+1}}{1 - q} = \frac{-25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-0+1}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{-25}{2} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}} = \frac{-75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)$$

- حساب المجموع  $S_n$  بدلالة  $n$  :

$$\text{لدينا : } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \text{ تكافئ } v_n = -2u_n + 3n - \frac{21}{2} \text{ تكافئ } 2u_n = -v_n + 3n - \frac{21}{2} \text{ ومنه } u_n = -\frac{1}{2}v_n + \frac{3}{2}n - \frac{21}{4}$$

$$\begin{aligned} S_n &= u_0 + u_1 + \dots + u_n \\ &= \frac{-1}{2}v_0 + \frac{3}{2} \times 0 - \frac{21}{4} + \frac{-1}{2}v_1 + \frac{3}{2} \times 1 - \frac{21}{4} + \dots + \frac{-1}{2}v_n + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4} \\ &= \frac{-1}{2}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \left(\frac{3}{2} \times 0 - \frac{21}{4} + \frac{3}{2} \times 1 - \frac{21}{4} + \dots + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4}\right) \\ &= \frac{-1}{2}T_n + \frac{n-0+1}{2} \left(-\frac{21}{4} + \frac{3}{2} \times n - \frac{21}{4}\right) \\ &= \frac{-1}{2} \left(\frac{-75}{4} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right)\right) + \frac{n+1}{2} \left(\frac{6n-42}{4}\right) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{n+1}{2} \left(\frac{3n-21}{2}\right) \\ &= \frac{75}{8} \left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{(n+1)(3n-21)}{4} \end{aligned}$$

**حل التمرين 21 :**

1- أ) دراسة اتجاه تغير  $f$  على المجال  $[0; +\infty[$  : من اجل كل  $x \in [0; +\infty[$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} \times 2x}{\sqrt{x^2+1}^2} = \frac{2\sqrt{x^2+1} - \frac{2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{\frac{2(x^2+1) - 2x^2}{\sqrt{x^2+1}}}{x^2+1} = \frac{2}{\sqrt{x^2+1} \cdot x^2+1} \\ &= \frac{2}{\sqrt{x^2+1}} \times \frac{1}{x^2+1} = \frac{2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

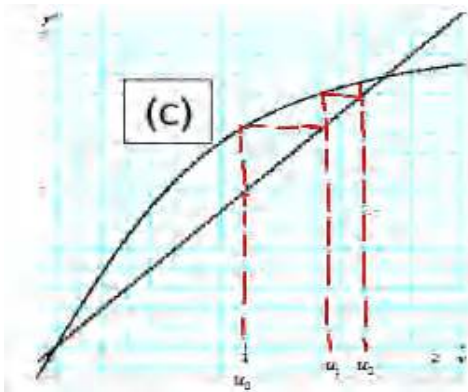
بما ان  $2 > 0$  و  $\sqrt{x^2+1} > 0$  و  $x^2+1 > 0$  فان الدالة  $f$  متزايدة تهاما على  $[0; +\infty[$ .

(ب) بيان أنه إذا كان  $x \in [1; \sqrt{3}]$  فإن  $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$  :

لدينا :  $x \in [1; \sqrt{3}]$  معناه  $1 \leq x \leq \sqrt{3}$  وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على  $[1; \sqrt{3}]$  فإن  $f(1) \leq f(x) \leq f(\sqrt{3})$  ومنه  $2 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$  أي  $1 \leq f(x) \leq \sqrt{3}$  ومنه  $f(x) \in [1; \sqrt{3}]$  .

2-  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{Q}$  كمايلي :  $u_0 = 1$  ومن أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} = f(u_n)$

(أ) تمثيل الحدود  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  على حامل محور الفواصل .



(ب) اعطاء تخميننا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  وتقاربها :

انطلاقاً من تمثيل الحدود نخمن أن المتتالية  $(u_n)$  متزايدة تماماً ومتقاربة.

3- (أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$  :

نسمي الخاصية من اجل كل عدد طبيعي  $n$  ،  $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$  :  $p(n)$  .

من اجل  $n=0$  :  $1 \leq u_0 = 1 \leq \sqrt{3}$  محققة .

نفرض  $p(n)$  صحيحة ونبرهن صحة  $p(n+1)$

لدينا :  $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$  وبما أن  $f$  متزايدة تماماً على  $[1; \sqrt{3}]$  فإن  $f(1) \leq f(u_n) \leq f(\sqrt{3})$

أي  $2 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$  ومنه  $1 \leq u_{n+1} \leq \sqrt{3}$

ومنه :  $p(n+1)$  صحيحة

اذن : الخاصية  $p(n)$  صحيحة .

(ب) بيان أنه من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$  :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - u_n = \frac{2u_n - u_n\sqrt{u_n^2 + 1}}{\sqrt{u_n^2 + 1}} = \frac{u_n(2 - \sqrt{u_n^2 + 1})}{\sqrt{u_n^2 + 1}}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  :

لدينا  $1 \leq u_n \leq \sqrt{3}$  تكافئ  $1 \leq u_n^2 \leq 3$  تكافئ  $2 \leq u_n^2 + 1 \leq 4$  تكافئ  $\sqrt{2} \leq \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2$  تكافئ  $-2 \leq -\sqrt{u_n^2 + 1} \leq -\sqrt{2}$

تكافئ  $0 \leq 2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \leq 2 - \sqrt{2}$  ومنه  $2 - \sqrt{u_n^2 + 1} \geq 0$  ولنا  $u_n > 0$  و  $\sqrt{u_n^2 + 1} > 0$  وبالتالي  $u_{n+1} - u_n \geq 0$

ومنه  $(u_n)$  متزايدة تماماً على  $\mathbb{Q}$  .

(ج) استنتاج أن  $(u_n)$  متقاربة :

بما أن  $(u_n)$  متزايدة تماماً ومحدودة من الأعلى بالعدد  $\sqrt{3}$  فهي متقاربة .

4-  $(v_n)$  متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$

(أ) البرهان أن  $(v_n)$  متتالية هندسية و تعيين أساسها وحدها الاول :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}^2}{3 - u_{n+1}^2} = \frac{\left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}\right)^2}{3 - \left(\frac{2u_n}{\sqrt{u_n^2 + 1}}\right)^2} = \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}}{3 - \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}} = \frac{\frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1}}{\frac{3u_n^2 + 3 - 4u_n^2}{u_n^2 + 1}} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = \frac{4u_n^2}{u_n^2 + 1} \times \frac{u_n^2 + 1}{3 - u_n^2} = \frac{4u_n^2}{3 - u_n^2} = 4 \times \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} = 4v_n$$

- حساب الحد الاول :

$$v_0 = \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} = \frac{1}{3 - 1} = \frac{1}{2}$$

ب ( كتابة عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  :

$$v_n = v_0 \times q^n = \frac{1}{2} \times 4^n$$

- استنتاج  $u_n$  بدلالة  $n$  :

لدينا  $v_n = \frac{u_n^2}{3 - u_n^2}$  تكافئ  $v_n(3 - u_n^2) = u_n^2$  تكافئ  $3v_n - v_n u_n^2 = u_n^2$  تكافئ  $3v_n = u_n^2 + v_n u_n^2$

تكافئ  $3v_n = u_n^2(1 + v_n)$  ومنه  $u_n^2 = \frac{3v_n}{1 + v_n}$  :  $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}}$

وبالتالي :  $u_n = \sqrt{\frac{3v_n}{1 + v_n}} = \sqrt{\frac{3 \times \left(\frac{4^n}{2}\right)}{1 + \left(\frac{4^n}{2}\right)}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2} \times \frac{2}{2 + 4^n}} = \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}}$

ج ( حساب النهاية  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$  :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{2 + 4^n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3 \times 4^n}{4^n \times \left(\frac{2}{4^n} + 1\right)}} = \sqrt{\frac{3}{\frac{2}{4^n} + 1}} = \sqrt{\frac{3}{0 + 1}} = \sqrt{3}$$

-5 حساب  $P_n$  بدلالة  $n$  :

$$\begin{aligned} P_n &= \frac{(u_0 \times u_1 \times \dots \times u_n)^2}{(3 - u_0^2)(3 - u_1^2) \dots (3 - u_n^2)} \\ &= \frac{u_0^2}{3 - u_0^2} \times \frac{u_1^2}{3 - u_1^2} \times \dots \times \frac{u_n^2}{3 - u_n^2} \\ &= v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \\ &= \frac{4^0}{2} \times \frac{4^1}{2} \times \dots \times \frac{4^n}{2} \\ &= \frac{4^0 \times 4^1 \times \dots \times 4^n}{2^{n-0+1}} \\ &= \frac{4^{0+1+\dots+n}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)}}{2^{n+1}} = \frac{4^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} \\ &= \frac{(2^2)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n+1}} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^{n+1}} = 2^{n^2+n-(n+1)} \\ &= 2^{n^2-1} \end{aligned}$$