

دروس الدعم والتفوق في مادة الرياضيات - الجزائر

دفاتر التكوين في الرياضيات والاستعداد الجيد للتفوق في شهادة البكالوريا

السنة الثالثة ثانوي شعبة الرياضيات و تقني رياضي و العلوم التجريبية

Bac 2022

الدقة 01

المحور : الدوال العددية لمتغير حقيقي

النهايات والسلوك التقاربي لدالة

1/ ملخص شامل للدرس

2/ تمارين للتمكن من أساسيات الدرس

3/ نحو البكالوريا : نماذج امتحانات

وبكالوريات وطنية وأجنبية

العلم والهندسة

إعداد: الأستاذ حليلا عمار مكوّن ثانوي في مادة الرياضيات

الدفر 01 :النهايات و التفسيرات الهندسية

الدفر 02 :الاستمرارية ومبرهنة القيم المتوسطة

الدفر 03 : الاشتقاقية و تطبيقاتها

الدفر 04 :الدالة الأسية النيبيرية و المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$

الدفر 05 :دالة اللوغاريم النيبيري والتزايد المقارن وتتمت

الدفر 06 :الدوال الأصلية والحساب التكامل وتطبيقاته في حساب المساحات

الدفر 07 :المتتاليات العددية و البرهان بالتراجع

الدفر 08 :الاحتمالات و التحليل التوفيقي

الدفر 09 :الأعداد المركبة و التحويلات النقطية

الدفر 10 :بكالوريات تجريبية و مراجعات شاملة

بسم الله الرحمن الرحيم

الحمد لله والصلاة والسلام على سيدنا محمد خاتم الأنبياء والمرسلين

المقدمة

بداية نتوجه إلى خالقنا بالحمد والثناء الذي وفقنا إلى تحقيق هذا العمل بكل ما وهبنا من قوة العقل والإرادة.

وبتوفيق من الله وحده ، يسرني أن أضع هذا العمل المتواضع بين أيدي تلاميذنا الأعزاء و زملائنا الأساتذة الكرام ، راجيا أن يجدوا فيه ما يعينهم للاختيار تمارين ونماذج امتحانات وملخصات شاملة للدروس وقسمتها إلى دفاتر، كل دفتر مكون من :

ملخص شامل ومتجدد للدرس

تمارين هادفة للتمكن من الدرس

نحو البكالوريا : نماذج امتحانات
وبكالوريات وطنية وأجنبية

الدفتر

ووصيتي :-إعادة الدرس والتمكن من المعارف والكفاءات

- المحاولة ثم المحاولة ثم المحاولة في التمارين ومراجعة الأستاذ في التصحيح

-الجزء نحو البكالوريا هام جدا اجتهد في حل جميع النماذج فهي تجعلك تكتسب كفاءة عالية ومميزة

لمعالجة امتحان البكالوريا

-الملخص اجتهدت أن يكون شامل ومرجعي للطلاب

-صممت التمارين والتدريبات وفقا للمناهج الجديدة لوزارة التربية الوطنية

و اختيرت التمارين من الكتاب المدرسي ونماذج بكالوريات وطنية وأجنبية .

ونسعى إلى الوصول بالتلميذ إلى تحقيق الأهداف التالية:

1-اكتساب معارف صحيحة والتدريب على الاستدلال المنطقي والتحرير الرياضي للوصول إلى النتائج المستهدفة

2-اختبار مكتسباته من خلال تمارين هادفة

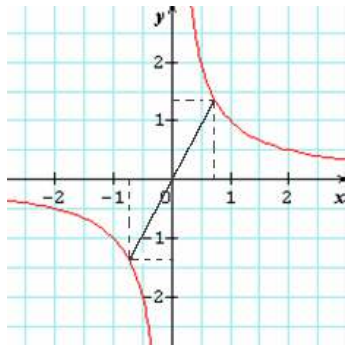
3-اكتساب كفاءة عالية ومميزة لمعالجة امتحان البكالوريا

رغم كل ما بذل من جهد — لا يخلو هذا العمل من بعض النقائص و الهفوات ، نسعد جدا بكل ملاحظة ونأخذها بعين الاعتبار في الطبعة القادمة.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى روح والدي الطاهرة وإلى روح والدي الطاهرة تغدهما الله برحمته الواسعة و اسكنهما فسيح جناته ولأفراد أسرتي وكل إخواني ولأسرة التربية الوطنية بالجزائر الحبيبة التي أعطتنا الكثير ونأمل أن نسدي لها ولو قليلا مما تستحقه جزائرننا العظيمة

ملخص هام وشامل لدرس النهايات

1. نهايات الدوال المرجعية: يبرهن أن و حاول من التمثيلات البيانية للدوال المرجعية تستنبط مايلي :



بما أن 0 ليس له صورة بالدالة مقلوب ، فإن منحنيا لها
يقطع محور الترتيب .
يسمى المنحنى الممثل للدالة "مقلوب" قطعاً زائداً.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

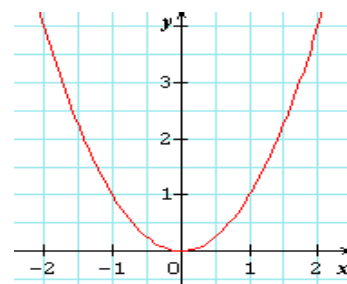
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$$

نتيجة

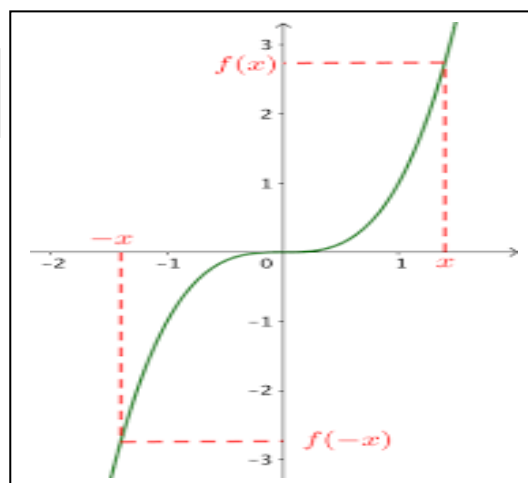
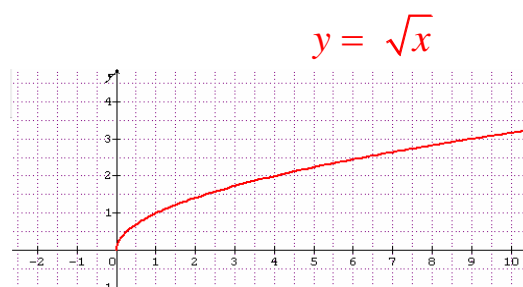
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & n = 2k \\ -\infty & n = 2k+1 \end{cases}$$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$



(C) هو منحنى الدالة مربع
معادلة (C) هي : $y = x^2$
يسمى (C) قطعاً مكافئاً ذروته 0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$



2. تعاريف :

- القول أن نهاية الدالة f عند $+\infty$ هي $+\infty$ يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما A ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما B بحيث: إذا كان $x > B$ يكون $f(x) > A$ و نكتب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$
- أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ كبيرا بالقدر الذي نريد بشرط x كبير بالقدر الكافي .

مثال : أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-2} = +\infty$

- القول أن نهاية الدالة f عند x_0 هي l يعني أنه من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما e ، يوجد على الأقل عدد حقيقي موجب تماما α بحيث: إذا كان $0 < |x - x_0| < \alpha$ يكون $0 < |f(x) - l| < e$ و نكتب:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

- أي بمعنى : يمكننا جعل $f(x)$ قريبا من l بالقدر الذي نريد بشرط x قريب من x_0 بالقدر الكافي

مثال : أثبت أن : $\lim_{x \rightarrow 2} (4x - 1) = 7$

3. العمليات على النهايات :

f و g دالتان. a يمثل عدد حقيقي أو $+\infty$ أو $-\infty$. يبرهن أن:

• نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$l \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) + g(x))$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت	$-\infty$

• نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	$l \neq 0$	∞	0
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}$	∞	∞	∞
$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \times g(x))$	$l \times l'$	∞ حسب قاعدة الإشارات	∞ حسب قاعدة الإشارات	ح ع ت

• نهاية حاصل قسمة دالتين:

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \in \mathbb{R}$	l	∞	$l \neq 0$	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \in \mathbb{R}^*$	∞	l'	0	0	∞
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)$	$\frac{l}{l'}$	0	∞ حسب قاعدة الإشارات	∞ حسب قاعدة الإشارات	ح ع ت	ح ع ت

ملاحظة: تسمى الحالات التي لا تسمح فيها المبرهنات السابقة من استنتاج النهاية بحالات "عدم التعيين" (ح ع ت) ومنه نستنتج في العمليات العادية الثلاثة (الجمع ، الجداء ، القسمة) لدينا أربع حالات عدم التعيين وهي : $+\infty - \infty, \infty \times 0, \frac{\infty}{\infty}, \frac{0}{0}$

-وفي الحالة $f(x)^{g(x)}$ لدينا ثلاث حالات عدم تعيين وهي : $1^\infty, 0^0, \infty^0$

4. نهايات دوال مألوفة وقواعد إجرائية : قواعد إجرائية (يبرهن و تستعمل مباشرة في التطبيقات)

1 النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة.

مثال : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x^2 - 4x + 3) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3) = +\infty$

2 النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة.

مثال : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+3}{x^2-3x+4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2x}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{x} \right) = 0$

3 f دالة كثير حدود للمتغير الحقيقي x ، a عدد حقيقي . $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

4 $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$

5 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (تبرهن بالحصص)

5. نهاية دالة مركبة :

مبرهنة: a, b, c وتمثل أعدادا حقيقية أو $+\infty$ أو $-\infty$ ، u, v و f دوال حيث $f = v \circ u$.

إذا كانت $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ و إذا كانت $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ فإن $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c$

أمثلة : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{x}\right) = ?$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 3}{3x + 1}} = ?$

4-2 نهاية الدالة الجذر التربيعي لدالة : f دالة عددية موجبة في جوار x_0 و l عدد حقيقي موجب

تكون $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)}$ هي	إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ هي
$\sqrt{l}$	l
$+\infty$	$+\infty$

6. النهايات بالمقارنة : f, g و h دوال عددية معرفة ، على الأقل ، على المجموعة

يبرهن و نقبل : $D =]x_0 - \alpha; x_0[\cup]x_0; x_0 + \alpha[$:

*** مبرهنة الحد من الأسفل :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $g(x) \leq f(x)$ و كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = +\infty$$

*** مبرهنة الحد من الأعلى :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $f(x) \leq g(x)$ و كانت

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

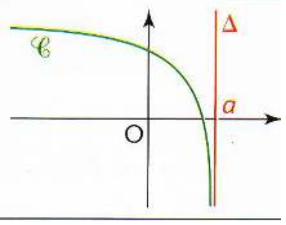
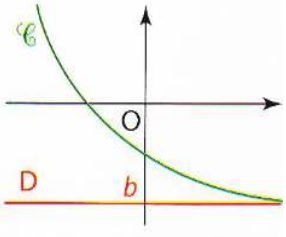
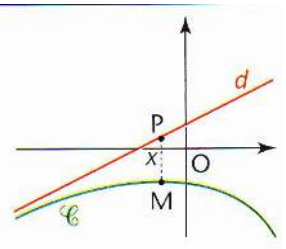
*** مبرهنة الحصر :** إذا كان من أجل كل عنصر x من D : $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$

$$\text{و كانت} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \quad \text{فإن} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$$

$$\text{مثال : احسب} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

7. التفسير البياني والسلوك التقاربي لدالة :

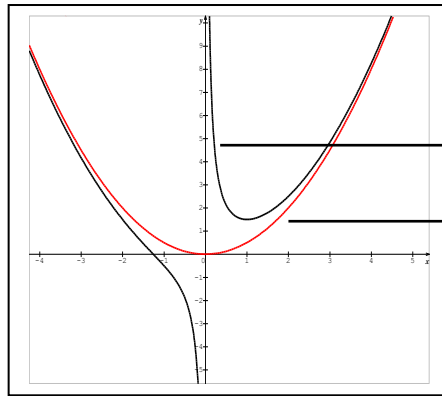
* a و b عدنان حقيقيان. f دالة معرفة على مجال I و (C) تمثيلها البياني في معلم $(O; I, J)$.

التمثيل البياني	المستقيم المقارب (تفسير بياني)	النهاية
	المستقيم (Δ) ذو المعادلة $x = a$ و الموازي لمحور الترتيب مستقيم مقارب للمنحني (C)	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ أو $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$
	المستقيم (D) ذو المعادلة $y = b$ و الموازي لمحور الفواصل مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$
	المستقيم (d) ذو المعادلة $y = ax + b$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحني (C) عند $+\infty$ أو عند $-\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$

• ملاحظات :

- 1 - إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = ax + b + \varphi(x)$ مع $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x) = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} \varphi(x) = 0$ فمن الواضح أن المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ($a \neq 0$) مستقيم مقارب مائل للمنحني الممثل للدالة f .
- 2 - لدراسة وضعية المنحني (C) الممثل لدالة f بالنسبة إلى مستقيم مقارب له معادلته $y = ax + b$ نقوم بدراسة إشارة الفرق $[f(x) - (ax + b)]$.
إذا كان $f(x) - (ax + b) < 0$ تكون وضعية (C) تحت المستقيم المقارب المائل.
إذا كان $f(x) - (ax + b) > 0$ تكون وضعية (C) فوق المستقيم المقارب المائل.
- 3 - ليكن (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم و ليكن (Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y = ax + b$ ($a \neq 0$) يكون المستقيم (Δ) مستقيما مقاربا للمنحني (C_f) عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$) إذا و فقط إذا تحقق ما يلي:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = b$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = b$)

- 4 - (C_f) و (C_g) التمثيلان البيانيان للدالتين f و g في معلم . (C_g) و (C_f) منحنيان متقاربان إذا و فقط إذا تحقق: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$ أو $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0$



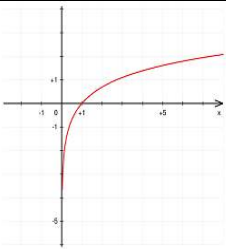
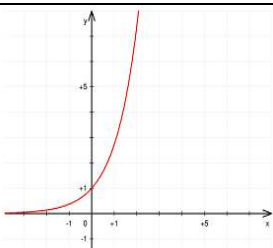
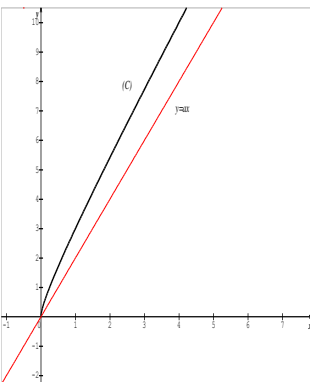
مثال : $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{x}$

$(C) : y = f(x)$

$(\Omega) : y = \frac{1}{2}x^2$

(C) و (Ω) متقاربان عند $+\infty$ و عند $-\infty$

(إضافة حسنة) = (C_f) التمثيل البياني لدالة f في معلم .

التمثيل البياني	(تفسير بياني)	النهاية
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$	(C_f) يقبل فرعاً مكافئاً في اتجاه محور الفواصل عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$	(C_f) يقبل فرعاً مكافئاً في اتجاه محور الترتيب عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$)
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$	(C_f) يقبل فرعاً مكافئاً في اتجاه المستقيم الذي معادلته : $y = ax$ عند $+\infty$ (على الترتيب عند $-\infty$)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax] = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$ (على الترتيب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - ax] = \infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$)

8. ملاحظات و طرائق : في هذا الموضوع أهم الكفاءات التي يركز عليها الطالب هي :

1- التحكم في حساب النهايات و تعلم طرائق رفع حالات عدم التعيين

إذا كانت موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحساب هذه النهاية تستعمل مباشرة

(مثال نهاية كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$ ،)

حساب نهاية

إذا كانت غير موجودة قاعدة إجرائية أو خاصية لحسابها

تستعمل المبرهنات المتعلقة بالعمليات على النهايات (مجموع دالتين ،)

إذا كانت ليست حالة من حالات

عدم التعيين ، نحصل على نتيجة النهاية

مثال : $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

إذا كانت حالة من حالات عدم التعيين

نفكر في رفعها بخبرة و حسب نوع الحالة

من الطرائق لرفع حالة عدم تعيين :

- إخراج عامل مشترك (العنصر المسيطر ،...) مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x} - 3)$

- التحليل و الاختزال مثال : $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2}$

- استعمال العبارة المرافقة مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-2x})$

- استعمال تعريف العدد المشتق : $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$ أو

، $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x\sqrt{4x+1}-6}{x-2}$: مثال $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)$

- تبديل المتغير لإبراز أو استعمال نهاية معلومة مثال : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

- استعمال مبرهنات النهايات بالمقارنة مثال : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x + \sin x}{x^2}$

2-التفسير البياني و السلوك التقاربي وتعيين المستقيمات المقاربة لمنحني و القدرة على رسم المنحني الممثل لدالة اي ترجمة جداول التغيرات و القراءة البيانية

مثال 01

x	$-\infty$	-4	2	5	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$+$	0	$-$
$f(x)$	2				1	

اليك جدول تغيرات الدالة f والمطلوب رسم

المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم

متعامد ومتجانس إذا علمت ان :

$$C_f \cap y=0 = -6;0 , 0;0 , 4;0 , 7;0$$

مثال 02

اليك جدول تغيرات الدالة f وليكن

المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم

متعامد ومتجانس إذا علمت ان :

x	$-\infty$	-2	-1	0	$+\infty$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$			$\frac{1}{2}$			$+\infty$
	$-\infty$	0		0		

المستقيم الذي D و $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - y_D] = 0$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x) - y_D$	+	0	-

- مستعينا بالنتائج السابقة ارسم بعناية D ، (C_f)

تمارين للتمكن من حساب النهايات و التفسيرات الهندسية

التمرين 01

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{-2; 1\}$ بـ $f(x) = \frac{2x+3}{x^2+x-2}$

1. حدد حسب قيم x إشارة $x^2 + x - 2$.
2. أدرس النهايات من اليمين و من اليسار عند كل من -2 و 1 وفسّر النتائج بيانياً.
3. أدرس نهايتي الدالة f عند $+\infty$ و عند $-\infty$ ثم فسر النتائج بيانياً.

التمرين 02

في كل حالة من الحالات التالية عيّن اكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f ثم احسب النهايات عند أطراف مجموعة تعريفها و عيّن معادلات المستقيمات المقاربة للمنحني الممثل للدالة f .

$$\begin{aligned} (1) \quad f(x) &= \frac{x^2 + 5x + 2}{x^2 + 4x} \quad (2) \quad f(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 1} \quad (3) \quad f(x) = \frac{-4x + 8}{x^2 - 4x + 5} \\ (4) \quad f(x) &= \frac{x^2 - x - 2}{x - 1} \quad (5) \quad f(x) = 2x + 3 - \frac{1}{x + 1} \quad (6) \quad f(x) = x + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 4}} \end{aligned}$$

التمرين 03

احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

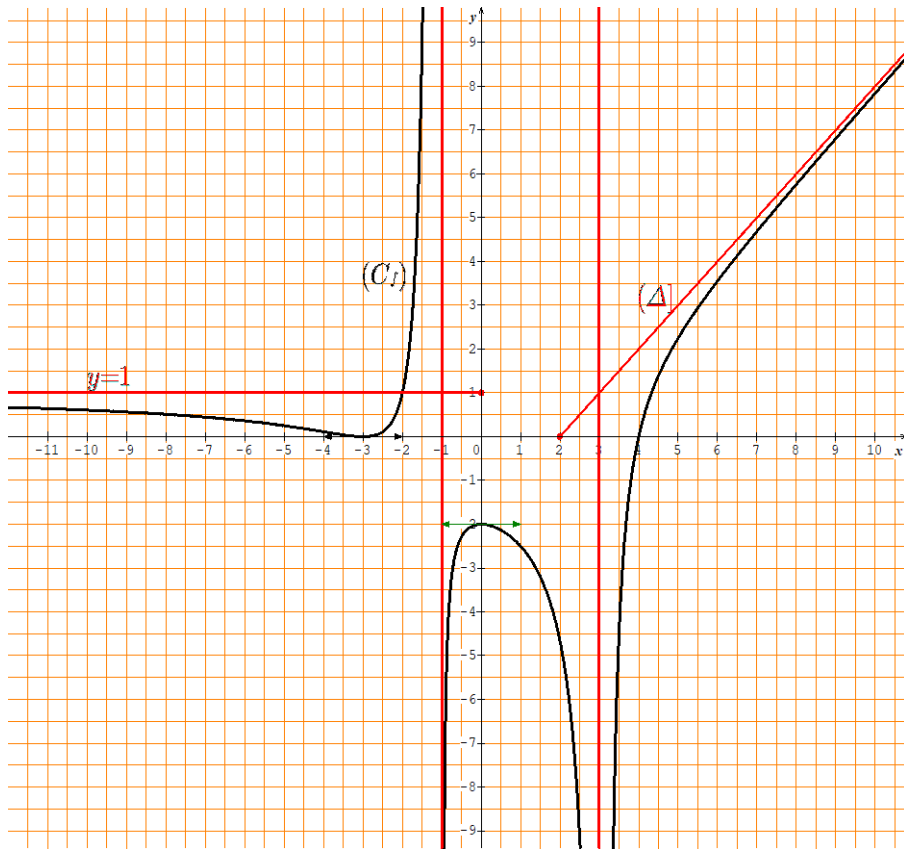
$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^2 - 3x + 2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x + 2}{x^3 - 3x^2 - x + 3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{x^2 - 5x + 4} \\ (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x-2}{4x+3}} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 2\sqrt{x}) \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1} \\ (8) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x}) \quad (10) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \right) \end{aligned}$$

التمرين 04

باستعمال تعريف العدد المشتق احسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned} (1) \quad \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^4 + x^3 - 7x^2 + 8x - 12}{x - 2} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{60} - 1}{3x - 3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \\ (4) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5+x} - 2}{x+1} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin x - 1}{6x - \pi} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x\sqrt{x+1} - 6}{x-3} \end{aligned}$$

التمرين 05



الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R} -]-1, 3[$ ، تمثيلها البياني في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $O; \vec{i}, \vec{j}$ (الشكل المقابل)

بقراءة بيانية :

- 1) عيّن النهايات عند حدود مجموعة تعريفها
 - 2) شكل جدول تغيراتها
 - 3) حدد حسب قيم x إشارة $f(x)$
 - 4) عيّن معادلة ديكارتية للمستقيم المقارب المائل
 - 5) ارسم المنحني الممثل للدالة g
- المعرفة كما يلي: $g(x) = -f(x)$
- ثم شكل جدول تغيراتها

التمرين 06

$$f(x) = \frac{x^3 + 2x^2}{(x+1)^2} \quad \text{الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} - \{-1\} \text{ :}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوى المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

2/ احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

(ب) استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

(ج) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل Δ .

4/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن: $f'(x) = \frac{x^2 + 3x + 4}{x + 1}$

(ب) شغل جدول تغيرات الدالة ثم ارسم Δ و C_f

التمرين 07

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	2	$+\infty$	
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	0

اليك جدول تغيرات الدالة f وليكن

المنحني (C_f) الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس

إذا علمت ان: $f(0) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - x^2] = 0$

وليكن Γ المنحني الممثل للدالة مربع: $x \rightarrow x^2$

المماس T للمنحني (C_f) في النقطة التي

فاصلتها 3 معادلة ديكارتية له: $y = -2x + 7$

- مستعينا بالنتائج السابقة ارسم

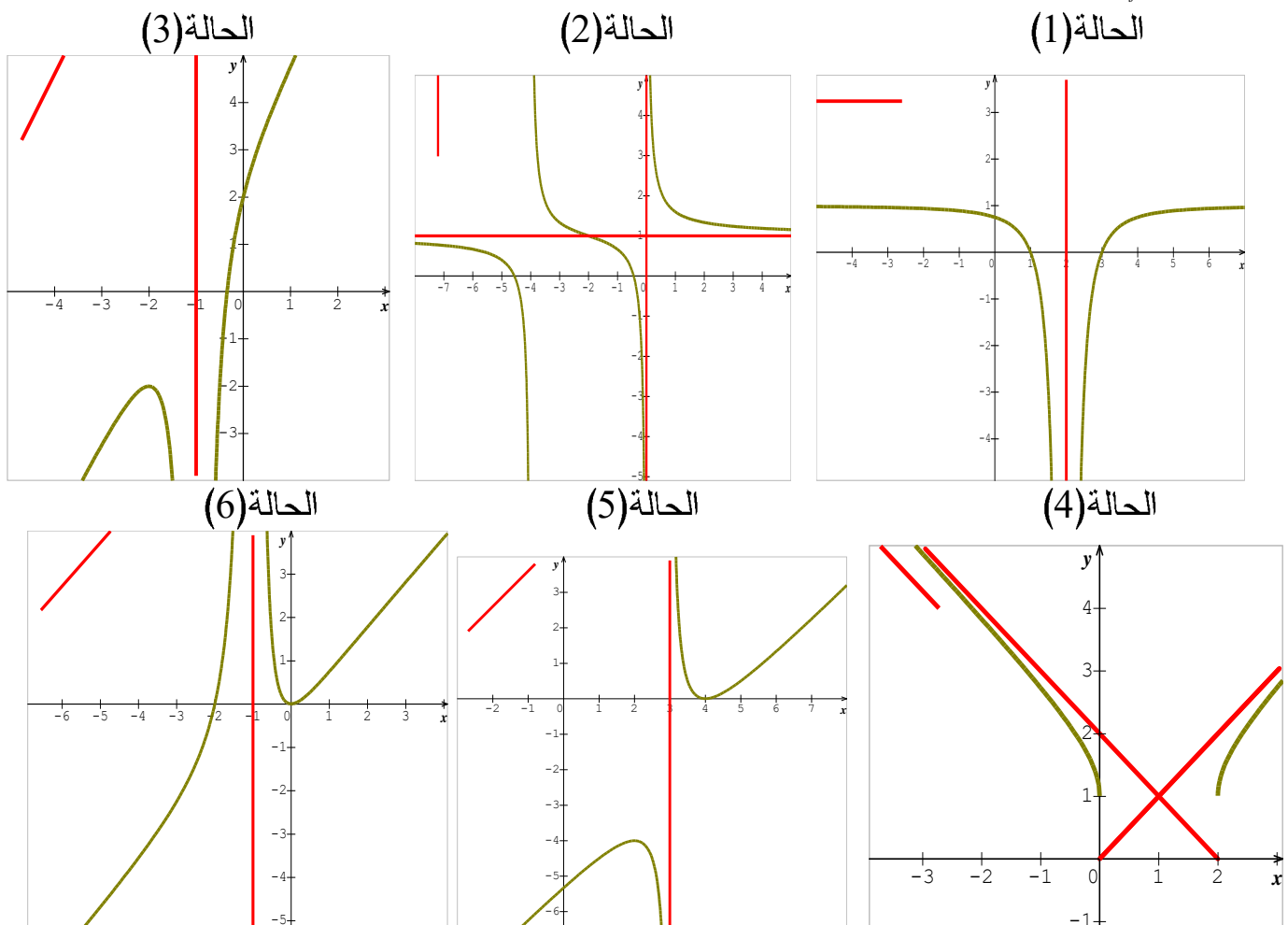
بغاية T ، Γ ثم (C_f)

x	0	3	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

التمرين 08

في كل حالة من الحالات التالية عيّن D_f مجموعة التعريف والنهيات في حدود

المجموعة D_f وشكل جدول التغيرات لكل دالة .



التمرين 09

لتكن f دالة معرفة على $D = [0; +\infty[$ حيث : $f(x) = \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

(1) أثبت انه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا :

$$x \leq \sqrt{x^2 + x + 1} \leq x + 1 \text{ و } x^2 \leq x^2 + x + 1 \leq (x + 1)^2$$

(2) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x موجب تماما لدينا : $1 - \frac{1}{x+1} \leq f(x) \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(3) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)$

التمرين 10

باستعمال مبرهنات المقارنة احسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2 - \sin x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sin x}{x^2 + 1} \quad (3) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x + E \quad (5) \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x + E \quad \text{حيث } E \text{ هي دالة الجزء الصحيح}$$

$$(6) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin 3x - \cos 2x}{x} \quad (7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1 + \sin x)}{x - \sqrt{x^2 + 1}} \quad (8) \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} - \sqrt{x}$$

التمرين 11

احسب النهايات التالية :

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} \quad (2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 4x}{x} \quad (3) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}} \quad (4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x^2} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{bx} \quad (7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

$$(8) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \quad (9) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{6 \cos x - 6\sqrt{3} \sin x}{6x - \pi} \quad (10) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{2x}$$

التمرين 12 (خاص بشعبة رياضيات وتقني)

(I) احسب النهايات التالية باستعمال طريقة مناسبة:

$$(1) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x + 1} - 2x) \quad (2) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} + x)$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 2x + 5} - \sqrt{x^2 - 7x + 3}) \quad (4) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 4x + 3} - x)$$

$$(5) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + x + 1} - 1}{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x+2}} \quad (6) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x-1} - 2}{\sqrt{x+4} - 3} \quad (7) \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x}\right)$$

II- عين العددين الحقيقيين a و b بحيث يكون : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 4x + 3} - ax - b = 0$

التمرين 13

(1) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \geq 1$ يكون لدينا: $\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x+1} \leq 1$

(2) استنتج النهايتين التاليتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x+1} \sqrt{x}$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x\sqrt{x}}{x+1}$

التمرين 14

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x) = \sqrt{4x^2 + 1} - x$

(1) أثبت أن: $\sqrt{4x^2 + 1} \geq 2x$ لكل $x \in \mathbb{R}^+$ ث استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) احسب بطريقة أخرى، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

التمرين 15

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	0

اليك جدول تغيرات الدالة f

والمطلوب رسم المنحني (C_f) الممثل للدالة f

في معلم متعامد ومتجانس

إذا علمت ان: $1,2 < \alpha < 1,3$ و

$0,2 < f(\alpha) < 0,3$

و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - x = 0$ و D المستقيم الذي معادلته: $y = x$

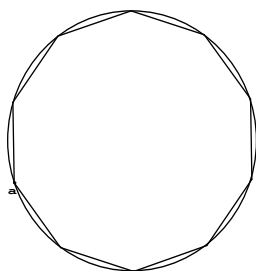
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - y_D$	+	0	-

التمرين 16 (تمرين مسابقات)

هل تساءلت يوما لماذا مساحة قرص نصف قطره r هي: πr^2 ؟

إليك برهان من بين البراهين : خذ قرص نصف قطره r مركزه O و ارسم داخله مضلع منتظم مركزه

O ذي n رأس بحيث رؤوسه تنتمي الى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها r



1- بيّن أن مساحة المضلع تساوي: $\frac{1}{2} r^2 . n \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$

2- استنتج عندئذ مساحة القرص

نحو البكالوريا: التدريب المبكر لحل نماذج امتحانات وبكالوريات

التدريب 01

$$f(x) = \frac{-x^2 + 4x}{x^2 - 4x + 3} \quad \text{الدالة العددية للمتغير الحقيقي } x \text{ المعرفة بالعلاقة}$$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- بين أن أكبر مجموعة تعريف ممكنة للدالة f هي : $D_f = \mathbb{R} - 1, 3$

2-أ) احسب النهايات عند حدود D_f وفسر النتائج بيانيا

ب) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي d

3-أ) بين أن الدالة f تقبل الاشتقاق على D_f و أن : $f'(x) = \frac{-6x+12}{x^2-4x+3}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4-أ) احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني C_f مع حامل محور الفواصل

ب) أثبت أن المستقيم (Δ) الذي معادلته : $x=2$ محور تناظر للمنحني C_f

5- اكتب معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 4$.

6- ارسم المماس T والمستقيمات المقاربة ثم المنحني C_f

7- الدالة المعرفة بـ : $g(x) = |f(x)|$

- بين أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f - ارسم (Γ) .

التدريب 02

$$f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1} \quad \text{الدالة العددية المعرفة على } \mathbb{R} - \{1\} \text{ بـ :}$$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1} f'(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية a ، b و c بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$$

ب) استنتج أن المنحني C_f يقبل مستقيم مقارب مائل Δ يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له

ج) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمستقيم المقارب المائل Δ .

3/ (أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن $f'(x) = \frac{x^2 - 2x}{x-1}$

(ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f

4/ بيّن أن النقطة $1;1$ مركز تناظر للمنحني C_f

5/ ارسم المستقيمت المقاربة ثم المنحني C_f

6/ الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ كما يلي: $h(x) = \frac{x^2 - |x| + 1}{|x| - 1}$

(أ) بيّن أن الدالة h زوجية

(ب) اشرح كيف يتم إنشاء المنحني C_h الممثل للدالة h انطلاقاً من C_f ثم ارسم C_h

7/ ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $x^2 - (1+m)(x-1) = 0$

التدريب 03

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - 2$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{x-1}{(x-2)^2}$

و ليكن C_f تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- (أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$ وفسّر النتيجة بياناً ثم احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(ب) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة: $y = -x + 1$ مقارب مائل للمنحني C_f عند $+\infty$ و $-\infty$

(ج) ادرس وضعية C_f بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

2- الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 13x + 8$

(أ) بيّن أن g متناقصة تماماً على $\mathbb{R}$

(ب) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x من $\mathbb{R}$

3- (أ) بيّن أنه مهما يكن العدد الحقيقي x من D_f فإن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-2)^3}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها

4- بيّن أن التمثيل البياني C_f يقبل مماساً T موازياً للمستقيم (Δ) ، ويطالب تعيين معادلة له.

5- أنشئ T ، (Δ) و C_f

6- الدالة العددية h معرفة على $\mathbb{R} - 2$ كما يلي: $h(x) = f(-x)$

(أ) اشرح كيف يتم إنشاء المنحني C_h الممثل للدالة h انطلاقاً من C_f

(ب) ارسم C_h

7- ناقش بياناً وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -x + m$

$u^n' = nu'u^{n-1}$

التدريب 04

f الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R} - 1$ بـ

$$f(x) = \frac{-x^2 - 2x + 7}{(x-1)^2}$$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1- احسب النهايات عند حدود مجموعة تعريفها و فسر النتائج بيانيا

2- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f'(x) = \frac{4x-12}{x-1}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3- أ) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم المقارب الأفقي (D)

ب) احسب إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الحداثيات .

4- أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن: $f''(x) = \frac{-8x+32}{(x-1)^4}$

ب) بيّن أن المنحني C_f يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها.

5- أ) اكتب معادلة المماس T للمنحني C_f في النقطة ذات الفاصلة $x_0 = 2$

ب) بيّن أن المماس T يقطع المنحني C_f في نقطة B يطلب تعيينها

6- أنشئ T و C_f

7- ناقش بيانيا وحسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $f(x) = -4x + m$.

التدريب 05

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 + 10x + 5}{(x+1)^2}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم احسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ أ) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية α ، β و γ بحيث يكون من أجل كل x من D_f :

$$f(x) = x + \alpha + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$$

ب) استنتج أن المنحني C_f الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا مائلا Δ عند $-\infty$ و عند $+\infty$ يطلب

تعيين معادلة له ثم حدّد وضعية المنحني C_f بالنسبة إلى Δ .

3/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن -1 فإن: $f'(x) = \frac{x(x^2 + 3x - 4)}{x+1}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ ارسم Δ و المنحني C_f

5/ استعمل C_f ، عيّن حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة :

$$3x^2 + (x - m)x^2 + (10 - 2m)x + 5 - m = 0$$

$$g(x) = \frac{|x|^3 + 3x^2 + 10|x| + 5}{(|x| + 1)^2} \quad \text{6/ الدالة المعرفة بـ :}$$

أ) بيّن أن الدالة g زوجية

ب) بيّن أن المنحني (Γ) الممثل للدالة g يستنتج بسهولة من رسم المنحني C_f ثم ارسم (Γ)

التدريب 06

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = x^3 + 3x - 4$

1/ احسب $g(1)$ وماذا تستنتج ؟

2/ عيّن إشارة $g(x)$

الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = \frac{x^3 - 2x^2}{x^2 + 1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد و المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّ من أجل كل عدد حقيقي x ، $f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 1)^2}$ ،

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

2) أ) بيّن ان المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب) أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة الى المستقيم (Δ) .

3) أ) عيّن نقاط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات

ب) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f)

الجزء الثالث :

h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{x^2 - 2x + 2}$

أبيّن أن : $h(x) = f(x - 1) + 2$

ب- اشرح كيفية يتم رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h انطلاقاً من المنحني (C_f)

ج- استنتج معادلة للمستقيم Δ' المقارب المائل للمنحني (C_h)

د- ارسم المستقيم Δ' والمنحني C_h

التدريب 07

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$

نسمي C_f المنحني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1/ أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا

ب) احسب النهايتين: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

2/ أ) نسمي Γ المنحني الممثل لدالة المربع، احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} [f(x) - x^2]$ وفسّر النتيجة بيانيا

ب) ادرس وضعية المنحني C_f بالنسبة للمنحني Γ

2/ أ) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 0 فإن: $f'(x) = \frac{2(x-1)x^2 + x + 1}{x^2}$

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3/ احسب $f(-1)$ و $f(-2)$ ثم ارسم Γ و (C_f) في نفس المعلم

4/ أ) اشرح كيف يتم رسم المنحنيين الممثلين للدالتين g و h انطلاقا من المنحني C_f حيث:

$$h(x) = x|x| + \frac{2}{x}, \quad g(x) = x^2 + \frac{2}{|x|}$$

ب) ارسم المنحنيين C_h و C_g

التدريب 08

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x^2 + ax + b}{x^2 + 2x + 2}$

a و b عدنان حقيقيان. (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$

1) عين العددين a و b بحيث المنحني (C_f) يقبل عند النقطة $A\left(0; \frac{7}{2}\right)$ مماسا يوازي محور

الفواصل. ثم بين أن: $f(x) = 1 + \frac{5x+5}{x^2+2x+2}$ الشكل:

2) أ) بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب (Δ) يطلب إعطاء معادلته

ب) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ)

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

4) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) نسمي ω نقطة تقاطع المنحني (C_f) و (Δ) ، برهن أن النقطة ω مركز تناظر للمنحني (C_f)

6) أ) عين معادلة للمماس (T) عند النقطة ω .

ب) بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $y_T - f(x) = \frac{5(x+1)^3}{x^2 + 2x + 2}$

ج) عين عندئذ وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) وماذا تستنتج؟

7) ارسم (T) و (Δ) ثم (C_f)

التدريب 09

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعلاقة : $f(x) = \frac{3x^2 + ax + b}{x^2 + 1}$

- (1) عين العددين a و b عدنان حقيقيان . (C_f) المنحني الممثل للدالة f في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$
- (2) (أ) احسب النهايتين : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ وفسر النتيجة بانيان
(ب) بين أن : $f(x) = 3 + \frac{4x}{x^2 + 1}$ الشكل
- (3) احسب $f(-x) + f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا
- (4) ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 3$
- (5) (أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 فإن : $f''(x) = \frac{8x(x^2 - 3)}{x^2 + 1}$
(ب) بين أن المنحني C_f يقبل ثلاث نقط انعطاف يطلب تعيينها
- (6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f)
- (7) h الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x) = \frac{4|x|}{x^2 + 1} - 3$
(أ) ادرس شفعية الدالة h
(ب) اشرح كيفية يتم رسم المنحني (C_h) الممثل للدالة h انطلاقا من المنحني (C_f)

بكالوريا شعبة تقني رياضي دورة 2010

التدريب 10

- 1- f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x) = x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$
وليكن (C_f) منحنيها البياني في المستوي المنسوب لمعلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
- 2- أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x) = 1 + \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$
- 3- ادرس تغيرات الدالة f
- 4- (أ) اكتب معادلة للمماس (T) للمنحني (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 0.
- 5- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) واستنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيينها .
- 6- بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب للمنحني (C_f) في جوار $+\infty$ ، ثم استنتج معادلة (D') المستقيم المقارب الآخر .
- 7- ارسم (D) و (D') و (C_f) في المعلم السابق.

$$\sqrt{u}' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

8- الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x) = |x| \left(1 + \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right)$
أبين أن الدالة g زوجية .

ب- انطلاقاً من (C_f) ارسم (C_g) منحنى الدالة g في نفس المعلم السابق .

الهدية

- تأمل في هذه المعادلة :

رغبة + إرادة + ممارسة + جهد منظم = متعة ونجاح بحول الله.

- أود أن أورد أمامك نص رسالة بعث بها بديع الزمان الهمذاني، الذي كان من أئمة عصره في الكتابة، إلى ابن أخت له كان ينفق عليه من ماله ليتعلم. كتب إليه:
" أنت ولدي ما دمت والدفتـر أليفك والمحبرة حليفك، فإذا قصرت، ولا أخالك، فغيري خالك، والسلام."

- إذا كنت في قوم فصاحب خيارهم *** ولا تصحب الأردى فتردى مع الردي
عن المرء لا تسل وسل عن قرينه *** فكل قرين بالمقارن يقتدي

قال علماؤنا :آآ العلم أربع :شيخ فتاح وعقل رجاح وكتب صحاح ومداومة وإلحاح

اقرأ وتأمل

يحكى ان الملك بطليموس الأول سأل أقليدس ما إذا كانت هنالك أية كيفية لدراسة الهندسة (الرياضيات) أقصر من تلك الواردة في كتاب الأصول ... فكان الجواب أنه لا توجد طريقة ملكية نحو الهندسة (الرياضيات) . إن الموقف لم يتغير طبعاً : إذا أردت أن تكتسب مهارة تجعلك تتصرف بكياسة امام المسائل الهندسية فلا مفر من أن تتفق وقتاً غير يسير في دراسة مبادئ الهندسة (الرياضيات) وأن تعرف كيف توصل الفحول في هذا الميدان إلى حل بعض المسائل النمذجية . تحاول في الوقت نفسه تقليد هؤلاء الفحول لحل مسائل قريبة من المسائل التي تطرقو إليها . وبقدر ما تكون محاولتك كثيرة - كلاعب وليس كمتفرج - بقدر ماتكتسب ملكة تولد لديك حدساً يكون لك بمثابة دليل يقودك نحو حل المسائل الهندسية (رياضية) . ان معالم الطريق الذي يقود الى الحل غامضة ، غير الواضحة ، في الوهلة الأولى ، وقد يحتاج اكتشافها الى بذل مجهود كبير : تذكر ان الأفكار الجيدة تأتي متاخرة ، بل هي آخر ما يأتي!

**I believe that good thing come to those who work
A comfort zone is a beautiful place, but nothing ever grows there.**