

الدالة الأسية

1- تعريف

رمزها exp وهي الدالة الوحيدة المعرفة والقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ التي تحقق:

$$\begin{cases} exp' = exp \\ exp(0) = 1 \end{cases}$$

نكتب $exp(x) = e^x$ حيث $e \approx 2,718$ لدينا $e^0 = 1$ و $e^1 = e$

2- خواص جبرية

$(e^x)^n = e^{nx} \ (n \in \mathbb{N})$	$e^{-x} = \frac{1}{e^x}$	$e^x > 0$
$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$	$e^{x+y} = e^x \cdot e^y$	

3- النهايات

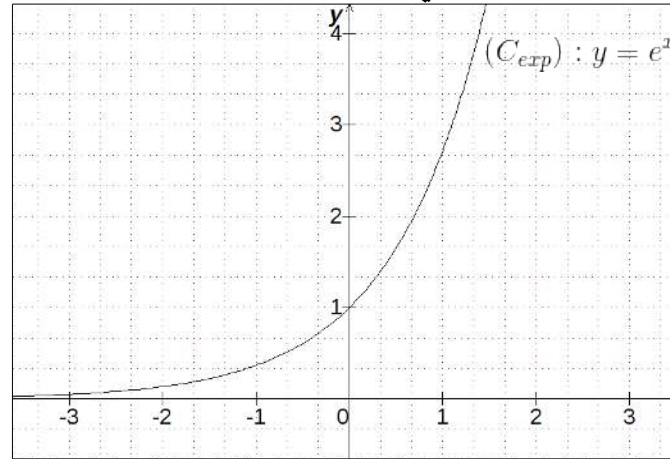
$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$
--	--

4- اتجاه التغير

مهما كان x من $\mathbb{R}$ لدينا: $exp'(x) = e^x > 0$ ومنه الدالة exp متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ وجدول تغيراتها هو:

x	$-\infty$	$+\infty$
$exp'(x)$		+
$exp(x)$	0	$+\infty$

5- التمثيل البياني



6- نهايات شهيرة

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0$
$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$	

7- الدوال من الشكل $exp \circ u$

أ- تعريف:

$$(exp \circ u)(x) = e^{u(x)}; x \in D_u$$

ب- المشتقة:

مهما كان x من D_u لدينا:

$$(exp \circ u)'(x) = u'(x) \cdot e^{u(x)}$$

للدالتين u و $exp \circ u$ نفس اتجاه التغير على كل مجال من D_u

ج- الإشارة:

مهما كان x من D_u لدينا: $e^{u(x)} > 0$

8- الدالة الأسية ذات الأساس a

أ- تعريف:

$$a^x = e^{x \ln a} \dots / x \in \mathbb{R}; a \in \mathbb{R}_+^*$$

ب- حالة خاصة:

$$10^x = e^{x \ln 10} \dots / x \in \mathbb{R}$$

ج- ملاحظات:

* الدالة الأسية ذات الأساس a ليس لها رمز خاص بها

* تبقى خواص الدالة exp صالحة للدالة الأسية ذات الأساس a

9- حل بعض المعادلات التفاضلية

حالا

المعادلة التفاضلية

$y = C e^{ax} \dots / C \in \mathbb{R}$	$y' = ay \dots / a \in \mathbb{R}^*$
$y = C e^{ax} - \frac{b}{a} \dots / C \in \mathbb{R}$	$y' = ay + b \dots / a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}$
1- دققا بالمعادلة $q^2 + aq + b = 0$	
2- لحسب المعز $\Delta = a^2 - 4b$	
3- نحل حسب إحدى الحالات التالية:	
$\Delta = 0$	
$y = (C_1 x + C_2) e^{q_0 x} \dots / C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	
$\Delta > 0$	
$y = C_1 e^{q_1 x} + C_2 e^{q_2 x} \dots / C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	
$\Delta < 0$	
حيث $q_1 = \alpha + i\beta$; $q_2 = \alpha - i\beta$ ومنه:	
$y = (C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)) e^{\alpha x} \dots / C_1, C_2 \in \mathbb{R}$	
	$y'' + ay' + by = 0 \dots / a, b \in \mathbb{R}$