مؤسسة التربية و التعليم الخاصة
أوبينياتر
ابتدائي متوسط ثانوي اقامة
Email: saitameur3@gmail.com فاكس: 023 71 54 67 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 رقم الهاتف:

المستوى:الثالثة رياضيات **مارس 2023**

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات **المدة :2 سا**

التمرين1

1) أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للأعداد 2^n ,3^n ,4^n على 7.

2) عين باقي قسمة العدد $4^{2018} + 3^{2017} - 2^{2016}$ على 7.

3) استنتج أنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}$: $5 \times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$.

4) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $10^{3n} + 4^{2n} - 22^n \equiv 0[7]$.

5) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2^n + 3^n + 4^n \equiv 2[7]$ و $0 < n \leq 25$.

6) أ- برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $(4n+3) \times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 2(2n+1) \times 3^{2n}[7]$

ب- عين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث : $(4n+3) \times 9^n - 4^{2n+3} \equiv 0[7]$ و n من مضاعفات 8.

7) يحتوي كيس على 10 قريصات مرقمة من 0 إلى 9, نسحب في آن واحد قريصتين ونعتبر أن كل السحبات الممكنة متساوية الاحتمال.

أ- ماهو عدد طرق السحب بالكيفية المذكورة ؟

ب- ماهو احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين من بواقي قسمة 3^nعلى 7.

التمرين 2

I) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3 + u_n^2}{1 + u_n} \end{cases}$$

1) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$.

2) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}(3 - u_n)$.

3) بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما, ثم استنتج أنها متقاربة.

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_n}{1+u_n} - \frac{3}{4} < 0$.

ب- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 3 - u_n < 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ج- استنتج نهاية المتتالية (u_n).

التمرين 3

I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = \frac{e^x}{1+2e^x} + e^x \ln(1+2e^x)$, (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O,\vec{i};\vec{j})$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $1 + 2e^x > 1$.

2) أدرس تغيرات الدالة f.

3) عين معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

4) أنشئ (Δ) و (C_f).

II) لتكن الدالتين G و g المعرفتين على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = (1+2e^x)\ln(1+2e^x) - (1+2e^x)$

و $g(x) = 2e^x \ln(1+2e^x)$.

1) بين أن G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$.

2) بين أن الدالة : $x \to \frac{e^x}{1+2e^x}$ تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$, ثم عينها.

3) λ عدد حقيقي حيث $\lambda < 0$. أحسب التكامل $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx$, ثم فسر النتيجة هندسيا.

بالتوفيق.

رقم التمرين	الحل	العلامة
التمرين1 **3 ن**	**1) دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للأعداد 2^n, 3^n, 4^n على 7.** $2^0 \equiv 1[7]$ ، $2^1 \equiv 2[7]$ ، $2^2 \equiv 4[7]$ ، $2^3 \equiv 1[7]$ ، نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3 . إذا كان : $n = 3k$ فإن : $2^{3k} \equiv 1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 . إذا كان : $n = 3k+1$ فإن : $2^{3k+1} \equiv 2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 . إذا كان : $n = 3k+2$ فإن : $2^{3k+2} \equiv 4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 . **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للأعداد, 3^n على 7** $3^0 \equiv 1[7]$ ، $3^1 \equiv 3[7]$ ، $3^2 \equiv 2[7]$ ، $3^3 \equiv 6[7]$ ، $3^4 \equiv 4[7]$ ، $3^5 \equiv 5[7]$ ، $3^6 \equiv 1[7]$ نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 6 . إذا كان : $n = 6k$ فإن : $3^{6k} \equiv 1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 . إذا كان : $n = 6k+1$ فإن : $3^{6k+1} \equiv 3[7]$ و بالتالي الباقي هو 3 . إذا كان : $n = 6k+2$ فإن : $3^{6k+2} \equiv 2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 . إذا كان : $n = 6k+3$ فإن : $3^{6k+3} \equiv 6[7]$ و بالتالي الباقي هو 6 . إذا كان : $n = 6k+4$ فإن : $3^{6k+4} \equiv 4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 . إذا كان : $n = 6k+5$ فإن : $3^{6k+5} \equiv 5[7]$ و بالتالي الباقي هو 5 . **دراسة حسب قيم العدد الطبيعي n , بواقي القسمة الاقليدية للأعداد 4^n على 7.** $4^0 \equiv 1[7]$ ، $4^1 \equiv 4[7]$ ، $4^2 \equiv 2[7]$ ، $4^3 \equiv 1[7]$ ، نلاحظ أن بواقي القسمة تشكل متتالية دورية و دورها 3 . إذا كان : $n = 3k$ فإن : $4^{3k} \equiv 1[7]$ و بالتالي الباقي هو 1 . إذا كان : $n = 3k+1$ فإن : $4^{3k+1} \equiv 4[7]$ و بالتالي الباقي هو 4 . إذا كان : $n = 3k+2$ فإن : $4^{3k+2} \equiv 2[7]$ و بالتالي الباقي هو 2 . 2) تعيين باقي قسمة العدد $4^{2018} + 3^{2017} - 2^{2016}$ على 7: لدينا : $2^{2016} - 3^{2017} + 4^{2018} \equiv 2^{3\times672} - 3^{6\times336+1} + 4^{3\times672+2}[7]$ $\equiv 1 - 3 + 2[7]$ $\equiv 0[7]$ إذن باقي قسمة العدد $4^{2018} + 3^{2017} - 2^{2016}$ على 7 هو 0 . 3) استنتاج أنه من أجل كل $k \in \mathbb{N}$: $5 \times 2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$: لدينا : $5\times2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 5\times2^{3k+1} + 2^{6k+5} + 4\times7[7]$ $\equiv 5\times2^{3k+1} + 2^{6k}\times2^5 + 4\times7[7]$ $\equiv 3 + 4 + 0[7]$ $5\times2^{3k+1} - 5^{6k+5} + 28 \equiv 0[7]$ 4) حل في مجموعة الأعداد الطبيعية المعادلة : $10^{3n} + 4^{2n} - 22^n \equiv 0[7]$:	

لدينا : $10^{3n}+4^{2n}-22^n\equiv 0[7]$ تكافئ : $3^{3n}+4^{2n}-1^n\equiv 0[7]$ تكافئ : $6^n+2^n-1\equiv 0[7]$

تكافئ : $2^n\times 3^n+2^n-1\equiv 0[7]$ تكافئ : $2^n\left(3^n+1\right)-1\equiv 0[7]$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$3^n+1\equiv$	2	4	3	0	5	6	[7]
$2^n\left(3^n+1\right)\equiv$	2	1	5	0	3	3	[7]
$2^n\left(3^n+1\right)-1\equiv$	1	0	4	6	2	2	[7]

من الجدول يتبين أن : $2^n\left(3^n+1\right)-1\equiv 0[7]$ لما : $n\equiv 1[6]$ أي : $n=6k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

5) عين الأعداد الطبيعية n التي تحقق : $2^n+3^n+4^n\equiv 2[7]$ و $0<n\leq 25$

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$2^n\equiv$	1	2	4	1	2	4	[7]
$3^n\equiv$	1	3	2	6	4	5	[7]
$4^n\equiv$	1	4	2	1	4	2	[7]
$2^n+3^n+4^n\equiv$	3	2	1	1	3	4	[7]

من الجدول يتبين أن : $2^n+3^n+4^n\equiv 2[7]$ لما : $n\equiv 1[6]$ أي : $n=6k+1$ مع $k\in\mathbb{N}$.

بما أن : $0<n\leq 25$ فإن : $n\in\{1;7;13;19;25\}$.

6) أ- برهان أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$

لدينا : $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv(4n+3)\times 3^{2n}-(-3)^{2n+3}[7]$

$\equiv(4n+3)\times 3^{2n}+3^{2n+3}[7]$

$\equiv(4n+3)\times 3^{2n}+3^{2n}\times 3^3[7]$

$\equiv(4n+3)\times 3^{2n}+3^{2n}\times 6[7]$

$\equiv(4n+9)\times 3^{2n}[7]$

$\equiv(4n+2)\times 3^{2n}[7]$

$(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 2(2n+1)\times 3^{2n}[7]$

ب- تعيين أصغر قيمة للعدد الطبيعي n بحيث : $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 0[7]$ و n من مضاعفات 8:

لدينا : $(4n+3)\times 9^n-4^{2n+3}\equiv 0[7]$ تكافئ : $2(2n+1)\times 3^{2n}\equiv 0[7]$ تكافئ : $2(2n+1)\equiv 0[7]$ تكافئ : $2n+1\equiv 0[7]$

تكافئ : $2n\equiv -1[7]$ تكافئ : $2n\equiv 6[7]$ أي : $n\equiv 3[7]$ منه : $n=7k+3$ مع $k\in\mathbb{N}$.

لدينا أيضاً n من مضاعفات 8 معناه : $n\equiv 0[8]$ منه : $7k+3\equiv 0[8]$ تكافئ : $-k\equiv -3[8]$ تكافئ : $k\equiv 3[8]$

و بالتالي : $k=8k'+3$ مع $k'\in\mathbb{N}$

إذن أصغر قيمة للعدد الطبيعي n هي لما $k=3$ و عليه $n=24$.

7) أ- عدد طرق السحب بالكيفية المذكورة:

بما أن السحب في آن واحد ، نستعمل عدد التوفيقات في حساب عدد طرق السحب ، إذن : $C_{10}^2=45$.

ب- احتمال أن يكون مجموع الرقمين المسحوبين من بواقي قسمة 3^n على 7 هو $\frac{12}{45}$.

1) من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < 3$ (البرهان بالتراجع).

2) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $3 - u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}(3 - u_n)$:

لدينا : $3-u_{n+1}=3-\frac{3+u_n^2}{1+u_n}$ أي : $3-u_{n+1}=\frac{3+3u_n-3-u_n^2}{1+u_n}=\frac{3u_n-u_n^2}{1+u_n}=\frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$

التمرين2 ومنه $3 - u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}(3 - u_n)$

3) تبيان أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما:

$u_{n+1}-u_n=\frac{3+u_n^2}{1+u_n}-u_n$ أي : $u_{n+1}-u_n=\frac{3+u_n^2-u_n-u_n^2}{1+u_n}=\frac{3-u_n}{1+u_n}$

8 ن

لدينا $u_n < 3$ ومنه $3-u_n > 0$ و $1 + u_n > 0$ ومنه $u_{n+1}-u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

بما أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و $u_n < 3$ من أ جل كل عدد طبيعي n (محدودة من الأعلى) فهي متقاربة.

4) أ- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{u_n}{1+u_n} - \frac{3}{4} < 0$

$\frac{u_n}{1+u_n}-\frac{3}{4}=\frac{4u_n-3-3u_n}{4(1+u_n)}=\frac{u_n-3}{4(1+u_n)}$ و بما أن : $u_n<3$ فإن : $u_n-3<0$ ، إذن : $\frac{u_n}{1+u_n}-\frac{3}{4}<0$.

ب- تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < 3 - u_n < 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

لدينا : $\frac{u_n}{1+u_n}-\frac{3}{4}<0$ أي : $\frac{u_n}{1+u_n}<\frac{3}{4}$

$\frac{u_n}{1+u_n}(3-u_n)<\frac{3}{4}(3-u_n)$ و منه : $3-u_{n+1}<\frac{3}{4}(3-u_n)$

ومنه $0 < 3 - u_n < 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$

•) بتعويض قيم n نجد : $0<3-u_1<\frac{3}{4}(3-u_0)$ و $0<3-u_2<\frac{3}{4}(3-u_1)$ و $0<3-u_3<\frac{3}{4}(3-u_2)$ .....

$0<3-u_n<\frac{3}{4}(3-u_{n-1})$. بالضرب طرف لطرف سيكون :

$0<(3-u_1)(3-u_2)\times.....\times(3-u_n)<\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-u_0)(3-u_1)\times.....\times(3-u_{n-1})$

بالإختزال نجد : $0<3-u_n<\left(\frac{3}{4}\right)^n(3-u_0)$ و هو المطلوب .

ج- استنتاج نهاية المتتالية (u_n)

لدينا $0 < 3 - u_n < 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} 3 - u_n = 0$ لأن $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$ ومنه $\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$

1) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $1 + 2e^x > 1$:

ثانيا من أجل كل عدد حقيقي x فإن $e^x > 0$ ومنه $1 + 2e^x > 1$.

2) دراسة تغيرات الدالة f:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' معرفة بـ

$$f'(x) = \frac{e^x(4e^{2x}+2e^x+1)}{(1+2e^x)^2} + e^x\ln(1+2e^x)$$

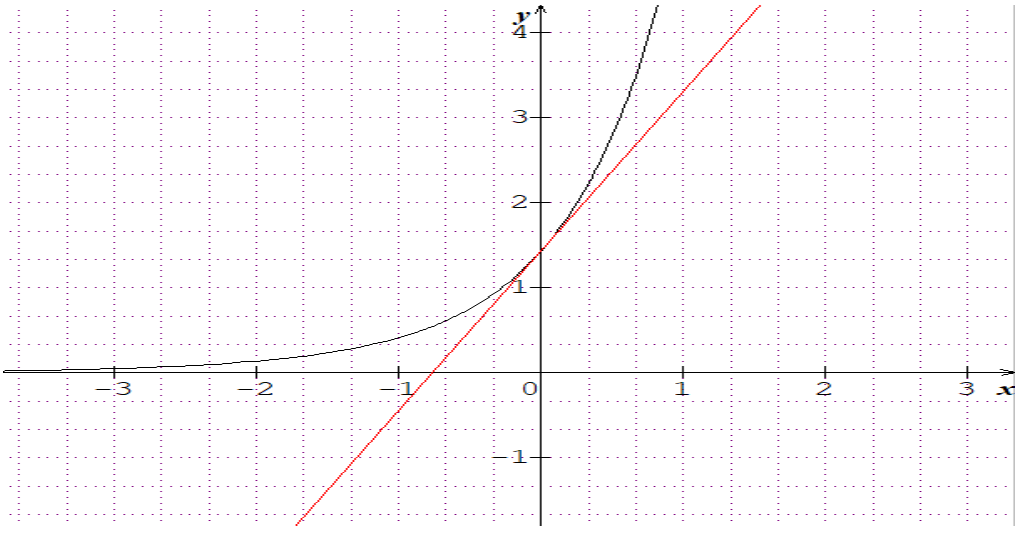
لدينا $1 + 2e^x > 1$ ومنه $\ln(1 + 2e^x) > 0$ ولدينا $e^x > 0$

التمرين3 ومنه $\frac{e^x(4e^{2x}+2e^x+1)}{(1+2e^x)^2} + e^x\ln(1+2e^x) > 0$ إذن $f'(x) > 0$.

ومنه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

- جدول التغيرات.

4) أنشاء (Δ) و (C_f)



1) نبيان أن G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$:

الدالة G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة G' معرفة بـ $G'(x) = g(x)$

ومنه G دالة أصلية للدالة g على $\mathbb{R}$

2) تبيان أن الدالة : $x \to \frac{e^x}{1+2e^x}$ تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$:

الدالة : $x \to \frac{e^x}{1+2e^x}$ مستمرة على $\mathbb{R}$ وعليه تقبل دوال أصلية على $\mathbb{R}$ من الشكل :

$x \to \frac{1}{2}\ln(1 + 2e^x)$)

3) حساب التكامل $A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} f(x)dx$:

$$A(\lambda) =$$

$A(\lambda)$ يمثل مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_f) و المستقيمات ذي المعادلات

$x = 1$; $x = \lambda$; $y = 0$