مجلة العبقري في الرياضيات (الإحتمالات)
الملخص // الشعبة: علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

ملخص: حول الإحتمالات// التحضير الجيد بكالوريا// الشعبة: علوم تج؛ تر.

1 لغة الإحتمالات LE langage des Probabilités

مصطلحات الإحتمالات

المصطلح	التعريف
① **التجربة العشوائية:** L'expérience aléatoire	وهي كل تجربة لا يُمكن توقع نتيجتها، رغم معرفة مجموعة النتائج الممكنة.
② **مجموعة الإمكانيات:** L'univers	وهي **مجموعة النتائج الممكنة**، ويُرمز إليها، غالباً بالرمز Ω وتُسمى: أيضا **بمجموعة المخارج؛ أو المجموعة الشاملة**.
③ **الحادثة:** L'événement	وهي كل **مجموعة جزئية** من Ω.
④ **الحادثة الأوّلية:** L'événement élémentaire	وهي الحادثة التي **تشمل على عنصر واحد**.
⑤ **الحادثة الأكيدة:** L'événement certain	وهي **مجموعة الإمكانيات** Ω.
⑥ **الحادثة المستحيلة:** L'événement impossible	وهي الحادثة التي **لا يُمكن لها أن تتحقق**، ونرمز لها بالرمز $\emptyset$.
⑦ **الحادثة العكسية:** L'événement contraire	**الحادثة العكسية لـ** A؛ والتي نرمز إليها بـ: $\overline{A}$ وهي التي **تشمل كل عناصر** Ω، **ما عدا عناصر** A.
⑧ **الحادثة** (A وB): L'événement (A et B)	وهي الحادثة التي **تشتمل على العناصر المشتركة** بين A **وَ** B؛ ونرمز إليها بالرمز: $\boxed{A \cap B}$.
⑨ **الحادثة** (A أوB): L'événement (A ou B)	وهي الحادثة التي **تشتمل على العناصر التي تنتمي إلى** A **أو** إلى B (أي **المشتركة وغير المشتركة**)، ونرمز إليها بالرمز: $\boxed{A \cup B}$.
⑩ **الحادثتان غير المتلائمتان:** Evénement incompatibles	وهما الحادثتان اللّتان **لا يُمكن أن يتحققا في آنٍ واحد**، أي أنّ: $\boxed{A \cap B = \emptyset}$.

2 قانون الإحتمال La loi de probabilité

تعريف

لتكن مجموعة الإمكانيات $\Omega = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$؛ نقول إنّنا زوّدنا Ω **بقانون إحتمال** P، إذا أرفقنا **بكل إمكانية** من Ω **عدداً حقيقياً موجبا** P_i، مع $i \in \{1; 2; \dots; n\}$ بحيث يكون:

$$\boxed{P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1}$$

ملاحظة: ① بما أنّ: $\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + \ldots + P_n = 1 \end{cases}$ ، فإنّ: $\boxed{0 \leq P_i \leq 1}$.

② يُمكن ملأ الجدول التالي كما يلي:

الإمكانيات x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
الإحتمال $P_i = P(x_i)$	P_1	P_2	$\ldots$	P_n

ونقول عندئذٍ: إنّنا **عرّفنا قانون الإحتمال.**

3 تساوي الإحتمال L'équiprobabilité

تعريف

نقول عن تجربة عشوائية، أنّها **متساوية الإحتمال** إذا كان **لكل الحوادث الأوّلية نفس الإحتمال.**

- نقول في هذه الحالة أنّ **قانون الإحتمال متساوي التوزيع.**

ملاحظة هامة:

يُشار إلي **تساوي الإحتمال** من خلال **عبارات** يتضمنها نصّ وصف التجربة العشوائية، **مثلا:**

- نرمي زهرة نرد **غير مزيفة؛**
- نسحب **عشوائيا** من كيس؛
- نرمي قطعة نقدية **متوازنة؛**
- **أو** كريات **لا نُميز بينها عند اللّمس** ...الخ.

نتيجة: في حالة **تساوي الإحتمال**، لدينا: **(إحتمال حادثة)**

$$\boxed{P(A) = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة لـ } A}{\text{عدد الحالات الممكنة}} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega}}.$$

4 خواص الإحتمالات Propriétés des Probabilités

الخواص

Ω مجموعة شاملة مزوّدة بقانون إحتمال P، **لدينا الخواص التالية:**

الخاصية	ملاحظة
① من أجل كل **حادثة A**، $\boxed{0 \leq P(A) \leq 1}$.	**الإحتمال** عدد **موجب وَمحصور** بين 0 وَ 1.
② $\boxed{P(\emptyset) = 0}$ وَ $\boxed{P(\Omega) = 1}$.	
③ إذا كانت A وَ B **حادثتين كيفيتين**، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$.	
④ إذا كانت A وَ B **حادثتين غير متلائمتين (منفصلتين)**، فإنّ: $\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$.	$A \cap B = \emptyset$ $P(A \cap B) = 0$
⑤ إذا كانت الحادثة A **جزءاً من** B (**أي:** $A \subset B$)، فإنّ: $\boxed{P(A) \leq P(B)}$.	
⑥ $\boxed{P(\overline{A}) = 1 - P(A)}$، حيث ‾ **حادثة عكسية** للحادثة .	$\begin{cases} A \cap \overline{A} = \emptyset \\ A \cup \overline{A} = \Omega \end{cases}$
⑦ A وَ B **حادثتان مستقلتان (Evénements indépendants)**، معناه: $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P(B)}$. (**تحقق** إحدى الحادثتان، **لا يُغيّر إحتمال** الحادثة الأخرى)	**نتيجة** وَ $\overline{B}$ **مستقلتين** ‾ وَ B **مستقلتين** ‾ وَ $\overline{B}$ **مستقلتين**

5 العد Le dénombrement

❶ القائمة La liste

تعريف

E مجموعة منتهية ذات n **عنصراً** $(n \geq 1)$، و p عدد طبيعي $(p \geq 1)$؛

- نسمي **قائمة** ذات p عنصراً من E كل **متتالية مرتبة** من p عنصراً من عناصر E.

ملاحظة

تتميز **عناصر القائمة** بأهمية **الترتيب** وإمكانية **التكرار**.

عدد القوائم

عدد القوائم ذات p **عنصراً** من مجموعة ذات n **عنصراً** يساوي $\boxed{n^p}$؛

حيث: $n \in \mathbb{N}^*$ و $p \in \mathbb{N}^*$.

❷ الترتيبة L'arrangement

تعريف

هي **قائمة ليس فيها التكرار** $(1 \leq p \leq n)$.

ملاحظة

تتميز **عناصر الترتيبة** بأهمية **الترتيب** وعدم **التكرار**.

عدد الترتيبات

عدد ترتيبات ذات p **عنصراً** من مجموعة ذات n **عنصراً**، والذي نرمز إليه بـ $\boxed{A_n^p}$ يُحسب كما يلي

$\boxed{A_n^p = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times (n-p+1)}$؛

ملاحظة: ① الجداء **يحوي p عاملاً**، حيث: $1 \leq p \leq n$.

② $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$.

نتيجة: $\boxed{A_1^1 = A_1^0 = 1}$

❸ التوفيقة La combinaison

تعريف

E مجموعة منتهية ذات n **عنصراً** $(n \geq 0)$، و p عدد طبيعي $(p \geq 0)$؛

- نسمي **توفيقة** ذات p عنصراً من E كل **مجموعة جزئية** من E ذات p عنصراً من عناصر E.

ملاحظة

تتميز **عناصر التوفيقة** بعدم **الترتيب** وعدم **التكرار**.

عدد التوفيقات

عدد التوفيقات ذات p **عنصراً** من مجموعة ذات n **عنصراً**، والذي نرمز إليه بـ $\boxed{A_n^p}$ يُحسب كما يلي

$\boxed{C_n^p = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$؛

حيث: $n \in \mathbb{N}$ و $p \in \mathbb{N}$.

نتائج

① $\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$، $(p = 0$ أو $p = n)$

② $\boxed{C_n^1 = n}$، $(p = 1)$

③ إذا كان $p > n$، فإنّ: $\boxed{C_n^0 = C_n^n = 1}$.

④ $\boxed{C_n^p = C_n^{n-p}}$، $(0 \leq p \leq n)$

⑤ $\boxed{C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p = C_n^p}$، $(1 \leq p \leq n)$

④ التبديلة La permutaion

تعريف

عندما يكون $\boxed{n = p}$، تسمى الترتيبة؛ تبديلة.

ملاحظة

التبديلة حالة خاصة من الترتيبة.

عدد التبديلات

عدد التبديلات ذات n **عنصراً**، والذي نرمز إليه بـ$\boxed{n!}$ يُحسب كما يلي: $\boxed{n! = n(n-1)(n-2) \times \ldots \times 2 \times 1}$؛

ملاحظة: ① $n!$ يُقرأ " عاملي n ".

② $\boxed{A_n^n = n!}$.

نتيجة: $\boxed{A_1^1 = 1! = 1}$، وَنصطلح على أنّ: $\boxed{0! = 1}$.

استخدام العدّ في:

الطريقة / المطلوب	① تشكيل أعداد	② تشكيل لجان (جمعيات)	③ سحب من كيس
قائمة عدد القوائم هو $\boxed{n^p}$	الأرقام يُمكن أن تتكرر		على التوالي وبالإرجاع **(مع الإعادة)** ▪ الترتيب مهم. ▪ التكرار ممكن.
ترتيبة عدد الترتيبات هو $\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$	الأرقام لا يُمكن أن تتكرر	مع ذِكر وظيفة كل شخص **(المهام محددة)** ▪ الترتيب مهم. ▪ التكرار غير ممكن.	على التوالي دون إرجاع **(دون الإعادة)** ▪ الترتيب مهم. ▪ التكرار غير ممكن.
توفيقة عدد التوفيقات هو $\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$		عدم ذِكر وظيفة كل شخص **(المهام غير محددة)** ▪ الترتيب غير مهم.	في آنٍ واحد ▪ الترتيب غير مهم.
يُعتبر	n عدد الأرقام الكلي. p عدد الأرقام لتشكيل ..	n عدد الأشخاص الكلي. p عدد الأشخاص المختارين.	n عدد الكريات الكلي. p عدد الكريات المسحوبة.

لحساب عدد الحالات الملائمة لحادثة: (' **و** ' تعني الضرب) (' **أو** ' تعني الجمع).

دستور ثنائي الحد: La formule du binôme

a و b عددان حقيقيان غير متعاكسين، و n عدد طبيعي.

$$(a+b)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p a^{n-p} b^p = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \dots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n$$

المثلث العددي: Le triangle numérique

n \ P	0	1	2	3	4	5	6
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
6	1	6	15	20	15	6	1

$$C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^{p} = C_n^p$$

6 المتغير العشوائي La variable aléatoire

تعريف

نسمي **متغيّراً عشوائياً** X، كل دالّة عددية معرّفة على المجموعة الشاملة Ω.

قانون الإحتمال لمتغيّر عشوائي

X متغيّر عشوائي معرّف على Ω، لتكن I مجموعة قيم X (أي: $I = \{x_1; x_2; \dots; x_n\}$)

- **قانون الإحتمال للمتغيّر العشوائي X**، هو **دالّة** معرّفة على I، تُرفق بكل قيمة x_i من I، العدد $\boxed{P_i = P(X = x_i)}$ والذي يُقرأ: " الإحتمال حتى يأخذ X القيمة x_i ".

ملاحظة: ① بما أنّ: $\begin{cases} P_i \geq 0 \\ \sum_{i=1}^{n} P_i = P_1 + P_2 + \dots + P_n = 1 \end{cases}$ ، فإنّ: $\boxed{0 \leq P_i \leq 1}$.

② نُلخص **قانون إحتمال X** في جدول كما يلي:

القيم x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_n
الإحتمال $P_i = P(X = x_i)$	P_1	P_2	$\dots$	P_n

❶ الأمل الرياضياتي L'espérance mathématique

الأمل الرياضياتي لـ X

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$$

❷ التباين LA variance

التباين للمتغيّر X

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left[x_i - E(X)\right]^2 . P_i$$

أو

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i)^2 . P_i - \left[E(X)\right]^2 = E(X^2) - \left[E(X)\right]^2$$

❸ الإنحراف المعياري L'écart type

التباين لـ X

$$S(X) = \sqrt{V(X)}$$

7 الإحتمالات الشرطية Probabilités conditionnelles

تعريف (التقني رياضي غير معنيين بهذا العنصر)

ليكن P قانون إحتمال على Ω، ولتكن A وَ B حادثتين، حيث $P(A) \neq 0$؛

احتمال الحادثة B، علماً أنّ A مُحققة هو **الإحتمال** الذي نرمز إليه بـ$P_A(B)$ أو $P(B/A)$ والمُعرّف كما يلي: $\boxed{P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$.

نتائج من التعريف:

- $\boxed{P(A \cap B) = P(A) \times P_A(B)}$.
- $\boxed{P(A \cap B) = P(B) \times P_B(A)}$.

8 دستور الإحتمالات الكلية Formule des Probabilités Totales

لتكن A_1، A_2، A_3، ...، A_n **حوادث** إحتمالاتها **غير معدومة**، وتُشكل **تجزئة** للمجموعة الشاملة Ω،

لدينا من أجل كل حادثة B: $\boxed{P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)}$

أي: $\boxed{P(B) = P(A_1) \times P_{A_1}(B) + P(A_2) \times P_{A_2}(B) + \cdots + P(A_n) \times P_{A_n}(B)}$.

ملاحظة: A_1، A_2، A_3، ...، A_n تُشكل **تجزئة** للمجموعة الشاملة Ω؛ **معناه:**

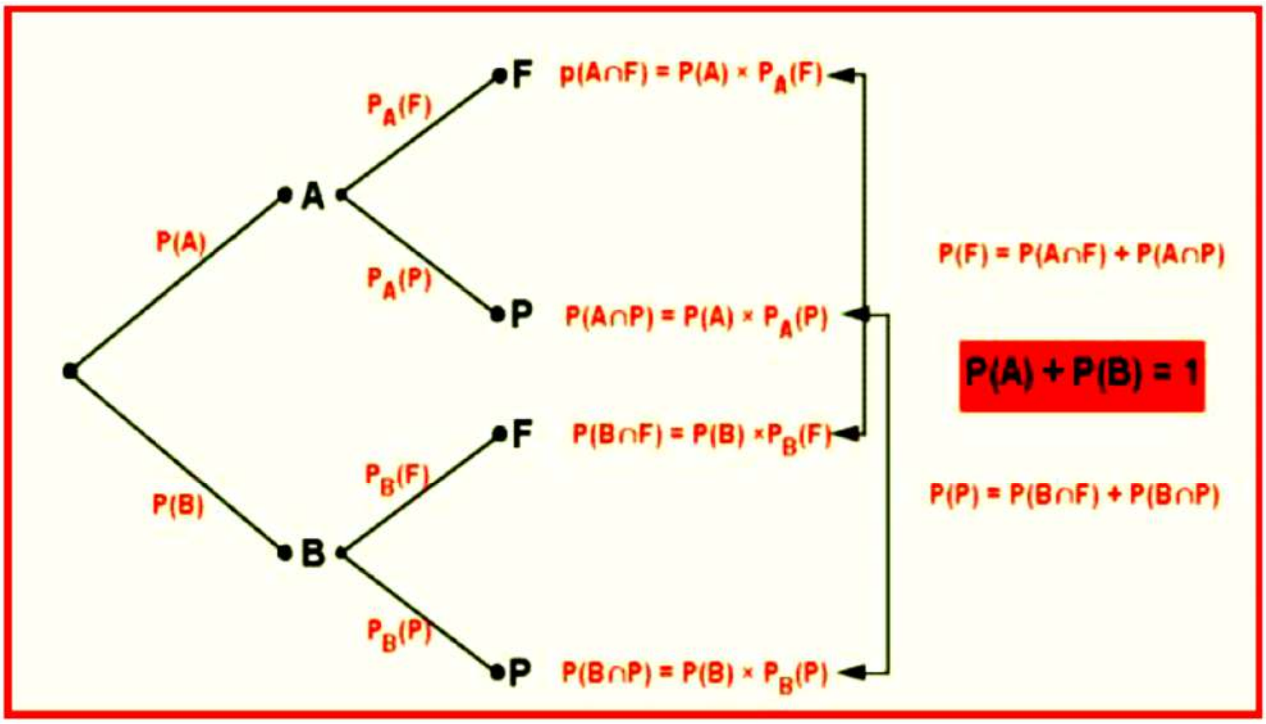
ليس من بينها الحادثة المستحيلة، وأنّها غير متلائمة مثنى مثنى، وأنّ إتحادها هو المجموعة الشاملة Ω.

8 شجرة الإحتمالات L'arbre de probabilité

تمهيد

في بعض الحالات، مثلاً؛ عند **تكرار تجربة عشوائية**، أو **عند استخدام الاحتمالات الشرطية** ... إلخ،

يُنصح **باستخدام شجرة الاحتمالات** (طبعاً، **إذا لم يكن عدد المخارج كبير جداً**).



جمع وإعداد الأستاذ بوعزة مصطفى تيارت؛ الشكر موصول للأستاذ جبالي محمد واد السوف.