

## النهايات ن قبل تجاوزا الكتابات التالية :-

$+\infty + \infty = +\infty$  ،  $-\infty - \infty = -\infty$  ،  $\infty + l = \infty$  ،  $+\infty - \infty$  حالة عدم تعيين  
 $(\infty)(\infty) = \infty$  (الاشارة جداء الاشارتين) ،  $(\infty) \times l = \infty$  (الاشارة جداء الاشارتين) ،  $l \neq 0$  ،  $0 \times (\infty)$  ح ع ت  
 $\frac{l}{\infty} = 0$  (يمكن أن يكون  $l = 0$ ) ،  $\frac{l}{0} = \infty$  حيث  $l \neq 0$  ،  $\frac{\infty}{l} = \infty$  في حالة النتيجة  $\infty$  الاشارة من

اشارة البسط والمقام  $\frac{\infty}{\infty}$  و  $\frac{0}{0}$  حالتى عدم تعيين

حذاري :  $\frac{0}{\infty} = 0$  ،  $\frac{\infty}{0} = \infty$  ،  $(+\infty)(-\infty) = -\infty$  وليست حالات عدم تعيين

حالات عدم التعيين وطرق ازلتها

| النتائج الممكنة | عدد غير معدوم                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | $\infty$               | 0                                   |
|-----------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|-------------------------------------|
| متى هذه النتائج | المقام مقتدر على البسط                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          | البسط مقتدر على المقام | تكاثر بين البسط والمقام في الاقتدار |
| طريقة الازالة   | إخراج العامل مشترك ، الاحسن ان يكون الاسرع الى $\infty$ أو بناء نهاية شهير                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |                        |                                     |
| أمثلة           | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(1+\frac{1}{\sqrt{x}})}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1+\frac{1}{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = 0$ <p>مع العلم أن <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0</math> نهاية شهيرة</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x+1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x})}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{e^x}{x}+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x}} = +\infty$ <p>مع العلم أن <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty</math> نهاية شهيرة</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ x  \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+\frac{2}{x}}{(1+\frac{1}{x})} = 1$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2} \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} =$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x  \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+2}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}+\frac{2}{x}}{(1+\frac{1}{x})} = -1$ |                        |                                     |

$$-\infty + \infty$$

| النتائج الممكنة      | عدد                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | $+\infty$                                                             | $-\infty$                                                             |
|----------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------|
| متى تكون تلك النتائج | تكافؤ بين الجزء الذي يؤول الى ناقص لانهاية والجزء الذي يؤول الى زائد لانهاية                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | الجزء الذي يؤول الى $+\infty$ مقتدر على الجزء الذي يؤول الى $-\infty$ | الجزء الذي يؤول الى $-\infty$ مقتدر على الجزء الذي يؤول الى $+\infty$ |
| طريقة الازالة        | إخراج العامل مشترك في حالة استقراء النتيجة $-\infty$ او $+\infty$ ، وفي حالة التكافؤ الضرب في المرافق في حالة الدوال الصماء                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |                                                                       |                                                                       |
| أمثلة                | $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - \sqrt{x^2 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x + 1 - \sqrt{x^2 \left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right] =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x + 1 - x \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ 2x + 1 - \sqrt{x^2} \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right]$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 2 + \frac{1}{x} - \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{x^2} \right)} \right] = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 1 - \sqrt{4x^2 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 1 - \sqrt{4x^2 \left( 1 + \frac{1}{4x^2} \right)} \right] =$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 1 - 2x \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{4x^2} \right)} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x + 1 - \sqrt{4x^2} \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{4x^2} \right)} \right]$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 1 + \frac{1}{x} - 2 \sqrt{\left( 1 + \frac{1}{4x^2} \right)} \right] = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - e^x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left[ 2 \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} - 1 \right] = -\infty$ <p>لان <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0</math> ، نهاية شهيرة</p> $\lim_{x \rightarrow +\infty} [x - \sqrt{x^2 + 1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(x - \sqrt{x^2 + 1})(x + \sqrt{x^2 + 1})}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] =$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2 - (x^2 + 1)}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \right] = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [2x + 1 - \ln x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ 2 + \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty$ <p>لان <math>\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0</math> ، نهاية شهيرة</p> |                                                                       |                                                                       |

$$0 \times \infty$$

| النتائج الممكنة      | عدد غير معدوم                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | $\infty$                                                                                                   | 0                                                                          |
|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------|
| متى تكون تلك النتائج | تكافؤ بين سرعة الجزء الذي يؤول الى $\infty$ و الجزء الذي يؤول الى 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | سرعة الجزء الذي يؤول الى $\infty$ أكبر بكثير من سرعة الجزء الذي يؤول الى 0                                 | سرعة الجزء الذي يؤول الى 0 أكبر بكثير من سرعة الجزء الذي يؤول الى $\infty$ |
| طريقة الازالة        | $\frac{\infty}{\infty}$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                               | بناء نهاية شهيرة في العموم ، او تغيير شكل العبارة حتى تصبح حالة عدم تعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$ |                                                                            |
| أمثلة                | $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(2x+1)}{(x^2+1)} \sqrt{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{(2x+1)\sqrt{x}}{x^2+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x\sqrt{x}(2+\frac{1}{x})}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}})} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2+\frac{1}{x}}{\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}} \right] = 0$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x^2 + 1)e^x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2+1}{x^2} x^2 e^x \right] = 0$ <p>لأن : <math>\lim_{x \rightarrow \infty} [x^2 e^x] = 0</math> نهاية شهيرة و <math>\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2+1}{x^2} \right] = 1</math></p> $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{x+1}{x} - 1 \right) x \frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\frac{x+1}{x} - 1} \right] \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \left( \frac{x+1}{x} \right) \right]$ $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \left( \frac{1}{x} \right) x \frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\frac{x+1}{x} - 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln(\frac{x+1}{x})}{\frac{x+1}{x} - 1} \right] = 1$ <p>لأن <math>\lim_{t \rightarrow 1} \left[ \frac{\ln t}{t-1} \right] = 1</math> نهاية شهيرة</p> |                                                                                                            |                                                                            |

$$\frac{0}{0}$$

| النتائج الممكنة      | عدد غير معدوم                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | 0                                                | $\infty$                                         |
|----------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------|--------------------------------------------------|
| متى تكون تلك النتائج | تكافؤ بين سرعة البسط الى 0 و سرعة المقام الى 0                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | سرعة البسط الى 0 أكبر بكثير من سرعة المقام الى 0 | سرعة المقام الى 0 أكبر بكثير من سرعة البسط الى 0 |
| طريقة الازالة        | بناء نهاية شهيرة ، التحليل ، العدد المشتق                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     |                                                  |                                                  |
| أمثلة                | $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x^2-4x+3}{(x-1)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{(x-1)(x-3)}{(x-1)^2} \right] =$ $\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{x-3}{x-1} \right] = \infty \text{ أو } +\infty \text{ ، حسب اقتراب } x \text{ من الواحد بقيم أصغر أو أكبر}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x-1}{x} \right] = 1 : \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x-3x-1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{e^x-1}{x} - \frac{3x}{x} \right] = -2$ <p>حساب <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1+3x}{x}</math> بوضع <math>g(x) = \sqrt{x+1} + 3x</math> لدينا <math>g(0) = \sqrt{1} + 3 \times 0 = 1</math></p> <p>ولدينا <math>g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} + 3</math> ومنه تصبح النهاية من الشكل <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)-g(0)}{x-0}</math> وبما أن الدالة <math>g</math> قابلة للإشتقاق عند 0 فإن النهاية هي <math>g'(0)</math> أي <math>\frac{1}{2} + 3 = \frac{7}{2}</math> منه <math>\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1+3x}{x} = \frac{7}{2}</math></p> $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-4x+3} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{(x-1)(x-3)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x^2-1} \times \frac{x+1}{x-3} = -\frac{1}{3}$ <p>لأن <math>\lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin t}{t} \right] = 1</math> نهاية شهيرة وهذا بوضع <math>t = x^2 - 1</math> لما <math>x \rightarrow 1</math> فإن <math>t \rightarrow 0</math></p> |                                                  |                                                  |

# نهایات شهيرة

| الدالة اللوغارتمية                                                   | الدوال الاسية                                                             | الدوال المثلثية                                                     |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------|
| $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \ln(\Delta) = +\infty$            | $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} e^{\Delta} = +\infty$                  | $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta)}{\Delta} = 1$       |
| $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \ln(\Delta) = -\infty$                | $\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} e^{\Delta} = 0$                        | $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\Delta)}{\Delta} = 0$ |
| $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\Delta)}{\Delta^n} = 0$ | $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{e^{\Delta}}{\Delta^n} = +\infty$ | $\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \frac{\sin(\Delta)}{\Delta} = 0$ |
| $\lim_{\Delta \rightarrow 0^+} \Delta^n \ln(\Delta) = 0$             | $\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \Delta^n e^{\Delta} = 0$               | $\lim_{\Delta \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\Delta)}{\Delta} = 0$ |
| $\lim_{\Delta \rightarrow 1} \frac{\ln(\Delta)}{\Delta - 1} = 1$     | $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{e^{\Delta} - 1}{\Delta} = 1$           | $\lim_{\Delta \rightarrow -\infty} \frac{\cos(\Delta)}{\Delta} = 0$ |
| $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\ln(\Delta + 1)}{\Delta} = 1$     |                                                                           | $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta) - 1}{\Delta} = 1$   |
|                                                                      | $n \in \mathbb{N}$                                                        |                                                                     |

## ملاحظة:

القول أن جزء من عبارة مقتدر على الجزء الآخر من العبارة يقصد به سرعة الأول إلى  $\infty$  أكبر من سرعة الثاني إلى  $\infty$

فسرعة الدالة الاسية إلى  $+\infty$  أكبر بكثير من سرعة كثير حدود أو دالة ناطقة أو دالة صماء إلى  $+\infty$  وسرعة كثير حدود أو دالة ناطقة أو صماء إلى  $+\infty$  أكبر بكثير من سرعة الدالة اللوغارتمية إليها لذا لدينا في جوار  $+\infty$  :  $e^{f(x)} \gg g(x) \gg \ln[h(x)]$  ،  $f$  و  $g$  و  $h$  دوال ناطقة أو كثيرات حدود الترميز  $\gg$  أكبر بكثير



## بطاقة تقنية في حساب النهايات للدوال الأسية واللوغاريتمية

## الدوال الأسية

من كل  $f(x)$  و  $g(x)$  و  $h(x)$  كثيرات حدود أو دستور لدالة ناطقة لدينا:

-1

شكل العبارة  $e^{f(x)}$ ،  $f(x)$  يؤول الى  $-\infty$  النتيجة : 0

مثال:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x^2+3x-1} = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{x^2-4}{x-1}} = 0$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ x-1 \rightarrow 0 \\ x^2-4 \rightarrow -3 \end{cases}$

-2

شكل العبارة  $e^{f(x)}$ ،  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة :  $+\infty$

أمثلة:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{x^2+3x-1} = +\infty$  لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x^2}{x-1}} = +\infty$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ x-1 \rightarrow 0 \\ x^2 \rightarrow 1 \end{cases}$

-3

شكل العبارة  $e^{f(x)} + g(x)$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة :  $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  من نفس الدرجة أو درجة  $f(x)$  أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$$\lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \frac{e^{f(x)}}{f(x)} \text{ وذلك لبناء نهاية شهيرة } g(x) + e^{f(x)} = f(x) \left[ \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{e^{f(x)}}{f(x)} \right]$$

ملاحظة : إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  دستور لدالة ناطقة نعتبر تجاوزا أن ناتج الدرجة الثانية على الاولى يعطي الدرجة الاولى و الدرجة الثالثة على الاولى تعطي الثانية وهكذا

طريقة الازالة إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر من درجة  $f(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + e^{f(x)} = (f(x))^n \left[ \frac{g(x)}{(f(x))^n} + \frac{e^{f(x)}}{(f(x))^n} \right]$$

ملاحظة: ليس ضروري إخراج عامل مشترك  $(f(x))^n$ ، المطلوب جعل الكسر  $\frac{g(x)}{(f(x))^n}$  يؤول الى عدد

شكل العبارة  $e^{f(x)} - g(x)$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة :  $-\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا

أمثلة :

1-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+3) + e^{x^2+3x-1}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2+3x-1) \left[ \frac{(x+3)}{x^2+3x-1} + \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \right] = +\infty$

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ x^2 + 3x - 1 \rightarrow +\infty \\ \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \rightarrow +\infty \text{ ن ش } \\ \frac{(x+3)}{x^2+3x-1} \rightarrow 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 + 3x - 1 + e^{3x-1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x - 1)^2 \left[ \frac{-x^2+3x-1}{(3x-1)^2} + \frac{e^{3x-1}}{(3x-1)^2} \right] \quad -2$$

$$\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ (3x-1)^2 \rightarrow +\infty \\ \frac{e^{3x-1}}{(3x-1)^2} \rightarrow +\infty \text{ ن ش } \\ \frac{(-x^2+3x-1)}{(3x-1)^2} \rightarrow \frac{-1}{9} \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left[ \frac{5x+2}{(x-1)^2} - \frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^2 \left[ \frac{\frac{5x+2}{(x-1)^2}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} - \frac{\frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} \right] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^2 \left[ \frac{5x+2}{(x-1)^2} \left( \frac{x-1}{x+3} \right)^2 - \frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^2 \left[ \frac{5x+2}{(x+3)^2} - \frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} \right] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x+2}{(x+3)^2} = \frac{7}{16} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{\frac{x+3}{x-1}}}{\left(\frac{x+3}{x-1}\right)^2} = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x+3}{x-1} \right)^2 = +\infty \text{ أي } \begin{cases} x \rightarrow 1 \\ x-1 \rightarrow 0 \\ \frac{x+3}{x-1} \rightarrow +\infty \end{cases} \text{ لأن } x-1 \rightarrow 0$$

-4

شكل العبارة  $g(x) + h(x)e^{f(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة :  $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت  $g(x)$  و  $f(x)$  من نفس الدرجة أو درجة  $f(x)$  أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)e^{f(x)} = f(x) \left[ \frac{g(x)}{f(x)} + h(x) \frac{e^{f(x)}}{f(x)} \right]$$

**ملاحظة :** ليس من الضروري اخراج  $f(x)$  عامل مشترك ولكن لابد من قسمة  $g(x)$  على عبارة تنتج من اخراجها كامل مشترك وتحقق ان الكسر  $g(x)$  على تلك العبارة يؤول الى عدد قد تكور العبارة هي  $h(x)$  أو  $x$  إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر من درجة  $f(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)e^{f(x)} = (f(x))^n \left[ \frac{g(x)}{(f(x))^n} + h(x) \frac{e^{f(x)}}{(f(x))^n} \right]$$

**ملاحظة :** ليس ضروري اخراج عامل مشترك  $(f(x))^n$ ، المطلوب جعل الكسر  $\frac{g(x)}{(f(x))^n}$  يؤول الى عدد

شكل العبارة  $g(x) + h(x)e^{f(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $-\infty$  النتيجة :  $-\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [x + 3 + (-2x + 5)e^{x^2+3x-1}] =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^2 + 3x - 1) \left[ \frac{x+3}{x^2+3x-1} + (-2x+5) \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \right] = +\infty$$

أمثلة : 1-

لان  $x^2 + 3x - 1 \rightarrow +\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x^2+3x-1} = 0$  و  $\frac{-2x+5}{x^2+3x-1} \rightarrow +\infty$  ش ن  $\frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x + 3 + (-2x + 5)e^{x+2}] = -2$$

$$\begin{aligned} x &\rightarrow +\infty \\ e^{x+2} &\rightarrow +\infty \\ \frac{x+3}{x} &\rightarrow 1 \\ \frac{-2x+5}{x} &\rightarrow -2 \end{aligned}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{x+3}{x} + \frac{-2x+5}{x} e^{x+2} \right] = -\infty$$

-5

شكل العبارة  $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  أو  $+\infty$  أو عدد و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة :  $+\infty$

طريقة الازالة إذا كانت  $g(x)$  و  $f(x)$  و  $h(x)$  من نفس الدرجة أو درجة  $f(x)$  أكبر

$$\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)} = \frac{\frac{g(x)}{f(x)} + \frac{e^{f(x)}}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}} : \text{نكتب العبارة على الشكل :}$$

إذا كانت درجة  $g(x)$  أو  $h(x)$  أكبر من درجة  $f(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$$\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)} = \frac{\frac{g(x)}{[f(x)]^n} + \frac{e^{f(x)}}{[f(x)]^n}}{\frac{h(x)}{[f(x)]^n}}$$

ملاحظة: ليس ضروري القسمة على  $(f(x))^n$ ، المطلوب جعل الكسران  $\frac{g(x)}{(f(x))^n}$  و  $\frac{h(x)}{(f(x))^n}$  يؤولان الى عدد

شكل العبارة  $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  أو  $+\infty$  أو عدد و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $-\infty$  النتيجة :  $-\infty$

أمثلة : -1  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+e^{x^2+3x-1}}{x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{x}{x^2+3x-1} + \frac{e^{x^2+3x-1}}{x+3}}{\frac{x+3}{x^2+3x-1}} \right] = +\infty$

لان  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ \frac{x}{x+3} \rightarrow 0 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+3x-1} = 0 \end{cases}$  و  $\begin{cases} x^2+3x-1 \rightarrow +\infty \\ \frac{e^{x^2+3x-1}}{x^2+3x-1} \rightarrow +\infty \end{cases}$  ن ش

-2  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{x+2}}{x^2+3x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{e^{x+2}}{(x+2)^2}}{\frac{x^2+3x-1}{(x+2)^2}} \right] = +\infty$

-3  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-x+e^{x+2}}{-3x+5} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{-x}{x+2} + \frac{e^{x+2}}{x+2}}{\frac{-3x+5}{x+2}} \right] = -\infty$  لان  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ \frac{-x}{x+2} \rightarrow -1 \\ \frac{-3x+5}{x+2} \rightarrow -3 \end{cases}$  و  $\frac{e^{x+2}}{x+2} \rightarrow +\infty$  ن ش

-6

شكل العبارة  $\frac{ef(x)-1}{g(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى 0 و  $f(x)$  يؤول الى 0 النتيجة حسب نهاية  $\frac{f(x)}{g(x)}$

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل :  $\frac{ef(x)-1}{g(x)} = \frac{ef(x)-1}{f(x)} \times \frac{f(x)}{g(x)}$  ولدينا  $\begin{cases} f(x) \rightarrow 0 \\ \frac{ef(x)-1}{f(x)} \rightarrow 1 \end{cases}$  ن ش  
ولحساب نهاية  $\frac{f(x)}{g(x)}$  من أجل  $g(x)$  يؤول الى 0 و  $f(x)$  يؤول الى 0 نستعمل التحليل غالباً وليس دوماً

مثال :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2+1}} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}} \times \frac{\frac{x}{x^2-1}}{\frac{x}{x^2+1}} \right]$

لان  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}} \times \frac{x^3+x}{x^3-x} \right] = 1$  و  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ \frac{x^3+x}{x^3-x} \rightarrow 1 \\ \frac{-1+e^{\frac{x}{x^2-1}}}{\frac{x}{x^2-1}} \rightarrow 1 \end{cases}$  ن ش

-7

شكل العبارة  $\frac{f(e^x)}{g(e^x)}$ ،  $g(e^x)$  يؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$  و  $f(e^x)$  يؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$

طريقة الازالة يمكن وضع  $e^x = t$  وتصبح بعدها نهاية دالة ناطقة

شكل العبارة  $\frac{f(e^x)+h(x)}{g(e^x)}$ ،  $g(e^x)$  يؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$  و  $f(e^x)$  يؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$  و  $h(x)$  تؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$

طريقة الازالة أخرج اسية عبارة أكبر ما يمكن في البسط واسية عبارة أكبر ما يمكن في المقام

أمثلة :

**-1**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1} \right] = 1$  لأنه: بوضع  $z = e^x$  لما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $z \rightarrow +\infty$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^{2x} + e^x + 1}{e^{2x} + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{z^2 + z + 1}{z^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{z^2}{z^2} \right] = 1$

**-2**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^{-3x} + e^{-x} + 1}{e^{-2x} + 1} \right] = +\infty$  بوضع  $z = e^{-x}$  لما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $z \rightarrow +\infty$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{e^{-3x} + e^{-x} + 1}{e^{-2x} + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{z^3 + z + 1}{z^2 + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{z^3}{z^2} \right] = +\infty$

**-3**  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + 1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^x \left( 1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x} \right)}{e^{2x} \left( 1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{1 - \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{e^x \left( 1 + \frac{1}{e^{2x}} \right)} \right] = 0$  لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{e^x - x + 1}{e^{2x} + 1} \right]$  ن ش  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{e^{2x}} \rightarrow 0 \\ \frac{1}{e^x} \rightarrow 0 \\ \frac{x}{e^x} \rightarrow 0 \end{cases}$

-8

شكل العبارة  $g(x)e^{f(x)}$ ،  $f(x)$  يؤول الى  $-\infty$  و  $g(x)$  تؤول الى  $+\infty$  او  $-\infty$  النتيجة : 0

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل  $\frac{g(x)}{f(x)} f(x) e^{f(x)}$  وذلك لبناء ن شهيرة  $\lim_{f(x) \rightarrow -\infty} f(x) e^{f(x)}$  إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر من درجة  $f(x)$  نكتب العبارة على الشكل :  $\frac{g(x)}{(f(x))^n} (f(x))^n e^{f(x)}$

ملاحظة: ليس الضروري الضرب والقسمة على  $(f(x))^n$ ، المطلوب جعل الكسر  $\frac{g(x)}{(f(x))^n}$  يؤول الى عدد

أمثلة :

-1

$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(x+3)e^{-x^2+3x-1}] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x+3}{-x^2+3x-1} (-x^2+3x-1)e^{-x^2+3x-1} \right]$  ولدينا  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2+3x-1)e^{-x^2+3x-1}] = 0$  بوضع  $z = -x^2+3x-1$  لما  $x \rightarrow +\infty$  فإن  $z \rightarrow -\infty$  أي  $\lim_{z \rightarrow -\infty} ze^z = 0$  (ن شهيرة)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2+3x-1)e^{-x^2+3x-1}] = 0$  ومنه  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+3}{-x^2+3x-1} = 0$  و

**-2**  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(-x^2+3x-1)e^{x+2}] = 0$  لأن :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [(-x^2+3x-1)e^{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-x^2+3x-1}{(x+2)^2} \times (x+2)^2 e^{x+2} \right]$

ولدينا  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(x+2)^2 e^{x+2}] = 0$  بوضع  $z = x+2$  لما  $x \rightarrow -\infty$  فإن  $z \rightarrow -\infty$

أي  $\lim_{z \rightarrow -\infty} z^2 e^z = 0$  (نهاية شهيرة)

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-x^2+3x-1}{(x+2)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-x^2}{x^2} \right] = -1$

## الدوال اللوغارتمية:

من أجل كل  $f(x)$  و  $g(x)$  و  $h(x)$  كثيرات حدود أو دستور لدالة ناطقة لدينا:

(1)

شكل العبارة  $\ln[f(x)]$ ،  $f(x)$  يتوّل إلى 0 بقيم أكبر من  $x$  يتوّل إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$  أو  $x_0$  النتيجة :  $-\infty$

أمثلة :  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln[x^2 - 1] = -\infty$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow 1 \\ x^2 - 1 \rightarrow 0 \end{cases}$

وكذلك :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left[\frac{-3x+2}{x^2+1}\right] = -\infty$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ \frac{-3x+2}{x^2+1} \rightarrow 0 \end{cases}$

(2)

شكل العبارة  $\ln[f(x)]$ ،  $f(x)$  يتوّل إلى  $+\infty$  لما  $x$  يتوّل إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$  أو  $x_0$  النتيجة :  $+\infty$

أمثلة :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln[x^2 - 1] = +\infty$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ x^2 - 1 \rightarrow +\infty \end{cases}$

وكذلك :  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln[-2x^3 - 1] = +\infty$  لأن  $\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ -2x^3 - 1 \rightarrow +\infty \end{cases}$

وكذلك :  $\lim_{x \rightarrow 1} \ln\left[\frac{x+2}{x^2-1}\right] = +\infty$  لأن لما  $x \rightarrow 1$  فإن  $\begin{cases} x^2 - 1 \rightarrow 0 \\ \frac{x+2}{x^2-1} \rightarrow +\infty \end{cases}$

(3)

شكل العبارة  $g(x) + \ln(f(x))$ ،  $g(x)$  يتوّل إلى  $-\infty$  و  $f(x)$  يتوّل إلى  $+\infty$  النتيجة :  $-\infty$

طريقة الازالة إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  من نفس الدرجة أو درجة  $g(x)$  أكبر نكتب العبارة على الشكل :

$$\lim_{f(x) \rightarrow +\infty} \frac{\ln(f(x))}{f(x)} \text{ شهيرة لبناء نهاية شهيبة } g(x) + \ln(f(x)) = f(x) \left[ \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{\ln(f(x))}{f(x)} \right]$$

طريقة الازالة إذا كانت درجة  $f(x)$  أكبر من درجة  $g(x)$  نستعمل الخواص لانزال درجة  $f(x)$

ملاحظة : إذا كانت  $f(x)$  و  $g(x)$  دستور لدالة ناطقة نعتبر تجاوزا أن ناتج الدرجة الثانية على الاولى

يعطي الدرجة الأولى وهكذا

خواص : من أجل  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين موجبان تماما ومن أجل  $n$  عدد ناطق لدينا

$$\ln(a^n) = n \ln a \quad \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b, \quad \ln(a \times b) = \ln a + \ln b$$

$$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a \quad \ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$$

شكل العبارة  $g(x) - \ln(f(x))$ ،  $g(x)$  تتوّل إلى  $+\infty$  و  $f(x)$  يتوّل إلى  $+\infty$  النتيجة :  $+\infty$

طريقة الازالة نفس ما قلنا سابقا



أمثلة :

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-2x + 3) + \ln[x + 4]] = -\infty \quad \text{1-}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + \ln[x + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4) \left[ \frac{-2x+3}{x+4} + \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right]$$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right] = 0$  (نهاية شهيرة)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x+3}{x+4} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x}{x} \right] = -2$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-x^2 + 3x - 1) + \ln[x^2 + 4]] = -\infty \quad \text{2-}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-x^2 + 3x - 1 + \ln(x^2 + 4)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 4) \left[ \frac{-x^2+3x-1}{x^2+4} + \frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4} \right]$$

و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4} \right] = 0$  (نهاية شهيرة) و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-x^2+3x-1}{x^2+4} \right] = -1$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} [(-2x + 3) + \ln[x^2 + 4]] = -\infty \quad \text{3-}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [(-2x + 3) + \ln[x^2 + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (-2x + 3) + \ln \left[ x^2 \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right) \right] \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ (-2x + 3) + \ln(x^2) + \ln \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + 2\ln|x| + \ln \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)]$$

بإخراج  $x$  عامل مشترك نجد

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left[ \frac{-2x+3}{x} + 2 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)}{x} \right]$$

ولدينا:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln x}{x} \right] = 0$  (نهاية شهيرة) و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln \left( 1 + \frac{4}{x^2} \right)}{x} \right] = 0$

(4)

شكل العبارة  $\frac{\ln[f(x)]}{g(x)}$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  أو  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة : 0

طريقة الازالة

$$\frac{\ln[f(x)]}{g(x)} = \frac{\frac{\ln f(x)}{f(x)}}{\frac{g(x)}{f(x)}} \quad \text{إذا كانت } g(x) \text{ و } f(x) \text{ من نفس الدرجة أو درجة } g(x) \text{ أكبر نكتب العبارة على الشكل:}$$

إذا كانت درجة  $f(x)$  أكبر من درجة  $g(x)$  نستعمل خواص  $\ln$  لانزال درجة  $f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x+4]}{-2x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{\ln[x+4]}{x+4}}{\frac{-2x+3}{x+4}} \right] = 0 \quad \text{أمثلة : 1-}$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right] = 0 \quad \text{(نهاية شهيرة) و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x+3}{x+4} \right] = -2$$



$$-2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x^2+4]}{-x^2+3x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4}}{\frac{-x^2+3x-1}{x^2+4}} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-x^2+3x-1}{x^2+4} \right] = -1 \text{ (نهاية شهيرة) و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x^2+4]}{x^2+4} \right] = 0$$

$$-3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln[x^2+4]}{3x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln[x^2(1+\frac{4}{x^2})]}{3x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2\ln|x| + \ln(1+\frac{4}{x^2})}{3x-1} \right]$$

$$\text{لان } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2\ln|x|}{3x-1} + \frac{\ln(1+\frac{4}{x^2})}{3x-1} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2\frac{\ln(-x)}{-x}}{\frac{3x-1}{-x}} + \frac{\ln(1+\frac{4}{x^2})}{3x-1} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3x-1}{-x} \right] = -3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln(1+\frac{4}{x^2})}{3x-1} \right] = 0 \text{ (نهاية شهيرة) و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln(-x)}{-x} \right] = 0$$

شكل العبارة  $g(x) + h(x)\ln[f(x)]$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $-\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة متعلقة بدرجة  $h(x)$  و  $g(x)$  إذا كانت درجة  $g(x)$  اكبر من  $h(x)$  فإن النتيجة  $-\infty$  وإذا كانت درجة  $h(x)$  اكبر من أو تساوي درجة  $g(x)$  فإن  $+\infty$

حالة 1 طريقة الازالة إذا كانت درجة  $h(x)$  تساوي أو أكبر من درجة  $g(x)$  تكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)\ln[f(x)] = h(x) \left[ \frac{g(x)}{h(x)} + \ln[f(x)] \right]$$

$$\text{أو كتابة العبارة } g(x) + h(x)\ln[f(x)] = g(x) \left[ 1 + \frac{h(x)}{g(x)} \ln[f(x)] \right]$$

مثال :

$$-1 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x + 5)\ln[x + 4]] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x + 5)\ln[x + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 5) \left[ \frac{-2x+3}{3x+5} + \ln[x + 4] \right]$$

$$\text{ولدينا } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x+3}{3x+5} = \frac{-2}{3} \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 4) = +\infty$$

$$-2 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x^2 + 5)\ln[x + 4]] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x^2 + 5)\ln[x + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x^2 + 5) \left[ \frac{-2x+3}{3x^2+5} + \ln[x + 4] \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5}{-2x+3} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln[x + 4]] = +\infty$$

$$-3 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x^2 + 5)\ln[x + 4]] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x + 3 + (3x^2 + 5)\ln[x + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) \left[ 1 + \frac{3x^2+5}{-2x+3} \ln[x + 4] \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x + 3) = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2+5}{-2x+3} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln[x + 4]] = +\infty$$

حالة 2 طريقة الازالة إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر من درجة  $h(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)\ln[f(x)] = g(x) \left[ 1 + \frac{h(x)}{\frac{g(x)}{x}} \times \frac{\ln[f(x)]}{x} \right]$$

ثم نبين أن  $\frac{\ln[f(x)]}{x}$  يؤول الصفر كما في الحالة 4 سابقا

أو  $g(x) + h(x)\ln[f(x)] = h(x) \left[ \frac{g(x)}{h(x)} + \ln[f(x)] \right]$  نضع  $k(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  نتعامل مع العبارة  $k(x) + \ln[f(x)]$  أن وجدت حالة عدم تعيين كما قلنا في الشكل 3

مثال :

$$\begin{aligned} \text{لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x^2 + 3 + (3x + 5)\ln[x + 4]] &= -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} [-2x^2 + 3 + (3x + 5)\ln[x + 4]] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (3x + 5) \left[ \frac{-2x^2 + 3}{3x + 5} + \ln[x + 4] \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)(3x + 5) &= -\infty \text{ لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)(3x + 5) \left[ \frac{-2x^2 + 3}{(3x + 5)(x + 4)} + \frac{\ln[x + 4]}{x + 4} \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x^2 + 3}{(3x + 5)(x + 4)} \right] &= \frac{-2}{3} \text{ (نهاية شهيرة) و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[x + 4]}{x + 4} = 0 \end{aligned}$$

شكل العبارة  $g(x) + h(x)\ln[f(x)]$ ،  $g(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  و  $h(x)$  يؤول الى  $-\infty$  النتيجة متعلقة بدرجة  $h(x)$  و  $g(x)$  إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر تماما من درجة  $h(x)$  فإن النتيجة  $+\infty$  وإذا كانت درجة  $h(x)$  أكبر من أو تساوي درجة  $g(x)$  فإن  $-\infty$

حالة 1 طريقة الازالة إذا كانت درجة  $h(x)$  تساوي أو أكبر من درجة  $g(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$$g(x) + h(x)\ln[f(x)] = h(x) \left[ \frac{g(x)}{h(x)} + \ln[f(x)] \right]$$

مثال :

$$\text{-1 لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x + (2 - x)\ln[x + 4]] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [3x + (2 - x)\ln[x + 4]] &= \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) \left[ \frac{3x}{2 - x} + \ln[x + 4] \right] \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x}{2 - x} &= -3 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + 4) = +\infty \end{aligned}$$

حالة 2 طريقة الازالة إذا كانت درجة  $g(x)$  أكبر من درجة  $h(x)$  نكتب العبارة على الشكل :

$g(x) + h(x)\ln[f(x)] = h(x) \left[ \frac{g(x)}{h(x)} + \ln[f(x)] \right]$  نضع  $k(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  نتعامل مع العبارة  $k(x) + \ln[f(x)]$  أن وجدت حالة عدم تعيين كما قلنا في الشكل 3

مثال :

$$\text{لان } \lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 3 + (-x + 5)\ln[x + 4]] = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [x^2 + 3 + (-x + 5)\ln[x + 4]] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 5) \left[ \frac{x^2+3}{-x+5} + \ln[x + 4] \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)(-x + 5) = -\infty \text{ لأن } = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 4)(-x + 5) \left[ \frac{x^2+3}{(-x+5)(x+4)} + \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2+3}{(-x+5)(x+4)} \right] = -1 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln[x+4]}{x+4} = 0 \text{ (نهاية شهيرة)}$$

(6)

شكل العبارة  $\frac{g(x)+\ln[f(x)]}{h(x)}$ ،  $g(x)$  و  $h(x)$  يؤولان الى  $-\infty$  أو  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول الى  $+\infty$  النتيجة متعلقة بدرجة  $g(x)$  و  $h(x)$  إذا كانت درجة  $g(x)$  اكبر من  $h(x)$  فإن النتيجة  $+\infty$  (كليهما يؤولان الى  $-\infty$  أو كليهما الى  $+\infty$  أو أحدهما تؤول الى  $-\infty$  والاخرى الى  $+\infty$ ) وإذا كانت درجة  $h(x)$  اكبر من  $g(x)$  فإن النتيجة 0 وإذا كان لهما نفس الدرجة فإن النتيجة عدد غير معدوم

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل:  $\frac{g(x)+\ln[f(x)]}{h(x)} = \frac{g(x)}{h(x)} + \frac{\ln[f(x)]}{h(x)}$

نهاية  $\frac{\ln[f(x)]}{h(x)}$  تطرقنا اليه في 4 و نهاية  $\frac{g(x)}{h(x)}$  نهاية دالة ناطقة ناتجة من كثيري حدود او دالتين ناطقتين

أمثلة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x + \ln[x+4]}{-2x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x}{-2x+3} + \frac{\frac{\ln[x+4]}{x+4}}{\frac{-2x+3}{x+4}} \right] = 1 \quad -1$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x}{-2x+3} \right] = 1$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right] = 0$  (ن ش) و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x+3}{x+4} \right] = -2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x^2 + \ln[x+4]}{-2x+3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x^2}{-2x+3} + \frac{\frac{\ln[x+4]}{x+4}}{\frac{-2x+3}{x+4}} \right] = -\infty \quad -2$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x^2}{-2x+3} \right] = -\infty$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{\ln[x+4]}{x+4} \right] = 0$  (ن ش) و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-2x+3}{x+4} \right] = 1$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-2x + \ln[-x+4]}{x^2+3} \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-2x}{x^2+3} + \frac{\frac{\ln[-x+4]}{-x+4}}{\frac{x^2+3}{-x+4}} \right] = 0 \quad -3$$

لأن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{-2x}{x^2+3} \right] = 0$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\ln[-x+4]}{-x+4} \right] = 0$  (ن ش) و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{x^2+3}{-x+4} \right] = +\infty$

(7)

شكل العبارة  $g(x)\ln[f(x)]$ ، إذا كان  $f(x)$  و  $g(x)$  كثيري حدود حيث  $f(x)$  ينتهي الى 0 و  $g(x)$  ينتهي الى 0 من أجل  $x$  يؤول الى  $x_0$  و  $x_0$  جذر لـ  $f(x)$  فإن  $g(x)\ln[f(x)]$  يؤول الى 0 من أجل  $x$  يؤول  $x_0$

طريقة الازالة: نكتب العبارة على الشكل  $\frac{g(x)}{f(x)} f(x)\ln[f(x)]$  لبناء ن ش  $\lim_{f(x) \rightarrow 0} f(x)\ln[f(x)]$

مثال :  $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2)\ln[x^2-4]] = 0$  لأن

$$\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \ln(x^2-4)] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{(x-2)}{(x^2-4)} \times (x^2-4) \ln(x^2-4) \right]$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{(x-2)}{(x^2-4)} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[ \frac{1}{x+2} \right] = \frac{1}{4} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 2} [(x^2-4) \ln(x^2-4)] = 0 \quad (\text{نهاية شهيرة})$$

(8)

شكل العبارة  $g(x) \ln[f(x)]$ ،  $g(x)$  يؤول إلى  $-\infty$  أو  $+\infty$  و  $f(x)$  يؤول إلى 1 النتيجة حسب نهاية  $g(x)(f(x) - 1)$

طريقة الازالة نكتب العبارة على الشكل :  $g(x) \ln[f(x)] = (f(x) - 1)g(x) \frac{\ln[f(x)]}{f(x)-1}$

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) \rightarrow 1 \\ \frac{\ln[f(x)]}{f(x)-1} \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad \text{ولدينا: ن ش 1}$$

أمثلة :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \ln \left[ \frac{x}{x+3} \right] \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x \left( \frac{x}{x+3} - 1 \right) \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \right] \quad -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-3x}{x+3} \right] = -3 \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x+3} \rightarrow 1 \\ \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad \text{ن ش 1} \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-3x}{x+3} \times \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \right] = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \ln \left[ \frac{x}{x+3} \right] \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ x^2 \left( \frac{x}{x+3} - 1 \right) \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \right] \quad -2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-3x^2}{x+3} \right] = -\infty \quad \text{و} \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{x}{x+3} \rightarrow 1 \\ \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \rightarrow 1 \end{array} \right. \quad \text{ن ش 1} \quad \text{لان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-3x^2}{x+3} \times \frac{\ln \left[ \frac{x}{x+3} \right]}{\left( \frac{x}{x+3} - 1 \right)} \right] = -\infty$$

## خلاصة لاهم الحالات الأساسية

| العبارة                      | الشروط                                                                                         | النتيجة أو كيفية الازالة                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $e^{f(x)}$                   | $f(x)$ تؤول الى $-\infty$                                                                      | 0                                                                                                                                                                                                                                                             |
| $e^{f(x)}$                   | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$                                                                      | $+\infty$                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $g(x) + h(x)e^{f(x)}$        | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$              | طريقة الازالة : اخراج العامل المشترك<br>$g(x) \left[ \frac{g(x)}{f(x)} + h(x) \frac{e^{f(x)}}{f(x)} \right]$<br>أكثر من درجة $f(x)$ نخرج عامل مشترك $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ يؤول الى عدد                                                |
| $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$ | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$ | طريقة الازالة : قسمة البسط والمقام<br>$\frac{\frac{g(x)}{f(x)} + \frac{e^{f(x)}}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}}$<br>إذا كانت درجة $g(x)$ أو $h(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نقسم على $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ و $\frac{h(x)}{f(x)}$ يؤولان الى عدد |
| $g(x)e^{f(x)}$               | $f(x)$ تؤول الى $-\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$                             | طريقة الازالة : نضرب ونقسم في نفس العدد<br>$\frac{g(x)}{f(x)} f(x) e^{f(x)}$<br>إذا كانت درجة $g(x)$ أكبر من درجة $f(x)$ نضرب و نقسم في $f(x)$ مرفوعة الى اس يجعل $\frac{g(x)}{f(x)}$ يؤول الى عدد                                                            |

### اللوغاريتمية

| العبارة                       | الشروط                                                                                         | النتيجة أو كيفية الازالة                                                                                                                                                                                                                                                                                                 |
|-------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\ln f(x)$                    | $f(x)$ تؤول الى 0 بقيم أكبر                                                                    | $-\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $\ln f(x)$                    | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$                                                                      | $+\infty$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                |
| $g(x) + \ln f(x)$             | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$                                          | طريقة الازالة : اخراج العامل المشترك<br>$f(x) \left[ \frac{g(x)}{f(x)} + \frac{\ln f(x)}{f(x)} \right]$<br>درجة $f(x)$ ننزل الدرجة للعبارة امام $\ln$ باستعمال الخواص                                                                                                                                                    |
| $\frac{g(x)+\ln[f(x)]}{h(x)}$ | $f(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $h(x)$ تؤول الى $+\infty$ | طريقة الازالة : قسمة البسط والمقام<br>$\frac{\frac{g(x)}{f(x)} + \frac{\ln[f(x)]}{f(x)}}{\frac{h(x)}{f(x)}}$<br>إذا كانت درجة $f(x)$ أكبر من درجة $h(x)$ ننزل الدرجة للعبارة التي امام $\ln$ باستعمال الخواص وسنجد $\frac{\ln[f(x)]}{h(x)}$ يؤول الى الصفر ونتيجة النهاية هي النتيجة التي يؤول اليها $\frac{g(x)}{h(x)}$ |

## النهايات والحصر - النهايات والمقارنة

## مبرهنة الحصر:

$g, f$  و  $h$  دوال عددية و  $l$  عدد حقيقي.

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = l$  و  $\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = l$  وإذا كان من أجل  $x$  كبير بالقدر الكافي

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l \text{ فإن } g(x) < f(x) < h(x)$$

تمدد هذه المبرهنة عند حالتها  $x \rightarrow -\infty$  أو  $x \rightarrow x_0$

**تطبيق:** باعتبار  $f$  معرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{6x - \cos x}{3x + 2}$

بين أنه من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن  $\frac{6x-1}{3x+2} \leq f(x) \leq \frac{6x+1}{3x+2}$  ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**الحل:** من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $-1 \leq \cos x \leq 1$  وبشكل خاص على  $[0; +\infty[$

منه  $-1 \leq \cos x \leq 1$  أي  $6x - 1 \leq 6x - \cos x \leq 6x + 1$  بالقسمة على العدد الحقيقي

$3x + 2$  الموجب تماما في المجال  $[0; +\infty[$  نجد أن:  $\frac{6x-1}{3x+2} \leq f(x) \leq \frac{6x+1}{3x+2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2 \text{ منه } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x-1}{3x+2} = 2 \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+1}{3x+2} = 2$$

**مبرهنة المقارنة 1:**  $g, f$  دالتان و  $l$  عدد حقيقي، إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$  وإذا كان من أجل

$x$  كبير بالقدر الكافي  $f(x) \geq g(x)$  فإن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

تمدد هذه المبرهنة عند حالتها  $x \rightarrow -\infty$  أو  $x \rightarrow x_0$

**تطبيق:** باعتبار  $f$  معرفة على  $[0; +\infty[$  كما يلي  $f(x) = \frac{6x + x\sqrt{x^2+1}}{3x+2}$

بين أن من أجل كل  $x$  من  $[0; +\infty[$  فإن  $f(x) > \frac{x^2+6x}{3x+2}$  ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

**الحل:** من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $x^2 + 1 \geq x^2$  وبشكل خاص على  $[0; +\infty[$

$$\sqrt{x^2+1} \geq x \text{ أي } \sqrt{x^2+1} \geq |x| \text{ منه } x\sqrt{x^2+1} \geq x^2$$

أي  $6x + x\sqrt{x^2+1} \geq x^2 + 6x$  بالقسمة على العدد الحقيقي  $3x + 2$  الموجب تماما في المجال

$$f(x) \geq \frac{x^2+6x}{3x+2} \text{ نجد أن: } [0; +\infty[$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \text{ فإن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2+6x}{3x+2} = +\infty$$

## مبرهنة المقارنة 2:

$g, f$  دالتان و  $l$  عدد حقيقي:

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  وإذا كان من أجل  $x$  كبير بالقدر الكافي  $f(x) \leq g(x)$  فإن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

تمدد هذه المبرهنة عند حالتها  $x \rightarrow -\infty$  أو  $x \rightarrow x_0$



**تطبيق :** باعتبار  $f$  معرفة على  $]-\infty; 0]$  كما يلي  $f(x) = \frac{6x + x\sqrt{x^2 + 1}}{-x + 2}$

بين أن من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 0]$  فإن  $f(x) \leq \frac{-x^2 + 6x}{-x + 2}$  ، ثم أحسب  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

**الحل :** من أجل كل  $x$  من  $]-\infty; 0]$  منه  $\sqrt{x^2 + 1} \geq -x$   $6x + x\sqrt{x^2 + 1} \geq -x^2 + 6x$

بالقسمة على العدد الحقيقي  $-x + 2$  الموجب تماما نجد  $f(x) \leq \frac{-x^2 + 6x}{-x + 2}$

بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  فإن  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 6x}{-x + 2} = -\infty$

## المستقيمات المقاربة والمنحنيات المقاربة

### المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b$

أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = b$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  موازي لحامل محور

الفواصل بجوار  $+\infty$  أو  $-\infty$  على الترتيب

**أمثلة :**

**1-** باعتبار الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right] = 2$  و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{2x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right] = 2$  منه نستنتج أن المستقيم ذو المعادلة  $y = 2$

مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  مواز لحامل محور الفاصل بجوار  $+\infty$  وبجوار  $-\infty$

**2-** من أجل الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = -1 + (2x + 5)e^{3x-1}$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} [-1 + (3x + 5)e^{3x-1}] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ -1 + \left( \frac{3x+5}{3x-1} \right) (3x-1)e^{3x-1} \right] = -1$

$x \rightarrow -\infty$

$\frac{3x+5}{3x-1} \rightarrow 1$

لأن

ن ش  $(3x-1)e^{3x-1} \rightarrow 0$

منه المستقيم ذو المعادلة  $y = -1$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  مواز لحامل محور الفاصل بجوار  $-\infty$

### المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الترتيب

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $x = a$  مستقيم مقارب

لـ  $(C_f)$  موازي لحامل محور الترتيب

**ملاحظة :**

إذا كانت النهاية لـ  $f(x)$  عند  $a$  من اليمين غير منتهية ومن اليسار منتهية فالمستقيم المقارب الموازي لـ

لحامل الترتيب هو مقارب فقط من اليمين ومن اليسار هناك نقطة تقارب وليس مستقيم والعكس في

حالة العكس

أمثلة :

**1-** باعتبار الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1; 1\}$  بـ:  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \left[ \frac{x^2+x+1}{x^2-1} \right] = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[ \frac{x^2+x+1}{x^2-1} \right] = +\infty$$

منه المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  مواز لحامل محور الترتيب

**2-** من أجل الدالة  $f$  المعرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  بـ  $f(x) = 2 + \frac{\ln(x+1)}{x-1}$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty \text{ لأن } \begin{cases} x \rightarrow -1 \\ \ln(x+1) \rightarrow -\infty \\ \frac{\ln(x+1)}{x-1} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

منه المستقيم ذو المعادلة  $x = -1$  مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  مواز لحامل محور الترتيب

### المستقيم المقارب المائل

المستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة:  $y = ax + b$ ، مستقيم مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  او عند  $-\infty$  يعني :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0 \text{ على الترتيب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$$

إذا كانت  $a \neq 0$  فإن  $(\Delta)$  مستقيما مقاربا مائلا للمنحنى  $(C_f)$

مبرهنة:

إذا كانت  $f(x)$  من الشكل  $f(x) = ax + b + g(x)$  مع  $a \neq 0$  وكانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$

أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = 0$  فإن المستقيم ذو المعادلة  $y = ax + b$  مقارب مائل لـ  $(C_f)$

بجوار  $+\infty$  على الترتيب  $-\infty$

أمثلة :

**1-** باعتبار الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+x+1}{x-1}$  بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y =$

$x + 2$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  وبجوار  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{x^2+x+1}{x-1} - (x + 2) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{3}{x-1} \right] = 0$$

و  $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 2)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{3}{x-1} \right] = 0$  منه المستقيم ذو المعادلة  $y = x + 2$  مستقيم

مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$  وبجوار  $-\infty$

**2-** من أجل الدالة  $f$  المعرفة على  $]1; +\infty[ \cup ]-\infty; -1[$  بـ  $f(x) = -x + 3 + \frac{\ln(-x+1)}{x+1}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 3$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

$$\begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ \frac{\ln(-x+1)}{-x+1} \rightarrow 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(-x+1)}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \frac{\frac{\ln(-x+1)}{-x+1}}{\frac{x+1}{-x+1}} \right] = 0 \\ \frac{x-1}{-x+1} \rightarrow -1 \end{cases}$$

منه المستقيم ذو المعادلة  $y = -x + 3$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

**3-** من أجل الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x - 1 + (2x + 5)e^{3x-1}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x + 5)e^{3x-1} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[ \left( \frac{3x+5}{3x-1} \right) (3x-1)e^{3x-1} \right] = 0 \text{ لأن } \begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ \frac{3x+5}{3x-1} \rightarrow 1 \\ (3x-1)e^{3x-1} \rightarrow 0 \end{cases}$$

أي المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$

**4-** من أجل الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x - 1 + \frac{e^x - 2}{e^x + 3}$

بين أن المستقيم ذو المعادلة  $y = x$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ -1 + \frac{e^x - 2}{e^x + 3} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{-5}{e^x + 3} \right] = 0$$

أي المستقيم ذو المعادلة  $y = x - 1$  مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $-\infty$  لأن:  $\begin{cases} x \rightarrow +\infty \\ e^x + 3 \rightarrow +\infty \end{cases}$

## المنحنى المقارب

القول أن المنحنى  $(C_g)$  منحنى الدالة  $g$  مقارب للمنحنى  $(C_f)$  عند  $+\infty$  أو عند  $-\infty$  يعني:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - g(x)] = 0 \text{ على الترتيب } \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - g(x)] = 0$$

مثال :

**1-** الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(x) + \frac{3}{x+1}$  منحنىها البياني يقترب من منحنى

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - \ln(x)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x+1} = 0 \text{ لأن } \ln \text{ بجوار } +\infty$$

**2-** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 + \frac{4}{e^{-x} + x}$  منحنىها البياني يقترب من منحنى الدالة مربع

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x^2] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{e^{-x} + x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{4}{-x}}{\frac{e^{-x}}{-x} - 1} = 0 \text{ لأن } -\infty$$

$$\text{لأن: } \begin{cases} x \rightarrow -\infty \\ \frac{4}{-x} \rightarrow 0 \\ \frac{e^{-x}}{-x} \rightarrow +\infty \end{cases}$$

## طريقة البحث عن المستقيم المقارب المائل (خاص بالرياضي وتقني رياضي)

إذا كانت  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

أو  $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x) = +\infty$  فإننا نقول أنه يُحتمل وجود مستقيم مقارب مائل بجوار  $+\infty$  إذا حُسبت النهاية بجوار  $+\infty$  أو بجوار  $-\infty$  إذا حُسبت النهاية بجوار  $-\infty$

وللتأكد من وجود أو عدم وجود المستقيم المقارب المائل وتعيين معادلته ان وجد نتبع الخطوات التالية

نفرض أحد الحالات الأربعة السابقة ولتكن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

المرحلة الاولى نحسب سرعة المنحنى البياني  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$

نتيجة النهاية  $a$  غير معدوم

المرحلة الثانية

نحسب :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - ax]$

الحالة الاولى

نتيجة النهاية  $+\infty$  أو  $-\infty$

المنحنى لا يقبل مستقيم مقارب مائل ولكن يقبل فرعاً من قطع مكافئ في اتجاه المستقيم الذي معادلته  $y = ax$



$$f(x) = x + \ln(x)$$

الحالة الثانية

نتيجة النهاية  $b$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل

مستقيم مقارب مائل

معادلته من الشكل

$$y = ax + b$$

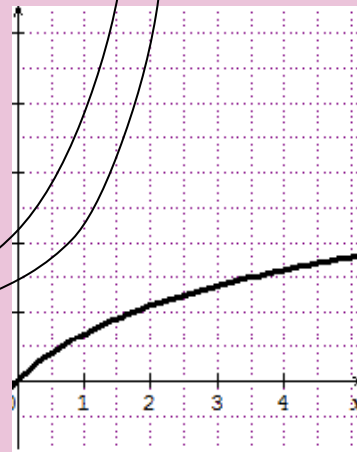
$$f(x) = x + 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$



نتيجة النهاية 0

المنحنى لا يقبل مستقيم مقارب مائل بل يقبل فرع من قطع مكافئ في اتجاه محور الفواصل

الشكل سيكون كما يلي



$$f(x) = \ln(x+1)$$

نتيجة النهاية  $+\infty$  أو  $-\infty$

حسب الحالة المأخوذة

النتيجة لا يمكن ان تكون  $-\infty$

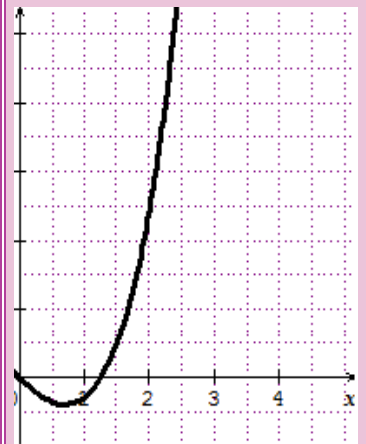
المنحنى لا يقبل مستقيم

مقارب مائل بل يقبل فرع

من قطع مكافئ في اتجاه

محور الترتيب

الشكل سيكون كما يلي



$$f(x) = -2x - 1 + e^x$$

## الإشارات =

## ملاحظة عامة :

## إشارة الجداء من جداء الإشارات

**مثلا** لدراسة إشارة  $(x^2 + x + 1)(2 - x)$  ندرس إشارة  $2 - x$  و إشارة  $x^2 + x + 1$  في نفس الجدول

ثم نعين جداء الإشارات كما سيأتي لاحقا

لدراسة إشارة  $(-4x + 2)(e^x - 3)$

ندرس إشارة  $e^x - 3$  و إشارة

$-4x + 2$  في نفس الجدول

ثم نعين جداء الإشارات

## إشارة حاصل القسمة من حاصل قسمة الإشارات

**مثلا \*** لدراسة إشارة  $\frac{x^2+x+1}{x^2+3x+2}$  ندرس إشارة  $x^2 + x + 1$  و إشارة  $x^2 + 3x + 2$  في نفس الجدول

ثم نعين حاصل قسمة الإشارات

**\* لدراسة إشارة  $\frac{2+\ln x}{x-2}$**  ندرس إشارة  $2 + \ln x$

في مجموعة التعريف و إشارة  $x - 2$  في نفس

الجدول ثم نعين حاصل قسمة الإشارات

## ملاحظة:

إذا كان أحد طرفي الجداء موجب فالإشارة للعبارة كاملة هي نفس إشارة الطرف الآخر  
وإذا كان أحد طرفي الجداء سالب فالإشارة للعبارة كاملة هي عكس إشارة الطرف الآخر

إذا كان البسط موجب أو المقام موجب فالإشارة للعبارة كاملة هي نفس إشارة المقام أو البسط على الترتيب

إذا كان البسط سالب أو المقام سالب فالإشارة للعبارة كاملة هي عكس إشارة المقام أو البسط على الترتيب

**تنبيه هام** لا يمكن في المجموع ان تتوقف الإشارة على أحد طرفي المجموع إما بنفس أو بعكس الإشارة

**مثلا** في العبارة التالية  $1 + (-x + 2)e^x$  لا يمكن القول  $e^x > 0$  و  $1 > 0$  فالإشارة متوقفة على

$-x + 2$  هذا خطأ بل هناك طرق أخرى لتعيين الإشارة

**ولكن يمكن استنتاج إشارة المجموع إذا كان طرفاه موجبين معا فهو موجب أو سالبين معا فهو سالب**

**مثلا** في العبارة التالية  $1 + (x^2 + 2)e^x$  هو موجب لانه مجموع و جداء لقيم موجبة

في العبارة التالية  $-1 + \frac{-e^x}{(e^x-1)^2}$  هو سالب لانه مجموع سالبين



## 1- إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى

لتعيين إشارة العبارة الجبرية  $ax + b$  ، نحل المعادلة  $ax + b = 0$  نجد  $x = -\frac{b}{a}$  وتكون الإشارة كما يلي:

| $x$      | $-\infty$     | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$     |
|----------|---------------|----------------|---------------|
| $ax + b$ | نفس إشارة $a$ | 0              | عكس إشارة $a$ |

أمثلة :

إشارة  $2 - x$  هي :

| $x$     | $-\infty$ | 2 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $2 - x$ | +         | 0 | -         |

إشارة  $2x - 6$  هي :

| $x$      | $-\infty$ | 3 | $+\infty$ |
|----------|-----------|---|-----------|
| $2x - 6$ | -         | 0 | +         |

## 2- إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

حل معادلة من الدرجة الثانية و تعيين إشارة العبارة الجبرية  $ax^2 + bx + c$  يعتمد على حساب المميز  $\Delta$  حيث :  $\Delta = b^2 - 4ac$  ولدينا:

| الإشارة                                                                                                                                                                                                                                                                                                                 | التحليل                       | الحلول          | إذا كان       |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------|-----------------|---------------|-----------------|-----------------|-------------------------------|-----------------|-----------------------|----------------------------------------------------|---------------------------------------------|---------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------|
| <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>ax^2 + bx + c</math></td><td colspan="2">نفس إشارة <math>a</math></td></tr></table>                                                                                                                      | $x$                           | $-\infty$       | $+\infty$     | $ax^2 + bx + c$ | نفس إشارة $a$   |                               | لا تقبل تحليل   | المعادلة لا تقبل حلول | $\Delta < 0$                                       |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $-\infty$                     | $+\infty$       |               |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| $ax^2 + bx + c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | نفس إشارة $a$                 |                 |               |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_0</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>ax^2 + bx + c</math></td><td colspan="3">نفس إشارة <math>a</math> 0 نفس إشارة <math>a</math></td></tr></table>                                                                  | $x$                           | $-\infty$       | $x_0$         | $+\infty$       | $ax^2 + bx + c$ | نفس إشارة $a$ 0 نفس إشارة $a$ |                 |                       | $ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$ | لمعادلة تقبل حل مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$ | $\Delta = 0$                          |                                                                                                                  |              |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $-\infty$                     | $x_0$           | $+\infty$     |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| $ax^2 + bx + c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | نفس إشارة $a$ 0 نفس إشارة $a$ |                 |               |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| <table><tr><td><math>x</math></td><td><math>-\infty</math></td><td><math>x_1</math></td><td><math>x_2</math></td><td><math>+\infty</math></td></tr><tr><td><math>ax^2 + bx + c</math></td><td>نفس إشارة <math>a</math> 0</td><td>عكس إشارة <math>a</math> 0</td><td>نفس إشارة <math>a</math></td><td></td></tr></table> | $x$                           | $-\infty$       | $x_1$         | $x_2$           | $+\infty$       | $ax^2 + bx + c$               | نفس إشارة $a$ 0 | عكس إشارة $a$ 0       | نفس إشارة $a$                                      |                                             | $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ | المعادلة تقبل حلان متميزان هما:<br>$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ و $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ | $\Delta > 0$ |
| $x$                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | $-\infty$                     | $x_1$           | $x_2$         | $+\infty$       |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| $ax^2 + bx + c$                                                                                                                                                                                                                                                                                                         | نفس إشارة $a$ 0               | عكس إشارة $a$ 0 | نفس إشارة $a$ |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |
| ملاحظة : إذا كان $a + b + c = 0$ الحل هو 1 و $\frac{c}{a}$<br>إذا كان $a + c = b$ الحل هو -1 و $-\frac{c}{a}$                                                                                                                                                                                                           |                               |                 |               |                 |                 |                               |                 |                       |                                                    |                                             |                                       |                                                                                                                  |              |

إذا كان للمعادلة حلان فإن مجموعهما  $S = x_1 + x_2$  هو  $S = -\frac{b}{a}$  وجداؤهما  $P = x_1 \times x_2$  هو  $P = \frac{c}{a}$  إذا كان  $a$  و  $c$  من إشارتين مختلفتين فإن المميز موجب تماما بالضرورة



## 3- الإشارة هندسيا انطلاقا من جدول تغيرات او تمثيل بياني مع معرفة قيم الانعدام

**تمهيد :** التمثيل البياني للدالة  $f$  هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات  $(x, f(x))$  حيث  $x \in D_f$

منه فإن  $f(x)$  هي تراتيب النقط التي تنتمي الى  $(C_f)$  أي الترتيبة موجبة تعني أن  $f(x)$  موجبة والترتيبة سالبة تعني أن  $f(x)$  سالبة

لذا فإن تعيين إشارة  $f(x)$  حسب قيم  $x$  من  $D_f$  يرجع الى دراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل

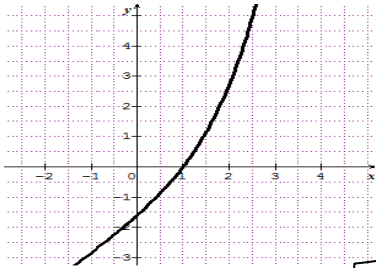
إذا كان  $(C_f)$  يقع فوق حامل محور الفواصل تماما فإن  $f(x) > 0$

إذا كان  $(C_f)$  يقع تحت حامل محور الفواصل تماما فإن  $f(x) < 0$

فواصل النقط التي يتقاطع فيها  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل هي حلول للمعادلة  $f(x) = 0$

**حذاري** تعيين إشارة  $f(x)$  لا علاقة له باتجاه التغير

**مثلا 1-** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x - 2 + e^{x-1}$  تحقق  $f(1) = 0$  وتمثيلها البياني كما يلي



فجدول إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  هو

|        |           |     |           |
|--------|-----------|-----|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $1$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$ | $+$       |

**2-** الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = -x^2 + 1 + \frac{4x-4}{\ln(x+1)}$  تحقق  $f(1) = 0$  وتحقق كذلك

$f(\alpha) = 0$  حيث  $2.32 < \alpha < 2.33$  جدول تغيراتها في المجال  $]0; +\infty[$  كما يلي

حيث  $\beta \approx 1.59$  و  $\gamma \approx 0.95$

|         |           |          |           |
|---------|-----------|----------|-----------|
| $x$     | $0$       | $\beta$  | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $+$       | $0$      | $-$       |
| $f(x)$  | $-\infty$ | $\gamma$ | $-\infty$ |

فجدول إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $x$  من  $]0; +\infty[$  هو

|        |           |     |          |           |
|--------|-----------|-----|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $1$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $-$       | $0$ | $+$      | $-$       |

**3-** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x} - 1$  تحقق  $f(\alpha) = 0$  حيث  $1.5 < \alpha < 1.6$

2 جدول تغيراتها كما يلي

|         |           |     |                   |           |
|---------|-----------|-----|-------------------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $0$ | $1$               | $+\infty$ |
| $f'(x)$ | $-$       | $0$ | $0$               | $-$       |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$ | $\frac{3}{e} - 1$ | $1 -$     |

|        |           |     |          |           |
|--------|-----------|-----|----------|-----------|
| $x$    | $-\infty$ | $0$ | $\alpha$ | $+\infty$ |
| $f(x)$ | $+$       | $0$ | $0$      | $-$       |

فجدول إشارة  $f(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  هو:

4- إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد  $\exp(p(x))$ 

## حلول معادلات ومتراجحات أسية:

1. **لحل معادلة من الشكل:**  $\alpha e^{p(x)} + \beta = 0$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان غير معدومان لدينا :

• إذا كان  $\alpha\beta \geq 0$  المعادلة لا تقبل حلول

• إذا كان  $\alpha\beta < 0$  لدينا  $e^{p(x)} = -\frac{\beta}{\alpha}$  أي  $p(x) = \ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$

(لاحظ أن  $\frac{\beta}{\alpha}$  سالب أي  $-\frac{\beta}{\alpha}$  موجب) ونحل هذه المعادلة

**مثال:**  $4e^{-4x+2} - 16 = 0$  يعني أن  $e^{-4x+2} = 4$  ومنه  $-4x + 2 = \ln 4$

أي  $x = \frac{2 - \ln 4}{4}$  ومنه  $x = \frac{2 - 2\ln 2}{4}$  أي  $x = \frac{1 + \ln 2}{2}$

2. **لدراسة إشارة:**  $\alpha e^{p(x)} + \beta$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدد حقيقي معلومان لدينا :

• إذا كان  $\alpha\beta \geq 0$  إشارة العدد  $\alpha e^{p(x)} + \beta$

✓ موجبة على مجموعة تعريف  $p$  إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  موجبان

✓ سالبة على مجموعة تعريف  $p$  إذا كان  $\alpha$  و  $\beta$  سالبان

• إذا كان  $\alpha\beta < 0$  لمعرفة إشارة العدد  $\alpha e^{p(x)} + \beta$  يكفي معرفة

حلول المعادلة  $\alpha e^{p(x)} + \beta = 0$  والمتراجحة  $\alpha e^{p(x)} + \beta > 0$  أو  $\alpha e^{p(x)} + \beta < 0$

(1)  $\alpha e^{p(x)} + \beta > 0$  تكافئ  $e^{p(x)} > -\frac{\beta}{\alpha}$  في حالة  $\alpha > 0$ ..... (1)

(2)  $\alpha e^{p(x)} + \beta > 0$  تكافئ  $e^{p(x)} < -\frac{\beta}{\alpha}$  في حالة  $\alpha < 0$ ..... (2)

الحالة (1)  $p(x) > \ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$  ونحل هذه المتراجحة و نستنتج حلول المتراجحة  $\alpha e^{p(x)} + \beta > 0$

الحالة (2)  $p(x) < \ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$  ونحل هذه المتراجحة و نستنتج حلول المتراجحة  $\alpha e^{p(x)} + \beta > 0$

**حالة خاصة**  $p(x) = ax + b$

|                           |                    |                                                        |                    |
|---------------------------|--------------------|--------------------------------------------------------|--------------------|
| $x$                       | $-\infty$          | $\frac{-b - \ln\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)}{a}$ | $+\infty$          |
| $\alpha e^{ax+b} + \beta$ | نفس إشارة $\alpha$ | 0                                                      | عكس إشارة $\alpha$ |

في حالة  $\alpha\beta < 0$

|                           |                    |                    |
|---------------------------|--------------------|--------------------|
| $x$                       | $-\infty$          | $+\infty$          |
| $\alpha e^{ax+b} + \beta$ | نفس إشارة $\alpha$ | نفس إشارة $\alpha$ |

في حالة  $\alpha\beta > 0$

**مثال:** لدراسة إشارة  $e^{-2x+3} - 3$  لدينا  $e^{-2x+3} - 3 = 0$  يعني  $e^{-2x+3} = 3$

ومنه  $-2x + 3 = \ln 3$  أي  $x = \frac{3 - \ln 3}{2}$

ولدينا  $e^{-2x+3} - 3 > 0$  يعني  $e^{-2x+3} > 3$  ومنه  $-2x + 3 > \ln 3$  أي  $x < \frac{3 - \ln 3}{2}$

ومنه إشارة  $e^{-2x+3} - 3$  كما يلي :

|                 |           |                       |           |
|-----------------|-----------|-----------------------|-----------|
| $x$             | $-\infty$ | $\frac{3 - \ln 3}{2}$ | $+\infty$ |
| $e^{-2x+3} - 3$ | +         | 0                     | -         |

**3. لحل المعادلة:**  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c = 0$  حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$   
نضع  $e^{p(x)} = t$  فتصبح  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c = 0$

من الشكل  $at^2 + bt + c = 0$  (نحلها باستعمال المميز)

\* إذا كان المميز سالب المعادلة لا تقبل حلول

\* إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $t_0$  أي  $e^{p(x)} = t_0$  لحلها نتبع ما قلناه في الحالة 1

(تقبل حلول في حالة  $t_0$  موجب تماما ولا تقبل حلول في حالة  $t_0$  سالب او معدوم)

\* إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان متمايزان  $t_1$  و  $t_2$

أي  $e^{p(x)} = t_1$  (تقبل حلول في حالة  $t_1$  موجب تماما ولا تقبل حلول حلول في حالة  $t_1$  سالب او معدوم)

و  $e^{p(x)} = t_2$  (تقبل حلول في حالة  $t_2$  موجب تماما ولا تقبل حلول حلول في حالة  $t_2$  سالب او معدوم)

**مثال :** لحل  $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3 = 0$

نضع  $e^{-x} = t$  فتصبح  $t^2 - 2t - 3 = 0$  ولدينا  $\Delta = 16$  أي  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

ومنه  $\begin{cases} e^{-x} = 3 \\ e^{-x} = -1 \end{cases}$  يعني ان  $-x = \ln 3$  أي  $x = -\ln 3$  (لا تقبل حلول)

**4. لدراسة إشارة**  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c$  حيث  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$  و  $c$  أعداد حقيقية و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

نضع  $e^{p(x)} = t$  فتصبح  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c$  من الشكل  $at^2 + bt + c$  (نستعمل المميز)

\* إذا كان المميز سالب إشارة  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c$  من إشارة  $a$

\* إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $t_0$  ومنه  $at^2 + bt + c = a(t - t_0)^2$

أي  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c = a(e^{p(x)} - t_0)^2$  إذا كان  $t_0$  موجب الإنعدام نجده بحل

المعادلة  $e^{p(x)} = t_0$  والإشارة من إشارة  $a$  ، وإذا كان  $t_0$  سالب لا يوجد انعدام والإشارة من إشارة  $a$  على

طول مجال تعريف  $p(x)$

\* إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان  $t_1$  و  $t_2$  ومنه  $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$

أي  $ae^{2p(x)} + be^{p(x)} + c = a(e^{p(x)} - t_1)(e^{p(x)} - t_2)$  ، وندرس إشارة  $(e^{p(x)} - t_1)$  و

$(e^{p(x)} - t_2)$  بالطريقة المذكورة في 2 ثم نشكل جدول الإشارة للجداء  $a(e^{p(x)} - t_1)(e^{p(x)} - t_2)$

**مثال :** لدراسة إشارة  $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3$  نضع  $e^{-x} = t$  فتصبح  $t^2 - 2t - 3 = 0$  ولدينا  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

ومنه  $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3 = 1(e^{-x} - 3)(e^{-x} + 1)$  ولدينا إشارة  $e^{-x} + 1$  موجبة على  $\mathbb{R}$  لأنها

مجموع موجبين

و  $e^{-x} = 3$  يعني ان  $-x = \ln 3$  أي  $x = -\ln 3$  و  $e^{-x} > 3$  يعني ان  $-x > \ln 3$  أي  $x < -\ln 3$

إن جدول الإشارة كما يلي :

| $x$                     | $-\infty$ | $-\ln 3$ | $+\infty$ |
|-------------------------|-----------|----------|-----------|
| $e^{-x} + 1$            |           | +        | +         |
| $e^{-x} - 3$            | +         | 0        | -         |
| $e^{-2x} - 2e^{-x} - 3$ |           | +        | 0         |

## 5- إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد $\ln(p(x))$

### حل معادلات ومتراجحات لوغاريتمية:

1. لحل معادلة من الشكل:  $\alpha \ln[p(x)] + \beta = 0$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان  $\alpha \neq 0$

- نعين أولاً  $D$  مجموعة قيم  $x$  التي تجعل  $p(x)$  موجب تماماً
- وفي  $D$  لدينا  $\alpha \ln[p(x)] + \beta = 0$  تكافئ  $\ln[p(x)] = -\frac{\beta}{\alpha}$  أي  $p(x) = e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$

ونحل هذه المعادلة ونختار الحلول التي تنتمي الى  $D$

مثال: لحل المعادلة  $\ln(-4x + 2) - 3 = 0$  لدينا  $D = ]-\infty ; \frac{1}{2}[$  ولدينا  $\ln(-4x + 2) - 3 = 0$  يعني ان  $\ln(-4x + 2) = 3$  ومنه  $-4x + 2 = e^3$  أي  $x = \frac{2-e^3}{4}$  فهو حل للمعادلة  $\frac{2-e^3}{4} \in D$

2. لدراسة إشارة :  $\alpha \ln[p(x)] + \beta$  حيث  $\alpha$  و  $\beta$  عدنان حقيقيان  $\alpha \neq 0$

نعين أولاً  $D$  مجموعة قيم  $x$  التي تجعل  $p(x)$  موجب تماماً

ثم نعين حلول المعادلة  $\alpha \ln[p(x)] + \beta = 0$  والمتراجحة  $\alpha \ln[p(x)] + \beta > 0$  أو  $\alpha \ln[p(x)] + \beta < 0$

$\alpha \ln[p(x)] + \beta > 0$  أي  $p(x) > e^{-\frac{\beta}{\alpha}}$

ونحل هذه المتراجحة ثم نستنتج حلول المتراجحة  $\alpha \ln[p(x)] + \beta > 0$

بمعرفة حلول المعادلة والمتراجحة يمكن تشكيل جدول إشارة للعبارة  $\alpha \ln[p(x)] + \beta$

مثال: لدراسة إشارة  $\ln(-2x + 3) - 3$  لدينا  $D = ]-\infty ; \frac{3}{2}[$

لدينا  $\ln(-2x + 3) - 3 = 0$  يعني  $\ln(-2x + 3) = 3$  ومنه  $-2x + 3 = e^3$  أي  $x = \frac{3-e^3}{2}$  ولدينا  $\ln(-2x + 3) - 3 > 0$  يعني  $\ln(-2x + 3) > 3$  ومنه  $-2x + 3 > e^3$  أي  $x < \frac{3-e^3}{2}$

ومنه إشارة  $\ln(-2x + 3) - 3$

كما يلي :

| $x$             | $-\infty$ | $\frac{3-e^3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ |
|-----------------|-----------|-------------------|---------------|
| $e^{-2x+3} - 3$ | +         | 0                 | -             |

3. لحل معادلة من الشكل :  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c = 0$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية

و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

- نعين أولا  $D$  مجموعة قيم  $x$  التي تجعل  $p(x)$  موجب تماما
- ثم نضع  $\ln(p(x)) = t$  فتصبح  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c = 0$  من الشكل  $at^2 + bt + c = 0$  (نحلها باستعمال المميز)

إذا كان المميز سالب المعادلة لا تقبل حلول

إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $t_0$  أي  $\ln(p(x)) = t_0$  (نحلها بالطريقة السابقة)

إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان متمايزان  $t_1$  و  $t_2$

أي  $\ln(p(x)) = t_1$  (نحلها بالطريقة السابقة) و  $\ln(p(x)) = t_2$  (نحلها بالطريقة السابقة)

مثال :  $[ \ln(3x+3) ]^2 - 2\ln(3x+3) - 3 = 0$  لدينا  $D = ]-1 ; +\infty[$

نضع  $\ln(3x+3) = t$  فتصبح  $t^2 - 2t - 3 = 0$  ولدينا  $\Delta = 16$  أي  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

ومنه  $\begin{cases} \ln(3x+3) = 3 \\ \ln(3x+3) = -1 \end{cases}$  أي  $\begin{cases} 3x+3 = e^3 \\ 3x+3 = e^{-1} \end{cases}$  أي  $\begin{cases} x = \frac{e^3-3}{3} \in D \\ x = \frac{e^{-1}-3}{3} \in D \end{cases}$

4. لدراسة إشارة  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c$  حيث  $a, b, c$  أعداد حقيقية و  $a \neq 0$  و  $b \neq 0$

- نعين أولا  $D$  مجموعة قيم  $x$  التي تجعل  $p(x)$  موجب تماما

نضع  $\ln p(x) = t$  فتصبح  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c$  من الشكل  $at^2 + bt + c$  (نحلها بالمميز)

إذا كان المميز سالب إشارة  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c$  من إشارة  $a$

إذا كان المميز معدوم المعادلة تقبل حلا مضاعفا  $t_0$  ومنه  $at^2 + bt + c = a(t - t_0)^2$

أي  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c = a(\ln(p(x)) - t_0)^2$  الانعدام نجده بحل

المعادلة  $\ln(p(x)) = t_0$  والإشارة من إشارة  $a$

إذا كان المميز موجب المعادلة تقبل حلان  $t_1$  و  $t_2$  ومنه  $at^2 + bt + c = a(t - t_1)(t - t_2)$

أي  $a[\ln(p(x))]^2 + b\ln(p(x)) + c = a[\ln(p(x)) - t_1][\ln(p(x)) - t_2]$

وندرس إشارة  $(\ln(p(x)) - t_1)$  و  $(\ln(p(x)) - t_2)$  بالطريقة المذكورة سابقا ثم نشكل جدول الإشارة

للجداء  $a[\ln(p(x)) - t_1][\ln(p(x)) - t_2]$

مثال : إشارة  $[ \ln(3x+3) ]^2 - 2\ln(3x+3) - 3$  ،  $D = ]-1 ; +\infty[$

نضع  $\ln(3x+3) = t$  فتصبح  $t^2 - 2t - 3 = 0$  ولدينا  $\begin{cases} t_1 = 3 \\ t_2 = -1 \end{cases}$

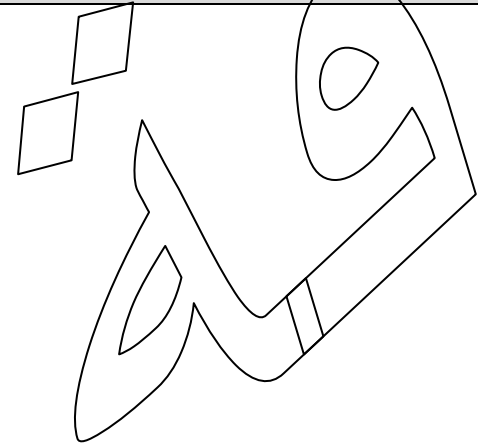
ومنه  $[ \ln(3x+3) ]^2 - 2 \ln(3x+3) - 3 = 1(\ln(3x+3) - 3)(\ln(3x+3) + 1)$

$$\begin{cases} x = \frac{e^3-3}{3} \in D \\ x = \frac{e^{-1}-3}{3} \in D \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 3x+3 = e^3 \\ 3x+3 = e^{-1} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \ln(3x+3) = 3 \\ \ln(3x+3) = -1 \end{cases} \text{ ولدينا}$$

$$\begin{cases} x > \frac{e^3-3}{3} \\ x > \frac{e^{-1}-3}{3} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} 3x+3 > e^3 \\ 3x+3 > e^{-1} \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \ln(3x+3) > 3 \\ \ln(3x+3) > -1 \end{cases}$$

و  $e^{-x} = 3$  يعني ان  $-x = \ln 3$  أي  $x = -\ln 3$  و  $e^{-x} > 3$  يعني ان  $-x > \ln 3$  أي  $x < -\ln 3$

| $x$                                 | $-1$ | $\frac{e^{-1}-3}{3}$ | $\frac{e^3-3}{3}$ | $+\infty$ |
|-------------------------------------|------|----------------------|-------------------|-----------|
| $\ln(3x+3) - 3$                     |      | -                    | -                 | +         |
| $\ln(3x+3) + 1$                     | -    | 0                    | +                 | +         |
| $[ \ln(3x+3) ]^2 - 2 \ln(3x+3) - 3$ | +    | 0                    | -                 | +         |





# الاستمرارية

$f$  دالة مجموعة تعريفها  $D_f$  و  $a$  عدد حقيقي غير معزول من  $D_f$ . القول أن الدالة  $f$  مستمرة عند  $a$  يعني أن نهاية الدالة عند  $a$  هي  $f(a)$  (  $f$  مستمرة عند  $a$  ) يكافئ  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

**نتائج:** • الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

• الدوال كثيرات الحدود،  $\sin$  و  $\cos$  مستمرة على  $\mathbb{R}$ .

• الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.

**مثال:** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x \ln|x| + 1 \dots x \neq 0$  مستمرة عند الصفر لان:  $f(0) = 1$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^+ \\ x \ln(x) \rightarrow 0 \text{ ش} \end{cases} \text{ لان } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln|x| + 1] = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x \ln(x) + 1] = 1$$

$$\begin{cases} x \rightarrow 0^- \\ -x \ln(-x) \rightarrow 0 \text{ ش} \end{cases} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} [x \ln|x| + 1] = \lim_{x \rightarrow 0^-} [-(-x) \ln(-x) + 1] = 1$$

ومنه  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$

**مبرهنة القيم المتوسطة:**

**مبرهنة 1:**  $f$  دالة معرفة و مستمرة على مجال  $[a; b]$ . من أجل كل عدد حقيقي محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي  $c$  محصور بين  $a$  و  $b$  بحيث  $f(x) = k$ .

**مبرهنة 2:** إذا كانت  $f$  دالة مستمرة و رتيبة تماما على المجال  $[a; b]$  فإنه من أجل كل عدد حقيقي  $k$  محصور بين  $f(a)$  و  $f(b)$ ، المعادلة  $f(x) = k$  تقبل حلا وحيدا في المجال  $[a; b]$ .

**أمثلة:**

**1-** نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^3 + x + 1$

المعادلة  $f(x) = 2$  تقبلا حلا وحيدا في المجال  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  لان الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  كونها دالة كثير

حدود وبشكل خاص على  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  ومن أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f'(x) = 3x^2 + 1$

ومنه على  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) > 0$  أي  $f$  متزايدة تماما على  $\mathbb{R}$  وبشكل خاص على  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$

و  $f(1) = 3$  و  $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{13}{8}$  ومنه  $f\left(\frac{1}{2}\right) < 2 < f(1)$

إذا المعادلة  $f(x) = 2$  تقبل في المجال  $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$  حلا وحيد

**2-** نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = -2x + 2 - e^x$

المعادلة  $f(x) = 0$  تقبلا حلا وحيدا في المجال  $[0,3; 0,4]$  لان الدالة  $f$  مستمرة على  $\mathbb{R}$  كونها مجموع دوال مستمرة وبشكل خاص على  $[0,3; 0,4]$  ومن أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$   $f(x) = -2 - e^x$  ومنه على  $\mathbb{R}$   $f(x) < 0$  أي  $f$  متناقصة تماما على  $\mathbb{R}$  وبشكل خاص على  $[0,3; 0,4]$  و  $f(0,4) = -0,2$  و  $f(0,3) = 0,04$  ومنه  $f(0,3) > 0 > f(0,4)$  ، إذا المعادلة  $f(x) = 0$  تقبل في المجال  $[0,3; 0,4]$  حلا وحيدا

## الاشتقاقية

### الاشتقاقية : العدد المشتق - الدالة المشتقة

**تعريف:**  $f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  .  $a$  و  $a+h$  عدنان حقيقيان من  $I$  مع  $h \neq 0$  . نقول أن  $f$  تقبل الاشتقاق عند  $a$  إذا قبلت النسبة  $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  نهاية محدودة لما يوئل  $h$  إلى 0 . تسمى هذه النهاية العدد المشتق للدالة  $f$  عند  $a$  و نرمز لها بالرمز  $f'(a)$

إذن  $f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$  أو  $f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$  وذلك بوضع  $x = a+h$

**ملاحظة:** إذا قبلت الدالة  $f$  الاشتقاق عند كل عدد حقيقي  $x$  من  $I$  نقول أنها تقبل الاشتقاق على  $I$  و تسمى الدالة  $f' : x \rightarrow f'(x)$  الدالة المشتقة للدالة  $f$

**مثال** نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sqrt{x^2+1}$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} \right] \text{ لان } 0 \text{ لان } f \text{ قابلة للاشتقاق عند } 0$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{(\sqrt{x^2+1}+1)(\sqrt{x^2+1}-1)}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2+1}+1)} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1} \right] = 0$$

إذا  $f$  قابلة للاشتقاق عند 0 لان نهاية النسبة موجودة ومحدودة ومنه  $f'(0) = 0$

### تعريف و خاصية

$f$  دالة معرفة على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في معلم  $(0; \vec{j})$  . إذا قبلت  $f$  الاشتقاق عند  $x_0$  فإن  $(C_f)$  يقبل عند النقطة  $A(x_0, f(x_0))$

مماسا  $(\Delta)$  معامل توجيهه  $f'(x_0)$  و معادلته:  $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

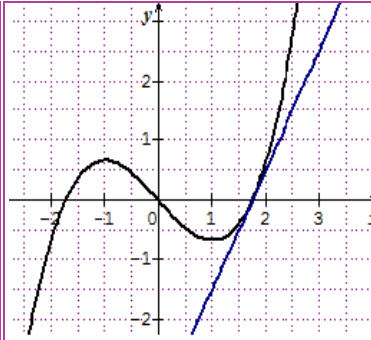
## ملاحظات:

## التفسير الهندسي

## التمثيل الموافق لذلك

## الحالة والتفسير الجبري

للمنحنى  $(C_f)$  مماسا عند النقطة  
 $f'(a)$  معامل توجيهه  
 ومعادلته:  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

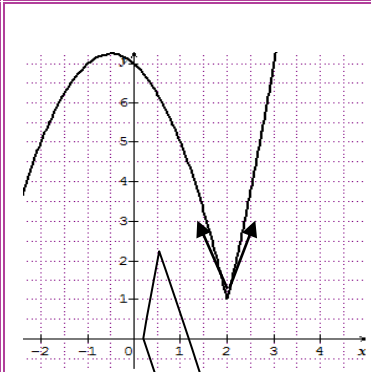


$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

الدالة قابلة للاشتقاق عند  $a$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نصفي مماس عند النقطة  
 $A(a, f(a))$  من اليمين معامل توجيهه  
 أو معرف

بالجملة الديكارتية  $\begin{cases} y = l(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$   
 ومن اليسار معامل توجيهه  $l'$  ومعرف بالجملة  
 الديكارتية  $\begin{cases} y = l'(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$   
 النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى نقطة زاوية



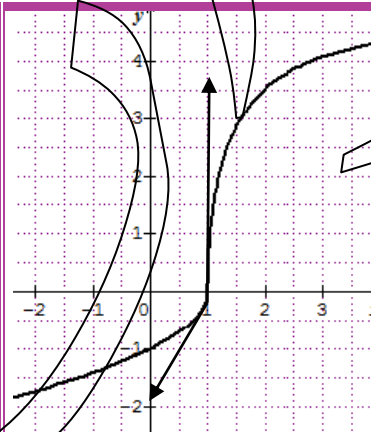
$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l' \text{ و } l \neq l'$$

الدالة  $f$  غير قابلة  
 للاشتقاق عند  $a$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نصفي مماس عند النقطة  
 $A(a, f(a))$  من اليمين معامل توجيهه  $l$   
 ومعرف بالجملة الديكارتية  $\begin{cases} y = l(x - a) + f(a) \\ x \geq a \end{cases}$

ومن اليسار  $\begin{cases} y = l'(x - a) + f(a) \\ x \leq a \end{cases}$   
 موازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة  
 الديكارتية:  $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$  النقطة  $A$  تسمى نقطة



$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

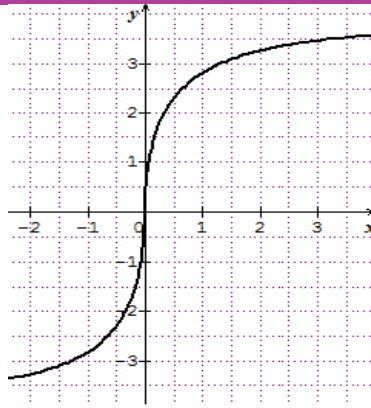
أو  $-\infty$  أو العكس

الدالة  $f$  غير قابلة  
 للاشتقاق عند  $a$

إرجاع هذا في حالة النهاية  $+\infty$   
 أما في حالة النهاية  $-\infty$  فنصف المماس

الموازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة  
 $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نصف مماس عند النقطة  $A(a, f(a))$  من اليمين موازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة  $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$  الديكارتية: ومن اليسار موازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة الديكارتية:  $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$  النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى **نقطة إنعطاف**



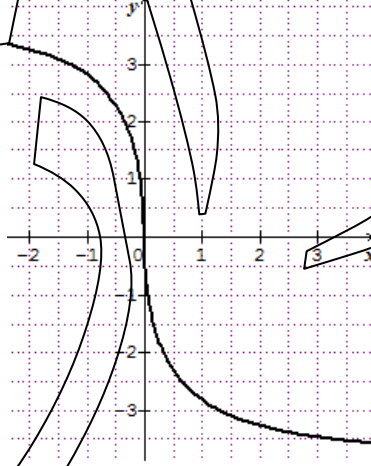
(4)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $a$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نصف مماس عند النقطة  $A(a, f(a))$  من اليمين موازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة  $\begin{cases} x = a \\ y \leq f(a) \end{cases}$  الديكارتية: ومن اليسار موازي لحامل محور الترتيب معرف بالجملة الديكارتية:  $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$  النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى **نقطة إنعطاف**



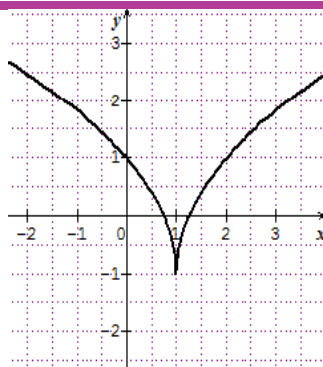
(5)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $a$

المنحنى  $(C_f)$  يقبل نصف مماس عند النقطة  $A(a, f(a))$  من اليمين ومن اليسار موازي لحامل محور الترتيب معرف بنفس بالجملة  $\begin{cases} x = a \\ y \geq f(a) \end{cases}$  الديكارتية: النقطة  $A(a, f(a))$  تسمى **نقطة إرجاع**



(6)

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = -\infty$$

أو العكس

الدالة  $f$  غير قابلة للاشتقاق عند  $a$

## بعض الصيغ للأسئلة التي يطلب فيها معادلة المماس

### 1- إعطاء فاصلة نقطة التماس تصريحا أو تلميحيا

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \dots$$

مثال

نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 + x + 1$

ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 0

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\begin{cases} f'(x) = 2x + 1 \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 1 \end{cases} \quad \text{و منه المعادلة هي } y = x + 1 \text{ هنا أعطيت الفاصلة تصريحا}$$

نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x-1} + 2x$

ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة  $A(1, 3)$ ... لدينا معادلة المماس في هذه الحالة

$$y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\begin{cases} f'(x) = e^{x-1} + 2 \\ f'(1) = 3 \\ f(1) = 3 \end{cases} \quad \text{و منه المعادلة } y = 3x$$

هنا أعطيت الفاصلة تصريحا والاضافة الى الترتيب

نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(x + 1) + 2$

ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  في نقطة تقاطع مع حامل الترتيب أي  $x_0 = 0$

[معلوم أن نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الترتيب هي النقطة من  $(C_f)$  التي فاصلتها معدومة]

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

$$\begin{cases} f'(x) = \frac{1}{x+1} \\ f'(0) = 1 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad \text{و منه المعادلة } y = x + 2 \text{ هنا أعطيت الفاصلة تلميحيا}$$

نأخذ الدالتين  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 + x - \ln(x^2 + 1)$

و  $g$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $g(x) = x^2 + x$

ويقول السؤال أكتب معادلة للمماس  $(T)$  الذي يمس كل من  $(C_f)$  و  $(C_g)$  في نقطة تقاطعهما

نعين أولا فاصلة نقطة تقاطع  $(C_f)$  و  $(C_g)$  وذلك بحل المعادلة  $f(x) = g(x)$

أي  $x^2 - \ln(x^2 + 1) = x^2 + x$  نجد  $\ln(x^2 + 1) = 0$  أي  $x^2 + 1 = e^0$  منه  $x = 0$



لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

لدينا  $g(x) = 2x + 1$  منه  $g'(0) = f'(0) = 1$  و  $g(0) = f(0) = 0$  منه المعادلة  $y = x$  هنا أعطيت الفاصلة تلميحاً

## 2- إعطاء ترتيبية نقطة التماس تصريحاً أو تلميحاً

$$y = f'(a)(x - a) + f(a) \dots$$

مثال

← نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1}$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الترتيبة 1.

نبحث أولاً على فاصلة نقطة التماس وذلك بحل المعادلة  $f(x) = 1$  أي  $\frac{x^2+x+2}{x^2+1} = 1$  منه  $x = -1$

- لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(-1)(x + 1) + f(-1)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطيت الترتيبة تصريحاً

← نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^{x-2} - 1$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  في نقطة تقاطع مع حامل

محور الفواصل أي  $f(x) = 0$  [معلوم أن نقطة تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل هي النقطة من  $(C_f)$  التي ترتيبيتها معدومة]

نحل أولاً المعادلة  $f(x) = 0$  أي  $e^{x-2} - 1 = 0$  منه  $e^{x-2} = 1$  أي  $x - 2 = 0$  منه  $x = 2$

- لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطيت الترتيبة تلميحاً

## 3- إعطاء معامل توجيه المماس تصريحاً أو تلميحاً

$$y = f'(a)(x - a) + f(a).$$

يعطى معامل التوجيه مباشرة ولا تُرْطَب المسألة بمستقيم سواء بوجود مماس أو أكثر

الحالة 1

← نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x - 2x + 1$

- ويقول السؤال أكتب معادلة المماس لـ  $(C_f)$  الذي معامل توجيهه 1. أي  $f'(a) = 1$

لذا نحل المعادلة  $f'(x) = 1$  أي  $e^x - 2 = 1$  أي  $x = \ln 3$

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(\ln 3)(x - \ln 3) + f(\ln 3)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة 1 هنا أعطي معامل التوجيه تصريحاً



← نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-\sqrt{3}; \sqrt{3}\}$  بـ  $(x) = \ln|x^2 - 3|$

- ويقول السؤال بين أن لـ  $(C_f)$  مماسان معامل توجيه كل منها  $-1$  أكتب معادلة كل منهما

- أي  $f'(a) = -1$  لذا نحل المعادلة  $f'(x) = -1$  أي  $\frac{2x}{x^2-3} = -1$  أي  $x^2 + 2x - 3 = 0$

منه للمعادلة حلان هما  $x_1 = 1$  و  $x_2 = -3$

لدينا معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $1$  هي  $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

و معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $-3$  هي  $y = f'(-3)(x + 3) + f(-3)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة **1** هنا أعطي معامل التوجيه تصريحاً

**الحالة 2** تربط المسألة بمستقيم معامل توجيهه معلوم ويكون المماس موازيا له سواء بوجود مماس أو أكثر

← نأخذ الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{x}{2} + (e^{-x} - 1)^2$

ويقول السؤال بين أن لـ  $(C_f)$  مماساً وحيداً يوازي  $(\Delta)$  (التي كانت معادلته معطاة سلفاً  $y = \frac{1}{2}x$  :  $(\Delta)$ )

لذا نحل المعادلة  $f'(x) = \frac{1}{2}$  لأن المماس معامل توجيهه  $f'(a)$  والمستقيم معامل توجيهه  $\frac{1}{2}$

وإذا كان لمستقيمان نفس معامل التوجيه فهما متوازيان

$f'(x) = \frac{1}{2}$  أي  $\frac{1}{2} - 2e^{-x}(e^{-x} - 1) = \frac{1}{2}$  أي  $2e^{-x}(e^{-x} - 1) = 0$  منه  $(e^{-x} - 1) = 0$

منه  $x = 0$  لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

و نكمل كتابة المعادلة كما في الحالة **1** هنا أعطي معامل التوجيه تلميحاً

← الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $f(x) = x + \frac{\ln|x|}{x}$

ويقول السؤال بين أنه يوجد مماسان لـ  $(C_f)$  يوازيان  $(\Delta)$  (التي كانت معادلته معطاة سلفاً  $y = x$  :  $(\Delta)$ )

لذا نحل المعادلة  $f'(x) = 1$  لأن المماس معامل توجيهه  $f'(a)$  والمستقيم معامل توجيهه  $1$

وإذا كان لمستقيمان نفس معامل التوجيه فهما متوازيان

$f'(x) = 1$  أي  $1 + \frac{1 - \ln|x|}{x^2} = 0$  أي  $\frac{1 - \ln|x|}{x^2} = 0$  منه في مجموعة التعريف  $1 - \ln|x| = 0$

منه  $|x| = e$  أي  $\begin{cases} x = e \\ x = -e \end{cases}$  لدينا معادلتا المماسين هما  $\begin{cases} y = f'(e)(x - e) + f(e) \\ y = f'(-e)(x + e) + f(-e) \end{cases}$

و نكمل كتابة المعادلتين كما في الحالة **1** هنا أعطي معامل التوجيه تلميحاً

يمكن أن يطلب تعيين المماس الذي يعامد مستقيم معلوم مثلاً  $y = \alpha x + \beta$

والاجابة تكون بتعيين فاصلة نقطة التماس بحل المعادلة  $f'(x) \times \alpha = -1$

**الحالة 3** تربط المسألة بمستقيم معامل توجيهه معلوم ومتعلق بوسيط ويكون المماس موازيا له

← الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (x - 1)(1 - e^{-x})$

ويقول السؤال ليكن  $(T_m)$  حزمة مستقيمت معرفة بالمعادلة  $y = x + m$  حيث  $m$  وسيط حقيقي

عين قيمة  $m$  حتى يكون  $(T_m)$  مماسا لـ  $(C_f)$  في نقطة يطلب تعيين فاصلتها

نلاحظ أن حزمة المستقيمت  $(T_m)$  لها نفس معامل التوجيه 1

لذا نحل المعادلة  $f'(x) = 1$  لان المماس معامل توجيهه  $f'(a)$  والمستقيم  $(T_m)$  معامل توجيهه 1

$$f'(x) = 1 \text{ أي } 1 - e^{-x} + e^{-x}(x - 1) = 1 \text{ أي } 1 - e^{-x} + e^{-x}(x - 1) = 1$$

لدينا معادلة المماس في هذه الحالة  $y = f'(2)(x - 2) + f(2)$  نجد  $y = x - 2 + 1 - e^{-2}$

منه  $y = x - 1 - e^{-2}$  ومنه  $m = -1 - e^{-2}$  و فاصلة نقطة التماس هي 2

$m$

#### 4- إعطاء نقطة من المماس ليست بالضرورة نقطة التماس

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

الدالة العددية المعرفة على  $\mathbb{R}^*$  كما يلي:  $f(x) = 1 - \frac{2\ln|x|}{x}$

ويقول السؤال بين أنه يوجد مماس لـ  $(C_f)$  يشمل النقطة  $A(0; 1)$  ويمس  $(C_f)$  في نقطتين يطلب تعيينهما

لاحظ أن النقطة  $A$  ليست من  $(C_f)$  هي فقط من المستقيم المماس وإذا كانت نقطة من مستقيم فإن

أحداثها تحقق معادلته الديكارتية

منه  $1 = f'(a)(0 - a) + f(a)$  حيث  $a$  فاصلة نقطة التماس ، لدينا  $f'(x) = 1 - \frac{2-2\ln|x|}{x}$

$$1 = -\frac{2-2\ln|a|}{a^2}(0 - a) + 1 - \frac{2\ln|a|}{a} \text{ ومنه } 0 = \frac{2-4\ln|a|}{a} \text{ أي } 0 = \frac{2-2\ln|a|}{a} - \frac{2\ln|a|}{a}$$

$$\text{ومنه } \begin{cases} 2 - 4\ln|a| = 0 \\ a \neq 0 \end{cases} \text{ أي } \begin{cases} \ln|a| = \frac{1}{2} \\ a \neq 0 \end{cases}$$

لدينا  $\ln|a| = \frac{1}{2}$  يعني  $|a| = \sqrt{e}$  أي  $a = \sqrt{e}$  أو  $a = -\sqrt{e}$

منه معادلة المماس الذي يشمل النقطة  $A(0; 1)$  هي  $y = f'(\sqrt{e})(x - \sqrt{e}) + f(\sqrt{e})$

## الاشتقاقية و الاستمرارية

**خاصية:** إذا كانت دالة  $f$  قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  فإنها مستمرة على هذا المجال

## اتجاه تغير دالة:

**مبرهنة** (دون برهان) :  $f$  دالة قابلة للاشتقاق على مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$ .

\* إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) > 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تتعدم الدالة  $f$  من أجلها، فإن الدالة  $f$  متزايدة تماما على  $I$ .

\* إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) < 0$ ، ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تتعدم الدالة  $f$  من أجلها، فإن الدالة  $f$  متناقصة تماما على  $I$ .

\* إذا كان من أجل كل  $x$  من  $I$ ،  $f'(x) = 0$ ، فإن الدالة  $f$  ثابتة على  $I$ .

## اشتقاق دالة مركبة مبرهنة (دون برهان):

إذا قبلت الدالة  $f$  الاشتقاق على

مجال  $I$  من  $\mathbb{R}$  و قبلت الدالة  $v$  الاشتقاق على  $u(I)$  فإن الدالة  $v \circ u$  تقبل الاشتقاق على  $I$

و لدينا من أجل كل  $x$  من  $I$ :  $(v \circ u)'(x) = u'(x)v'[u(x)]$

**مثال:** و  $f(x) = \frac{\ln x}{x} + 2$  أي  $\hat{f}(x) = \frac{1-\ln x}{x^2}$

مشتقة الدالة  $g$  حيث  $g(x) = f(e^{-x})$

هي  $\hat{g}(x) = -e^{-x} \hat{f}(e^{-x})$  أي  $\hat{g}(x) = -e^{-x} \frac{1-\ln(e^{-x})}{(e^{-x})^2}$  أي  $\hat{g}(x) = -\frac{1+x}{e^{-x}}$

## عمليات على المشتقات

$f$  و  $g$  دالتان قابلتان للاشتقاق على  $I$  من  $\mathbb{R}$  و  $g$  لا تتعدم من اجل كل  $x$  من  $I$  لدينا

| المشتقة                                    | الدالة                                                |
|--------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
| $x \rightarrow nax^{n-1}$                  | $x \rightarrow ax^n$ ( $n$ عدد طبيعي، $a$ عدد حقيقي)  |
| $f' + g'$                                  | $f + g$                                               |
| $f'g + g'f$                                | $f \times g$                                          |
| $\frac{f'g - g'f}{g^2}$                    | $\frac{f}{g}$                                         |
| $\frac{-f'}{f^2}$                          | $\frac{1}{f}$                                         |
| $\frac{-a}{(x+b)^2}$                       | $\frac{a}{x+b}$                                       |
| $\frac{-ab}{(bx+c)^2}$                     | $\frac{a}{bx+c}$                                      |
| $\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$                   | $\frac{ax+b}{cx+d}$                                   |
| $nf'f^{n-1}$                               | $f^n$                                                 |
| $x \rightarrow \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$ | $x \rightarrow \sqrt{f(x)}$ ( $f$ موجبة على $I$ )     |
| $x \rightarrow -\sin x$                    | $x \rightarrow \cos x$                                |
| $x \rightarrow \cos x$                     | $x \rightarrow \sin x$                                |
| $x \rightarrow -f'(x)\sin(f(x))$           | $x \rightarrow \cos(f(x))$                            |
| $x \rightarrow f'(x)\cos(f(x))$            | $x \rightarrow \sin(f(x))$                            |
| $\frac{f'}{f}$                             | $x \rightarrow \ln(f(x))$ ( $f$ موجبة تماما على $I$ ) |
| $\frac{f'}{f}$                             | $x \rightarrow \ln f(x) $ ( $f$ غير معدومة على $I$ )  |
| $x \rightarrow f'(x)e^{f(x)}$              | $x \rightarrow e^{f(x)}$                              |

أمثلة :

1- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+x+2}{x^2+1}$  دالتها المشتقة معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - (2x)(x^2+x+2)}{(x^2+1)^2} \text{ منه } \hat{f}(x) = \frac{-x^2-2x+1}{(x^2+1)^2}$$

2- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = e^x - x + 1$  دالتها المشتقة معرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $\hat{f}(x) = e^x - 1$

3- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \sin(x^2 + x + 2)$  دالتها المشتقة معرفة على  $\mathbb{R}$

$$\hat{f}(x) = (2x + 1)\sin(x^2 + x + 2)$$

**4-** الدالة  $f$  المعرفة على  $D = ]-\infty; -1[ \cup ]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln(x^2 + x) + \frac{2x}{x+1}$  دالتها

المشتقة معرفة على  $D$  بـ  $f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x} + \frac{2(x+1)-2x}{(x+1)^2}$  ومنه  $f(x) = \frac{x^2+5x+1}{(x^2+x)(x+1)}$

## الوضع النسبي لمنحنيين بيانيين :

**طريقة:** لدراسة وضعية المنحنى  $(C_f)$  و المنحنى  $(C_g)$  ندرس إشارة الفرق  $f(x) - g(x)$  ولدينا :  
 - القيم  $x$  التي تحقق المتراجحة  $f(x) - g(x) > 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  فوق  $(C_g)$   
 - القيم  $x$  التي تحقق المتراجحة  $f(x) - g(x) < 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  تحت  $(C_g)$   
 - القيم  $x$  التي تحقق المعادلة  $f(x) - g(x) = 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  يتقاطع مع  $(C_g)$

### مثال

الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = \ln x + \frac{3x-3}{x^2+1}$  و  $(C_f)$  منحناها البياني و  $(C)$  المنحنى الممثل للدالة اللوغارتمية وضعية  $(C_f)$  بالنسبة الى  $(C)$  متعلقة بدراسة إشارة الفرق  $f(x) - \ln x$  ولدينا  $f(x) - \ln x = \frac{3x-3}{x^2+1}$

| $x$                             | 0                     | 1                     | $+\infty$             |
|---------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|
| $x^2 + 1$                       | +                     | +                     | +                     |
| $3x - 3$                        | -                     | 0                     | +                     |
| $f(x) - \ln x$                  | -                     | 0                     | +                     |
| وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى $(C)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(C)$ | تقاطع $(C_f)$ و $(C)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(C)$ |

### حالة خاصة

## الوضع النسبي لمنحني بياني ومستقيم :

لدراسة وضعية  $(C_f)$  والمستقيم  $(\Delta)$  ذو المعادلة  $y = ax + b$  ندرس إشارة الفرق  $f(x) - (ax + b)$  ولدينا :  
 - القيم  $x$  التي تجعل  $f(x) - (ax + b) > 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  فوق  $(\Delta)$   
 - القيم  $x$  التي تجعل  $f(x) - (ax + b) < 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  تحت  $(\Delta)$   
 - القيم  $x$  التي تجعل  $f(x) - (ax + b) = 0$  هي فواصل النقط بحيث :  $(C_f)$  يتقاطع مع  $(\Delta)$

**مثال:** الدالة  $f$  معرفة على  $]0; +\infty[$  بـ  $f(x) = x - 1 + \frac{\ln x}{x+1}$  و  $(C_f)$  منحناها البياني و  $(\Delta)$  المستقيم

ذو المعادلة  $y = x - 1$  وضعية  $(C_f)$  بالنسبة الى  $(\Delta)$  متعلقة بدراسة إشارة الفرق  $f(x) - (x - 1)$

| $x$                                  | 0                          | 1                          | $+\infty$                  |
|--------------------------------------|----------------------------|----------------------------|----------------------------|
| $x + 1$                              | +                          | +                          | +                          |
| $\ln x$                              | -                          | 0                          | +                          |
| $f(x) - (x - 1)$                     | -                          | 0                          | +                          |
| وضعية $(C_f)$ بالنسبة الى $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع تحت $(\Delta)$ | تقاطع $(C_f)$ و $(\Delta)$ | $(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$ |

ولدينا

$$f(x) - (x - 1) = \frac{\ln x}{x+1}$$

## نقط خاصة - محور التناظر

### شفعية دالة

$f$  دالة زوجية على  $I$  من  $\mathbb{R}$  يعني أن : من أجل كل  $x \in I$  فإن  $-x \in I$  و  $f(-x) = f(x)$

$f$  دالة فردية على  $I$  من  $\mathbb{R}$  يعني أن : من أجل كل  $x \in I$  فإن  $-x \in I$  و  $f(-x) = -f(x)$

**دراسة شفعية دالة يعني دراسة إن كانت زوجية أم فردية..**

هنا

- إذا كانت  $f$  دالة زوجية فمنحنائها البياني  $(C_f)$  متناظر بالنسبة الى حامل محور الترتيب

- إذا كانت  $f$  دالة فردية فمنحنائها البياني  $(C_f)$  متناظر بالنسبة الى مبدأ الاحداثيات

أمثلة :

**1- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{3x^2+2}{x^2+1}$  دالة زوجية لأنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $-x$  من  $\mathbb{R}$**

ولدينا :  $f(-x) = \frac{3(-x)^2+2}{(-x)^2+1} = \frac{3x^2+2}{x^2+1} = f(x)$  أي  $f(-x) = f(x)$  ومنه  $f(-x) = f(x)$

**2- الدالة  $f$  المعرفة على  $D_f = ]-\infty; -1[ \cup ]1; +\infty[$  بـ  $f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$**

دالة فردية لأنه من أجل كل  $x$  من  $D_f$  فإن  $-x$  من  $D_f$

ولدينا :  $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{-x+1}{-x-1}\right)$  أي  $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$  لان  $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$

ومنه  $f(-x) = -x + \ln\left(\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}}\right)$  ومنه  $f(-x) = -x - \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$  ومنه  $f(-x) = -f(x)$

**3- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \frac{e^x-1}{e^x+1}$  دالة فردية لأنه من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $-x$  من  $\mathbb{R}$**

ولدينا :  $f(-x) = \frac{e^{-x}-1}{e^{-x}+1}$  أي  $f(-x) = \frac{e^x(e^{-x}-1)}{e^x(e^{-x}+1)}$  ومنه  $f(-x) = \frac{1-e^x}{1+e^x}$

إذن  $f(-x) = -f(x)$  أي  $f(-x) = \frac{-(e^x-1)}{1+e^x}$

## مركز التناظر

$f$  دالة معرفة على  $I$  من  $\mathbb{R}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

$A(a, b)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$  يعني أن من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $2a - x$  من  $I$

$$f(2a - x) + f(x) = 2b$$

أو من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $a - x$  من  $I$  و  $a + x$  من  $I$  و  $f(a - x) + f(a + x) = 2b$

**بصفة عامة :** من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $(2 - k)a - x$  من  $I$  و  $ka + x$  من  $I$

$$f((2 - k)a - x) + f(ka + x) = 2b$$



أمثلة :

1- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{1\}$  بـ  $f(x) = x + 1 + \frac{3}{x-1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

النقطة  $\Omega(1; 2)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$  لان لما  $x \neq 1$  فإن  $2 - x \neq 1$

ولدينا:  $f(2-x) + f(x) = (2-x) + 1 + \frac{3}{(2-x)-1} + x + 1 + \frac{3}{x-1}$

ومنه  $\Omega(1, 2)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$   $= \cancel{x} + 3 + \frac{3}{\cancel{x}-1} + \cancel{x} + 1 + \frac{3}{x-1} = 4$

2- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x + \frac{2}{e^x+1}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

النقطة  $\Omega(0; 1)$  مركز تناظر لـ  $(C_f)$  لان من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $-x$  من  $\mathbb{R}$

ولدينا:  $f(-x) + f(x) = (-x) + \frac{2}{e^{-x}+1} + x + \frac{2}{e^x+1}$  أي  $f(-x) + f(x) = \frac{2}{e^{-x}+1} + \frac{2}{e^x+1}$

منه  $f(-x) + f(x) = \frac{2e^x}{e^x(e^{-x}+1)} + \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^x}{e^x+1} + \frac{2}{e^x+1} = \frac{2e^x+2}{e^x+1} = 2$  أي  $f(-x) + f(x) = 2$

محور التناظر

$f$  دالة معرفة على  $I$  من  $\mathbb{R}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة  $x = a$  محور تناظر لـ  $(C_f)$  يعني أن

من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $2a - x$  من  $I$  و  $f(2a - x) - f(x) = 0$

أو من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $a - x$  من  $I$  و  $a + x$  من  $I$  و  $f(a - x) - f(a + x) = 0$

بصفة عامة من أجل كل  $x$  من  $I$  فإن  $(2-k)a - x$  من  $I$  و  $ka + x$  من  $I$  و

$f((2-k)a - x) - f(ka + x) = 0$

أمثلة :

1- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}^* - \{2\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x}$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة  $x = 1$  محور تناظر لـ  $(C_f)$  لأن لما  $x \neq 2$  فإن  $2 - x \neq 0$  ولما  $x \neq 0$  فإن  $2 - x \neq 2$

$x \neq 2$  ولدينا:  $f(2-x) = \frac{(2-x)^2-2(2-x)+3}{(2-x)^2-2(2-x)} = \frac{4+x^2-4x-4+2x+3}{4+x^2-4x-4+2x} = \frac{x^2-2x+3}{x^2-2x} = f(x)$

2- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$  ،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

المستقيم ذو المعادلة  $x = \frac{1}{2}$  محور تناظر لـ  $(C_f)$  لأن من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  فإن  $-x$  من  $\mathbb{R}$

ولدينا:  $f(1-x) = \ln[(1-x)^2 - (1-x) + 1] = \ln(x^2 - 2x + 1 - 1 + x + 1) = \ln(x^2 - x + 1) = f(x)$

نقط التقاطع مع حامي محور الاحداثيات

لتحديد تقاطع  $(C_f)$  مع حامل محور الفواصل

يكفي حل المعادلة  $f(x) = 0$  حلول المعادلة هي فواصل هذه النقط و الترتيبية معدومة

مثلا:

لتعيين نقط تقاطع  $(C_f)$  مع  $(x, x)$  حيث  $D_f = ]0; +\infty[$  و  $f(x) = \frac{1+\ln(x)}{x}$  نحل المعادلة  $\frac{1+\ln(x)}{x} = 0$   
 منه حلها في مجموعة التعريف هو حل المعادلة  $1 + \ln(x) = 0$  أي  $\ln(x) = -1$  منه  $x = e^{-1}$   
 نقطة التقاطع احداثياتها  $(e^{-1}, 0)$

لتحديد نقط التقاطع مع محور الترتيب نحسب  $f(0)$  إن وجدت وتكون حينها نقطة التقاطع هي النقطة ذات الإحداثيات  $(0, f(0))$

## نقطة الانعطاف

### تعريفها:

هي النقطة التي يتحول عندها المنحنى من تحدب إلى تقعر أو من تقعر إلى تحدب

### خواصها

يخترق عندها المماس المنحنى

## حالات طرحها اربعة

### الحالة الأولى

: إذا انعدمت العبارة الجبرية  $f'(x)$  (حيث  $f'$  هي المشتقة الأولى للدالة  $f$ ) عند القيمة  $a$  ولم تغير اشارتها بجوارها يمينا ويسارا فإن النقطة  $A(a; f(a))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

| $x$     | $a$     |
|---------|---------|
| $f'(x)$ | -   0 - |

أو

| $x$     | $a$     |
|---------|---------|
| $f'(x)$ | +   0 + |

ملاحظ

**نقطة هامة** هذا الشرط لنقطة الانعطاف هو شرط كافي وغير لازم ، بمعنى لا يتوجب حدوثه لكي نقول بوجود نقطة انعطاف فقد تكون نقطة الانعطاف موجودة وهذا الشرط غير محقق

مثلا:

1- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^3-2}{x^3+1}$  و  $(C_f)$  تمثيلها البياني، قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  ودالتها المشتقة معرفة بـ  $f'(x) = \frac{9x^2}{(x^3+1)^2}$   
 إشارة  $f'(x)$  على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  كما يلي:

| $x$     | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|---------|-----------|------|-----|-----------|
| $f'(x)$ | +         | +    | 0   | +         |

ومنه النقطة ذات الاحداثيات  $(0; f(0))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$   
 2- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  حيث  $f(x) = x + 2 + (x-1)e^{2x}$

دالتها المشتقة معرفة على  $\mathbb{R}$ :  $f'(x) = e^{2x}g(x)$  حيث  $g(x) = 2x - 1 + e^{-2x}$

| $x$    | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|--------|-----------|---|-----------|
| $g(x)$ | -         | 0 | +         |
| $f(x)$ | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$  وعند دراسة الدالة  $g$

على  $\mathbb{R}$  نجد جدول التغيرات التالي

فجدول إشارة  $g(x)$  من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  هو

| $x$     | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---------|-----------|---|-----------|
| $f'(x)$ | -         | 0 | +         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | 0 | $+\infty$ |

ومنه

ومنه النقطة ذات الإحداثيات  $(0; f(0))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

### الحالة الثانية

إذا اُخذت العبارة الجبرية  $\hat{f}(x)$  (حيث  $\hat{f}$  هي المشتقة الثانية للدالة  $f$ ) عند القيمة  $a$  وغيّرت إشارتها

بجوارها يمينا ويسارا فإن النقطة  $A(a; f(a))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

| $x$          | $a$ |
|--------------|-----|
| $\hat{f}(x)$ | +   |
| $\hat{f}(x)$ | -   |

| $x$          | $a$ |
|--------------|-----|
| $\hat{f}(x)$ | -   |
| $\hat{f}(x)$ | +   |

مثلا:

1- الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ  $f(x) = x^2 - 4x - 2e^{-x-1}$ ، تمثيلها البياني،

قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة معرفة بـ  $\hat{f}(x) = 2x - 4 + 2e^{-x-1}$

و الدالة  $\hat{f}$  بدورها قابلة للاشتقاق على  $\mathbb{R}$  ودالتها المشتقة معرفة بـ  $\hat{\hat{f}}(x) = 2 - 2e^{-x-1}$

إشارة  $\hat{\hat{f}}(x)$  على  $\mathbb{R}$  كما يلي:

| $x$                | $-\infty$ | -1 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|----|-----------|
| $\hat{\hat{f}}(x)$ | -         | 0  | +         |

ومنه النقطة ذات الإحداثيات  $(-1; f(-1))$  نقطة

انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

2- الدالة  $f$  المعرفة على  $]0; +\infty[$  حيث  $f(x) = -x^2 + x \ln x$ :

دالتها المشتقة معرفة على  $]0; +\infty[$ :  $f'(x) = -2x + 1 + \ln x$  و الدالة  $f'$  بدورها قابلة للاشتقاق

على  $]0; +\infty[$  ودالتها المشتقة معرفة بـ:  $\hat{f}(x) = -2 + \frac{1}{x}$  أي  $\hat{\hat{f}}(x) = \frac{-2x+1}{x}$

| $x$                | 0 | $\frac{1}{2}$ | $+\infty$ |
|--------------------|---|---------------|-----------|
| $\hat{\hat{f}}(x)$ | + | 0             | -         |

إشارة  $\hat{\hat{f}}(x)$  على  $]0; +\infty[$  كما يلي:

ومنه النقطة ذات الإحداثيات  $(\frac{1}{2}; f(\frac{1}{2}))$  نقطة انعطاف

للمنحنى  $(C_f)$

## الحالة الثالثة

يطلب كتابة معادلة المماس عند النقطة ذات الفاصلة  $a$  ثم يطلب دراسة الوضع النسبي بين هذا المماس والمنحنى .... إذا تغير الوضع النسبي عند النقطة ذات الفاصلة  $a$  بمعنى المنحنى كان فوق المماس قبل  $a$  وأصبح تحته بعدها أو العكس فإن النقطة ذات الفاصلة  $a$  هي نقطة انعطاف للمنحنى

**التفسير** تغير الوضع النسبي عند نقطة التماس يعني أن المماس اخترق المنحنى عندها فهي نقطة انعطاف

**تنبيه** : تغير الوضع النسبي بين المنحنى والمماس في موضع آخر وليس عند النقطة ذات الفاصلة

$a$  لا تفسير له

مثلا:

**1-** الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  بـ:  $f(x) = \frac{1-x}{x^3+1}$  تمثيلها البياني،

قابلة للاشتقاق على  $]-1; +\infty[$  ودالتها المشتقة معرفة بـ:  $f'(x) = \frac{2x^3-3x^2-1}{(x^3+1)^2}$

عند كتابة معادلة المماس  $(T)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $0$  نجد  $y = -x + 1$ :

لدينا  $f(x) - (-x + 1) = \frac{x^3(x-1)}{x^3+1}$  في المجال  $]-1; +\infty[$  العدد  $x^3 + 1$  موجب تماما

ومنه إشارة الفرق من إشارة  $x^3(x-1)$  ومنه جدول الإشارة كالتالي

|                                  | -1 | 0                                    | 1                                    | $+\infty$         |
|----------------------------------|----|--------------------------------------|--------------------------------------|-------------------|
| $x^3$                            | -  | 0                                    | +                                    | +                 |
| $x-1$                            | -  | -                                    | 0                                    | +                 |
| $f(x) - (-x + 1)$                | +  | 0                                    | 0                                    | +                 |
| الوضع النسبي بين المماس والمنحنى |    | $(C_f)$ فوق $(T)$<br>$(C_f)$ و $(T)$ | $(C_f)$ تحت $(T)$<br>$(C_f)$ و $(T)$ | $(C_f)$ فوق $(T)$ |

بما أن الوضع النسبي تغير بين المماس والمنحنى عند نقطة التماس فالمماس اخترق المنحنى فالنقطة ذات

الإحداثيات  $(0; 1)$  هي نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

## الحالة الرابعة - خاصة بشعبة الرياضيات-

يطلب دراسة قابلية الاشتقاق عند  $a$  وعند حساب  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  نجدها  $+\infty$  في جوار  $a$  بقيم صغرى

وبقيم كبرى أو  $-\infty$  في جوار  $a$  بقيم صغرى وبقيم كبرى

نستنتج أن النقطة ذات الإحداثيات  $(a; f(a))$  نقطة انعطاف للمنحنى  $(C_f)$

التفسير

الحصول على  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = +\infty$  يعني أن المنحنى تغير من تحدب الى تقعر

الحصول على  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = -\infty$  يعني أن المنحنى تغير من تقعر الى تحدب

مثلا:

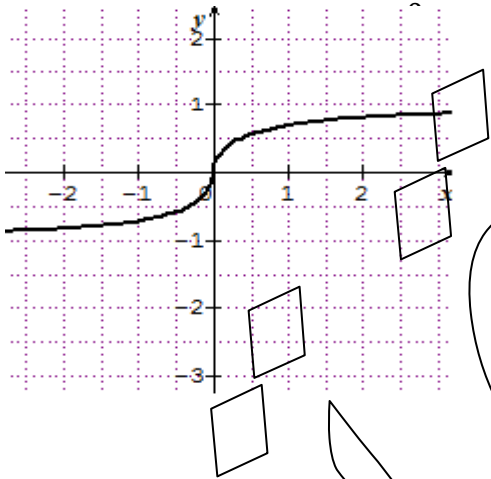
**1-** الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R}$  بـ:  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}}$ ،  $f(0) = 0$  تمثيلها البياني،

عند دراسة قابلية الاشتقاق للدالة  $f$  عند 0 نجد:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2+|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\sqrt{x^2-x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+|x|}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+|x|}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

ومنه للمنحنى  $(C_f)$  نقطة انعطاف هي مبدأ الإحداثيات



## رسم منحني بياني انطلاقا من منحني بياني آخر

**الحالة 1:**  $K$  عدد حقيقي، التمثيل البياني للدالة  $f + k$  هو صورة التمثيل البياني للدالة  $f$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{kj}$

**الحالة 2:**  $\lambda$  عدد حقيقي،  $f$  دالة منحناها  $(C_f)$  أي مجموعة النقط ذات الإحداثيات  $(x, f(x))$  فإن التمثيل البياني للدالة  $\lambda f$  هو مجموعة النقط ذات الإحداثيات  $(x, \lambda f(x))$  أي نضرب تراتيب النقط من  $(C_f)$  في العدد  $\lambda$

**حالة خاصة ومهمة:** إذا كان  $\lambda = -1$  فإن التمثيل البياني لـ  $f$  و التمثيل البياني لـ  $-f$  متناظران بالنسبة لحامل محور الفواصل

**الحالة 3:** إذا كانت  $f(x) = g(x + a) + b$  فإن  $(C_f)$  هو صورة  $(C_g)$  بالانسحاب الذي شعاعه  $\vec{v}(-a, b)$

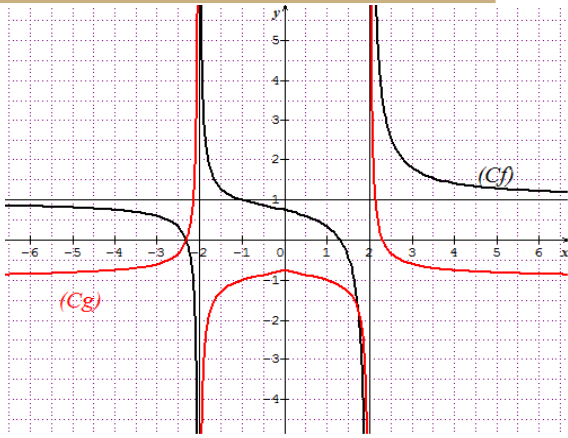
**الحالة 4:** إذا كانت  $g(x) = |f(x)|$  فإن  $g(x) = \begin{cases} f(x) & \dots f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \dots f(x) \leq 0 \end{cases}$  أي  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$  في جزئه الذي فوق حامل محور الفواصل و  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل في جزئه الذي يقع تحت حامل محور الفواصل

**الحالة 5:** إذا كانت  $g(x) = f(|x|)$  أو  $g(x) = -f(|x|)$  أو  $g(x) = f(-|x|)$  فإن  $g$  زوجية  $g(x) = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & \dots x \geq 0 \\ f(-x) & \dots x \leq 0 \end{cases}$  ومنه  $(C_g)$  ينطبق على  $(C_f)$  في جزئه المرسوم في المجال  $[0, +\infty[$  وبما أن  $g$  دالة زوجية نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب

**الحالة 6:** إذا كانت  $g$  دالة زوجية و  $g(x) = -f(x)$  على نصف مجال تعريفها فإذا على هذا المجال  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لمحور الفواصل وبما أن  $g$  دالة زوجية نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لحامل محور الترتيب

**مثلا:**  $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{x^2 - 4}$  و  $g(x) = \frac{-x^2 + |x| + 3}{x^2 - 4}$   
لدينا  $g(-x) = \frac{-(-x)^2 + |-x| + 3}{(-x)^2 - 4} = g(x)$

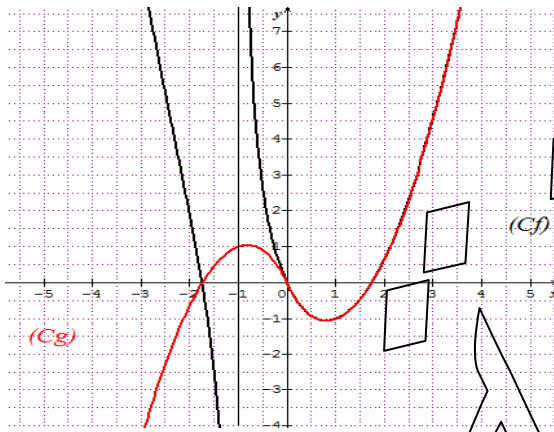




$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+x+3}{x^2-4} \dots x \geq 0 \\ \frac{-x^2-x+3}{x^2-4} \dots x \leq 0 \end{cases} \text{ ولدنيا}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{-x^2+x+3}{x^2-4} \dots x \geq 0 \\ -f(x) \dots x \leq 0 \end{cases} \text{ ومنه}$$

**الحالة 7:** إذا كانت  $g$  دالة فردية و  $g(x) = f(x)$  على نصف مجال تعريفها فإذا على هذا المجال  $(C_f)$  ينطبق على  $(C_g)$  وبما ان  $g$  دالة فردية نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



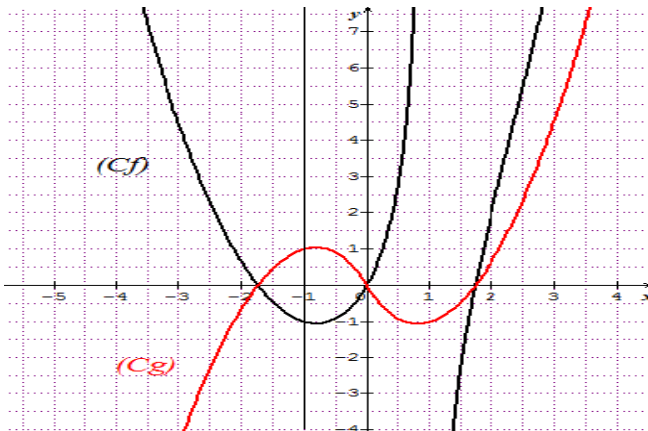
مثلا:

$$g(x) = \frac{x^3-3x}{|x|+1} \text{ و } f(x) = \frac{x^3-3x}{x+1}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3-3(-x)}{|-x|+1} = -g(x) \text{ لدينا}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x}{x+1} = f(x) \dots x \geq 0 \\ \frac{x^3-3x}{-x+1} \dots x \leq 0 \end{cases} \text{ ولدنيا}$$

**الحالة 8:** إذا كانت  $g$  دالة فردية و  $g(x) = -f(x)$  على نصف مجال تعريفها فإذا على هذا المجال  $(C_g)$  نظير  $(C_f)$  بالنسبة لحامل محور الفواصل وبما ان  $g$  دالة فردية نتم الرسم بالتناظر بالنسبة لمبدأ الإحداثيات



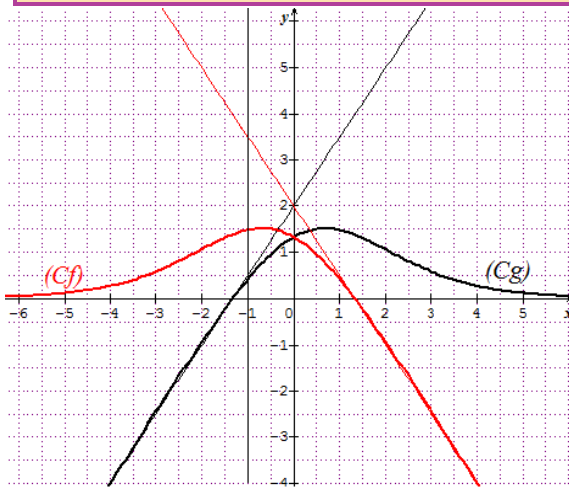
مثلا:

$$g(x) = \frac{x^3-3x}{|x|+1} \text{ و } f(x) = \frac{x^3-3x}{x-1}$$

$$g(-x) = \frac{(-x)^3-3(-x)}{|-x|+1} = -g(x) \text{ لدينا}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x^3-3x}{x+1} \dots x \geq 0 \\ \frac{x^3-3x}{-x+1} = -f(x) \dots x \leq 0 \end{cases} \text{ ولدنيا}$$

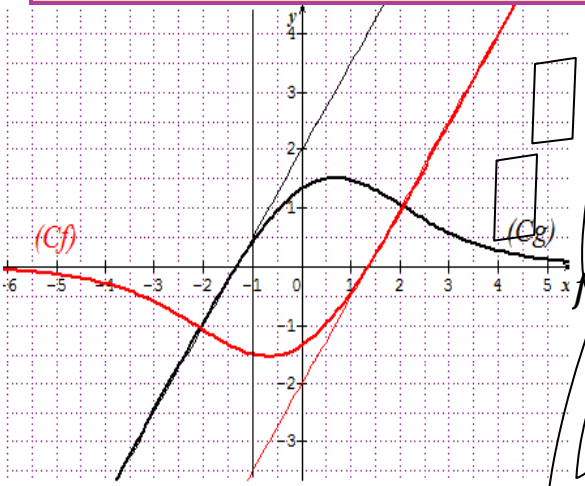
**الحالة 9:** إذا كانت  $g(x) = f(-x)$  نظير  $(C_g)$  بالنسبة لحامل محور الترتيب



مثلا:  $f(x) = \frac{3x+4}{e^x+2}$  و  $g(x) = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x}$  لان:

$$f(-x) = \frac{-3x+4}{e^{-x}+2} = \frac{(-3x+4)e^x}{(e^{-x}+2)e^x} = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x} = g(x)$$

**الحالة 10:** إذا كانت  $g(x) = -f(-x)$  نظير  $(C_g)$  بالنسبة لمبدأ الإحداثيات

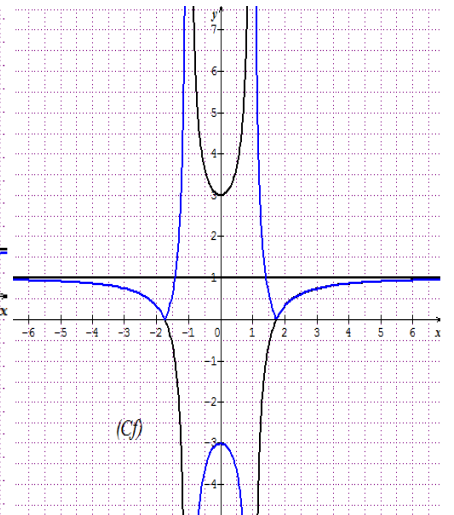
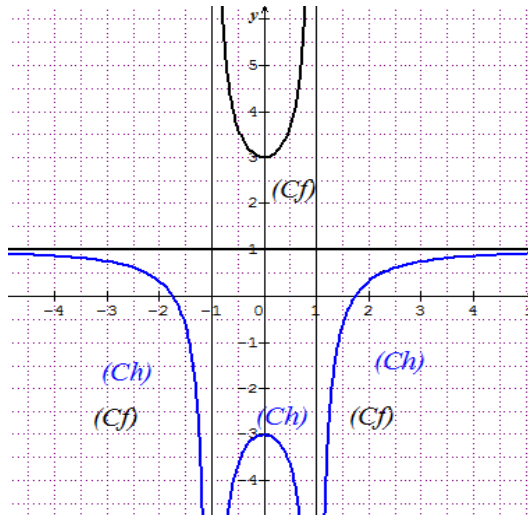
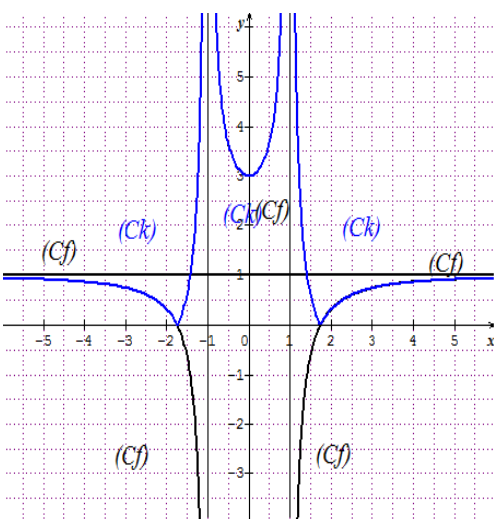


مثلا:  $f(x) = \frac{3x+4}{e^x+2}$  و  $g(x) = \frac{(3x-4)e^x}{1+2e^x}$  لان:

$$f(-x) = \frac{-3x+4}{e^{-x}+2} = \frac{(-3x+4)e^x}{(e^{-x}+2)e^x} = \frac{(-3x+4)e^x}{1+2e^x} = -g(x)$$

**ملاحظة:** من أجل الدالة  $f(x) = \frac{x^2-3}{x^2-1}$  الدوال التالية ليست لها نفس التمثيل البياني:

$$k(x) = \left| \frac{x^2-3}{x^2-1} \right|, \quad h(x) = \frac{x^2-3}{|x^2-1|}, \quad g(x) = \frac{|x^2-3|}{x^2-1}$$



## تعيين ثوابت مجهولة لدالة مع اعطاء شروط - أو بالمطابقة أو بالقسمة باستعمال القسمة الاقليدية أو المطابقة

مثلا:

1- لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^2+3x+5}{x+1}$

المطلوب تعيين  $a$  و  $b$  و  $c$  بحيث من اجل كل  $x$  من  $\mathbb{R} - \{-1\}$  فإن  $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$

في هذه الحالة يمكن توحيد المقامات للعبارة  $ax + b + \frac{c}{x+1}$  ومطابقتها بـ  $\frac{x^2+3x+5}{x+1}$

$$\begin{array}{r} x^2 + 3x + 5 \\ -x^2 - x \\ \hline 2x + 5 \\ -2x - 2 \\ \hline 3 \end{array}$$

أو القسمة الاقليدية لـ  $x^2 + 3x - 2$  على  $x + 1$

ومنه  $f(x) = x + 2 + \frac{3}{x+1}$

2- لتكن  $f$  الدالة العددية للمتغير الحقيقي  $x$  المعرفة على  $\mathbb{R} - \{-1\}$  بـ  $f(x) = \frac{x^3+2x^2}{(x+1)^2}$

أوجد الأعداد الحقيقية  $\alpha$  ,  $\beta$  ,  $\gamma$  بحيث يكون من أجل كل  $x$  من  $D_f$  :  $f(x) = \alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$

نوجد المقامات للعبارة  $\alpha x + \frac{\beta}{x+1} + \frac{\gamma}{(x+1)^2}$  أي  $\frac{\alpha x(x+1)^2 + \beta(x+1) + \gamma}{(x+1)^2}$

بالمطابقة بين العبارتين :  $\frac{1x^3+2x^2+0x+0}{(x+1)^2}$  و  $\frac{\alpha x^3+2\alpha x^2+(\beta+\alpha)x+\beta+\gamma}{(x+1)^2}$  نجد

$$f(x) = x - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(x+1)^2} \text{ أي } \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \text{ ومنه } \begin{cases} \alpha = 1 \\ 2\alpha = 2 \\ \beta + \alpha = 0 \\ \beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

## باستعمال معطيات نستخلص منها معادلات عددها مساوي لعدد المجاهيل على الأقل

لاجل ذلك نقدم الجدول المساعد التالي:

| المعلومة                                                         | تفسيرها                                                                                    |
|------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------|
| النقطة $A(a, b)$ تنتمي إلى $(C_f)$                               | يعني أن $f(a) = b$                                                                         |
| النقطة $A(a, b)$ ذروة لـ $(C_f)$ أو قيمة حدية محلية عند $a$      | يعني أن $f(a) = b$ و $f'(a) = 0$                                                           |
| المماس عند $A(a, b)$ يوازي حامل محور الفواصل                     | يعني أن $f(a) = b$ و $f'(a) = 0$                                                           |
| المماس عند $A(a, b)$ يوازي مستقيم معادلته $y = \alpha x + \beta$ | يعني أن $f(a) = b$ و $f'(a) = \alpha$                                                      |
| المماس عند $A(a, b)$ يعامد مستقيم معادلته $y = \alpha x + \beta$ | يعني أن $f(a) = b$ و $f'(a) \times \alpha = -1$                                            |
| معامل توجيه المماس عند $A(a, b)$ هو $\alpha$                     | يعني أن $f(a) = b$ و $f'(a) = \alpha$                                                      |
| $f(x)$ حل لمعادلة تفاضلية معطاة                                  | نعوض في مكان $y$ بـ $f(x)$ وفي مكان $y'$ بـ $f'(x)$ ونطابق وهكذا ، ثم نبسط المعادلة ونطابق |

## أمثلة:

1.

كقوله: نعتبر المعادلة التفاضلية: (1)  $\dot{y} - 2y = xe^x \dots \dots \dots$

ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين و  $u$  الدالة المعرفة على  $\mathbb{R}$  بالشكل:  $u(x) = (ax + b)e^x$ ، عين  $a$  و  $b$  حتى تكون  $u$  حلا للمعادلة 1

من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $u'(x) = ae^x + (ax + b)e^x$  أي  $u'(x) = (ax + a + b)e^x$

ولدينا:  $u'(x) - 2u(x) = [(ax + a + b)e^x] - 2[(ax + b)e^x]$

بالنشر والتبسيط نجد:  $u'(x) - 2u(x) = [(-ax + a - b)e^x]$

لكي تكون  $u$  حلا للمعادلة (1) من أجل كل قيم  $x$  من  $\mathbb{R}$  يكفي ويلزم أن يكون:  $\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases}$

أي مطابقة العبارة  $-ax + a - b$  مع العبارة مع العبارة  $x$  التي هي  $1 \times x + 0$

نجد أن  $a = -1$  من المعادلة الأولى و  $a = b$  من المعادلة الثانية أي  $b = -1$

2. لتكن  $f$  دالة عددية معرفة على  $\mathbb{R}$  كما يلي:  $f(x) = (ax + b)e^{-x} + 1$ ،  $a$  و  $b$  أعداد

حقيقية،  $(C_f)$  تمثيلها البياني

عين العدان  $a$  و  $b$  بحيث  $A(-1, 1)$  نقطة من  $(C_f)$  و معامل توجيهه المماس للمنحني  $(C_f)$

عند النقطة  $A$  يساوي  $-e$  من بكالوريا علمي 2008

لدينا من أجل كل  $x$  من  $\mathbb{R}$  لدينا:  $f'(x) = ae^{-x} + (ax + b)(-e^{-x})$  (مشتق الجداء)

أي  $f'(x) = e^{-x}(a - b - ax)$

معامل توجيهه المماس عند النقطة  $A$  ذات الفاصلة  $-1$  هو  $f'(-1)$  ومنه  $f'(-1) = -e$

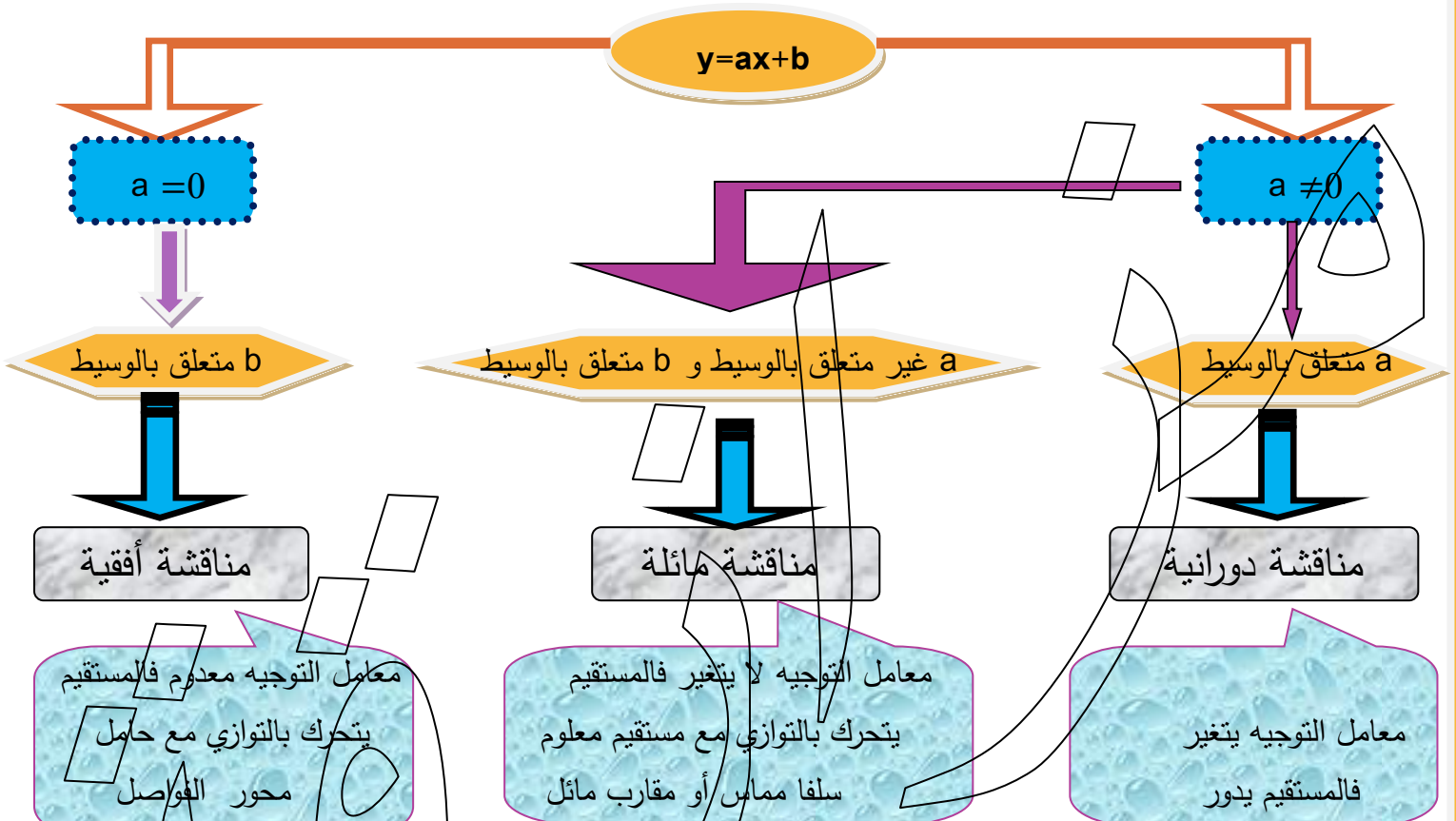
ومنه لدينا  $\begin{cases} f(-1) = 1 \\ f'(-1) = -e \end{cases}$  أي  $\begin{cases} (a(-1) + b)e^{-(-1)} + 1 = 1 \\ e^{-(-1)}(a - b - a(-1)) = -e \end{cases}$  منه  $\begin{cases} (-a + b)e = 0 \\ e(2a - b) = -e \end{cases}$

منه  $\begin{cases} -a + b = 0 \\ 2a - b = -1 \end{cases}$  بالجمع نجد  $a = -1$  وبالتعويض نجد  $b = -1$

ومنه الدالة هي  $f(x) = (-x - 1)e^{-x} + 1$

# المناقشة البيانية

المناقشة المقصودة هنا هي تعيين عدد حلول معادلة أو عدد إشارة حلول معادلة من الشكل:  $f(x) = ax + b$  بالاعتماد على التمثيل البياني وليس جبريا حيث العدان  $a$  و  $b$  أحدهما أو كلاهما معطى بدلالة وسيط يسمح مجموعة معطاة غالبا هي  $\mathbb{R}$  والمطلوب مناقشة عدد الحلول حسب مسح هذا الوسيط للمجموعة المعطاة



## المناقشة الأفقية

1- حلول المعادلة  $f(x) = m$

هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = m$  لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة  $y = m$  مع  $m$  يتغير في  $\mathbb{R}$  ويسمى الحل مضاعفا -لأنه فاصلة تطابق نقطتين - عندما يساوي  $m$  **ترتيبة الذروة** أو **ترتيبة نقطة الزاوية** أو **نقطة الإرجاع**

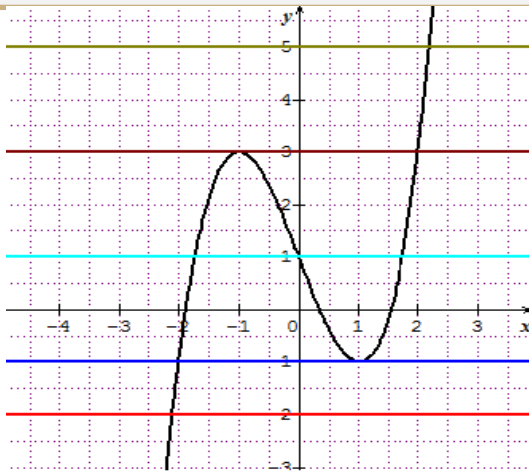
**هام**

الذي يحدد لنا معالم المناقشة هي الذروة ( أو نقطة الزاوية - نقطة الإرجاع ) أو المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل بمعنى نقارن بين العدد  $m$  وترتيبة الذروة أو العدد  $b$  بالنسبة للمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الترتيب



## أمثلة:

1- من أجل التمثيل البياني المقابل

مناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  حيث  $m \in \mathbb{R}$ نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$ حيث  $(\Delta_m): y = m$ 

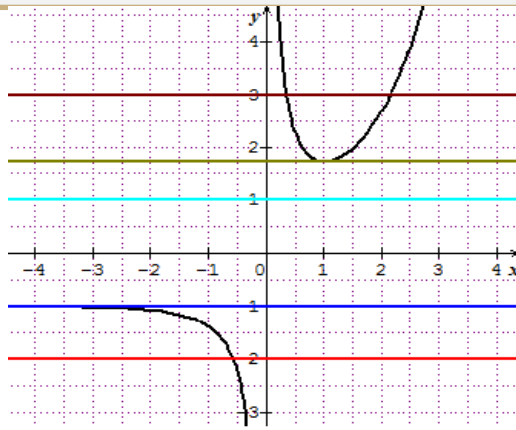
لاحظ أن:

- من أجل  $m = -2$  المستقيم  $(\Delta_{-2})$  يتقاطع مع  $(C_f)$ في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل  $m = -2$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فأشارته سالبة- من أجل  $m = -1$  المستقيم  $(\Delta_{-1})$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطتين إحداها ذروة فاصلتها موجبة والنقطة الأخرى فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل  $m = -1$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين أحدهما مضاعف إذا طلبت إشارته فأشارته الحل المضاعف موجبة والحل الآخر سالبة- من أجل  $m = 1$  المستقيم  $(\Delta_1)$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في ثلاث نقاط فاصلتها إحداها موجبة والأخرى معدومة و الأخرى سالبة ، لذا فإن من أجل  $m = 1$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل ثلاث حلول إذا طلبت إشارتها فأشارتها إحداها موجبة والأخرى معدومة- من أجل  $m = 3$  المستقيم  $(\Delta_3)$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطتين إحداها ذروة فاصلتها سالبة والنقطة الأخرى فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل  $m = 3$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين أحدهما مضاعف إذا طلبت إشارته فأشارته الحل المضاعف سالبة والحل الآخر موجبة- من أجل  $m = 5$  المستقيم  $(\Delta_5)$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطة وحيدة فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل  $m = 5$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فأشارته موجبة**ملاحظة:** إن اختيار القيم لـ  $m$  السابقة ليس كفيها بل اتخذنا من الذروات (النقطة الحدية) كموجه لنا في اختيارها

فاخترنا قيمة أقل من ترتيبية الذروة السفلى والقيمة الثانية مساوية لترتيبيتها والثالثة بين ترتيبية الذروتين والرابعة مساوية لترتيبية الذروة الثانية و الأخيرة فوق ترتيبية الذروة الثانية

لذا فإن مناقشة حسب قيم لعدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  في هذا المثال هي كما يلي :من أجل  $m \in ]-\infty; -1[$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيداما أجل  $m = -1$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين أحدهما مضاعفمن أجل  $m \in ]-1; 3[$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل ثلاث حلول متميزة مثلى مثلىمن أجل  $m = 3$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين أحدهما مضاعفمن أجل  $m \in ]3; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا





2- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = -1 + \frac{e^x}{x} \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* \text{ ب:}$$

لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  حيث  $m \in \mathbb{R}$

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$

حيث  $(\Delta_m): y = m$  لاحظ أن:

- من أجل  $m = -2$  المستقيم  $(\Delta_{-2})$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطة وحيدة فاصلتها سالبة لذا فإن من أجل  $m = -2$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا إذا طلبت إشارته فأشارته سالبة
- من أجل  $m = -1$  المستقيم  $(\Delta_{-1})$  لا يتقاطع مع  $(C_f)$  في أي نقطة لذا فإن من أجل  $m = -1$  المعادلة  $f(x) = m$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{R}$
- من أجل  $m = 1$  المستقيم  $(\Delta_1)$  لا يتقاطع مع  $(C_f)$  في أي نقطة لذا فإن من أجل  $m = 1$  المعادلة  $f(x) = m$  لا تقبل حلول في  $\mathbb{R}$
- من أجل  $m = e - 1$  المستقيم  $(\Delta_{e-1})$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطة الذروة فاصلتها موجبة لذا فإن من أجل  $m = e - 1$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا مضاعفا إذا طلبت إشارته فأشارته موجبة
- من أجل  $m = 5$  المستقيم  $(\Delta_5)$  يتقاطع مع  $(C_f)$  في نقطتين فاصلة كل منهما موجبة لذا فإن من أجل  $m = 5$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين إذا طلبت إشارتهما فأشارتهما موجبة

**ملاحظة :** ان اختيار القيم لـ  $m$  السابقة ليس كيفيا بل اتخذنا من الذروات والمستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل كموجه لنا في اختيارها

لذا فإن مناقشة حسب قيم لعدد حلول المعادلة  $f(x) = m$  في هذا المثال هي كما يلي:

- من أجل  $m \in ]-\infty; -1[$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا وحيدا
- من أجل  $m \in [-1; e - 1[$  المعادلة  $f(x) = m$  لا تقبل حلولاً في  $\mathbb{R}$
- من أجل  $m = e - 1$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلا مضاعفا
- من أجل  $m \in ]e - 1; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = m$  تقبل حلين متميزين

## 2- حلول المعادلة $f(x) = h(m)$

لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = h(m)$  يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم الموازي لحامل محور الفواصل ذو المعادلة  $y = h(m)$  مع  $m$  يتغير في  $\mathbb{R}$  او مجال منها او اتحاد مجالات ويقصد بـ  $h(m)$  عبارة بدلالة  $m$  مثلا  $-2m$  أو  $|m|$  أو  $m^2$  او  $\ln(m)$  او  $e^m - 3$  أو  $f(m)$  ..... و لتجنب الخطأ هنا الأحسن أن نضع  $h(m) = \alpha$

أي نناقش حلول المعادلة  $f(x) = \alpha$  بنفس طريقة  $f(x) = m$

ثم نحل معادلات ومتراجحات التي مجهولها  $m$

فإذا كان مثلا  $\alpha = -2m$  و (قلنا مثلا  $\alpha < 1$  المعادلة تقبل حلا مضاعفا وحل آخر) فهذا يعني أن

(إذا كانت  $m > -\frac{1}{2}$  المعادلة تقبل حل مضاعفا وحل آخر) لان  $\alpha < 1$  يعني ان  $-2m < 1$  وبالتالي  $m > -\frac{1}{2}$  وهنا ننوه إلى

**خواص القيمة المطلقة من أجل  $b$  موجب تماما**  $|a| < b$  يعني ان:  $-b < a < b$

$|a| = b$  يعني ان:  $a = b$  أو  $a = -b$

$|a| > b$  يعني ان:  $a > b$  أو  $a < -b$

**الخواص و التربيع من أجل  $b$  موجب تماما**  $a^2 < b$  يعني ان:  $-\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$

$a^2 = b$  يعني ان:  $a = \sqrt{b}$  أو  $a = -\sqrt{b}$

$a^2 > b$  يعني ان:  $a > \sqrt{b}$  أو  $a < -\sqrt{b}$

**المتباينة المزدوجة والقيمة المطلقة من أجل  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيين لدينا ما يلي**

- من أجل  $b < 0$  و  $a < 0$  فإن  $a < |m| < b$  لا توجد قيم لـ  $m$  تحققها

- من أجل  $b > 0$  و  $a < 0$  فإن  $a < |m| < b$  تستلزم دوما محققة ...  $|m| > a$  و  $|m| < b$

ومنه  $a < |m| < b$  حلولها هي حلول المتراجحة  $|m| < b$  أي  $-b < m < b$

- من أجل  $b > 0$  و  $a > 0$  فإن  $a < |m| < b$  حلولها هي  $m \in ]-b; -a[ \cup ]a; b[$

**المتباينة المزدوجة والتربيع من أجل  $a$  و  $b$  عدنان حقيقيين لدينا ما يلي:**

- من أجل  $b < 0$  و  $a < 0$  فإن  $a < m^2 < b$  لا توجد قيم لـ  $m$  تحققها

- من أجل  $b > 0$  و  $a < 0$  فإن  $a < m^2 < b$  تستلزم دوما محققة ...  $m^2 > a$  و  $m^2 < b$  ومنه

$a < m^2 < b$  حلولها هي حلول المتراجحة  $m^2 < b$  أي  $-\sqrt{b} < m < \sqrt{b}$

- من أجل  $b > 0$  و  $a > 0$  فإن  $a < m^2 < b$  حلولها هي  $m \in ]-\sqrt{b}; -\sqrt{a}[ \cup ]\sqrt{a}; \sqrt{b}[$

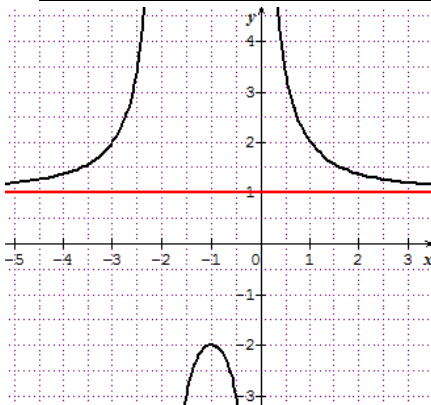
**أمثلة:**

1- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

$$f \text{ المعرفة على } \mathbb{R}^* - \{-2\} \text{ بـ: } f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + 2x}$$

لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = -2|m| + 3$  حيث  $m \in \mathbb{R}$

نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m)$



حيث  $(\Delta_m): y = -2|m| + 3$

نضع  $\alpha = -2|m| + 3$  فالمطلوب تعيين عدد حلول المعادلة  $f(x) = \alpha$  لذا لدينا:

من أجل  $\alpha \in ]-\infty; -2[$  المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلان متميزان  
ولدينا  $\alpha \in ]-\infty; -2[$  معناه  $-2|m| + 3 < -2$  ومنه  $|m| > \frac{5}{2}$  أي  $m \in ]-\infty; -\frac{5}{2}[ \cup ]\frac{5}{2}; +\infty[$

من أجل  $\alpha = -2$  المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلا مضاعفا  
ولدينا  $\alpha = -2$  معناه  $-2|m| + 3 = -2$  ومنه  $|m| = \frac{5}{2}$  أي  $m = -\frac{5}{2}$  أو  $m = \frac{5}{2}$

من أجل  $\alpha \in ]-2; 1[$  المعادلة  $f(x) = \alpha$  لا تقبل حولا في  $\mathbb{R}$   
ولدينا  $\alpha \in ]-2; 1[$  معناه  $-2 < -2|m| + 3 \leq 1$  ومنه  $-5 < -2|m| \leq -2$  أي  
أن  $1 \leq |m| < \frac{5}{2}$  ومنه  $m \in ]-\frac{5}{2}; -1] \cup [1; \frac{5}{2}[$

من أجل  $\alpha \in ]1; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = \alpha$  تقبل حلان متميزان  
ولدينا  $\alpha \in ]1; +\infty[$  معناه  $-2|m| + 3 > 1$  ومنه  $|m| < 1$  أي  $m \in ]-1; 1[$

الخلاصة

من أجل  $m \in ]-\infty; -\frac{5}{2}[ \cup ]\frac{5}{2}; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = -2|m| + 3$  تقبل حلان متميزان  
من أجل  $m = -\frac{5}{2}$  أو  $m = \frac{5}{2}$  المعادلة  $f(x) = -2|m| + 3$  تقبل حلا مضاعفا  
من أجل  $m \in ]-\frac{5}{2}; -1] \cup [1; \frac{5}{2}[$  المعادلة  $f(x) = -2|m| + 3$  لا تقبل حولا في  $\mathbb{R}$   
من أجل  $m \in ]-1; 1[$  المعادلة  $f(x) = -2|m| + 3$  تقبل حلان متميزان

**ملاحظة 1:** عند حلنا للمعادلات والمتراجحات اعلاه وذلك للانتقال من المجال الذي ينتمي اليه  $\alpha$  الى المجال الذي تنتمي اليه  $m$  او من قيمة  $\alpha$  الى قيمة  $m$  لو وجدنا أن المعادلة مستحيلة او المتراجحة مستحيلة فالحالة كلها مرفوضة ولا تكتب في الإجابة

**ملاحظة 1:** لاحظ ان في المثال اعلاه قيم  $m$  تسمح  $\mathbb{R}$  إذا لم نجد ذلك فقد نسينا بعض الحالات

## المناقشة المائلة

1- حلول المعادلة  $f(x) = ax + m$  حيث  $a \neq 0$  وغير متعلق بـ  $m$  و  $m$  وسيط حقيقي

هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = ax + m$

- لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = ax + m$  يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم

المائل ذو المعادلة  $y = ax + m$  مع  $m$  يتغير في  $\mathbb{R}$  وهنا ننوه إلى ما يلي :

إذا كان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  مستقيمان معادلتيهما على الترتيب  $y = ax + b$  و  $y = a'x + b'$

- يسمى العددان  $a$  و  $a'$  معاملي توجيه المستقيمين  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  على الترتيب

- يمثل العددين  $b$  و  $b'$  ترتيبتي نقطتي تقاطع  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  على الترتيب مع حامل محور الترتيب

- يكون  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متوازيان إذا كان  $a = a'$

### الوضع النسبي لمستقيمين متوازيين

إذا كان  $(\Delta)$  و  $(\Delta')$  متوازيان فإن  $(\Delta)$  تحت  $(\Delta')$  إذا كان  $b < b'$

$(\Delta)$  فوق  $(\Delta')$  إذا كان  $b > b'$

$(\Delta)$  يتقاطع مع  $(\Delta')$  إذا كان  $b = b'$

وفق المعطيات السابقة فإنه عادة في حالة المناقشة لتقاطع  $(C_f)$  مع مستقيم مائل يكون هذا المستقيم موازيا

لمستقيم مقارب للمنحني أو مماس عند نقطة منه ، ونقارن في هذه الحالة  $m$  بالقيمة  $b$  بالنسبة للمقارب أو

للمماس الموازي له حسب الحالة

إذا كان  $m < b$  فهذا يعني ان المستقيم المتحرك بتغير  $m$  تحت المقارب أو المماس حسب الحالة ،

وحدد في هذه الحالة عدد التقاطعات وإذا كان  $m > b$  فهذا يعني ان المستقيم المتحرك بتغير  $m$  فوق

المقارب أو المماس حسب الحالة ، وحدد في هذه الحالة عدد التقاطعات وإذا كان  $m = b$  فهذا يعني ان

المستقيم المتحرك بتغير  $m$  ينطبق على المقارب أو المماس حسب الحالة ، وحدد في هذه الحالة عدد

التقاطعات وإذا كان المستقيم المتحرك بتغير  $m$  يوازي مماسا عند نقطة

يسمى الحل مضاعفا عندما  $m = b$  وعند الذروة يسمى حلا وحيدا

### هام

المستقيم  $y = ax + m$  :  $(\Delta_m)$  يوازي مماسا او مستقيما مقاربا مائلا معادلته من الشكل  $y =$

$ax + b$  او اكثر من مستقيم معادلاتها بالشكل  $y = ax + b$  ،  $y = ax + c$  ...

الذي يحدد لنا معالم المناقشة هي القيم  $b$  ،  $c$  .....

بمعنى نقارن بين العدد  $m$  وهذه القيم لنحدد وضع المستقيم المتحرب بالنسبة لوضع المستقيم الثابت الموازي له حسب ما قلناه في الوضع النسبي السابق بين مستقيمين متوازيين

وهنا للتوضيح أكثر نأخذ مثال :

$$f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$$

الرسم المقابل هو للدالة :  $f(x) = \frac{x^2+2x+3}{x+1}$  المستقيمين الظاهرين باللون الأحمر متوازيان وهما المماسان عند النقطتان ذاتا الفاصلتان 0 و -2 معادلتاهما على الترتيب

$y = -x + 3$  و  $y = -x - 5$  (لاحظ أن الأول يقطع حامل محور

الترتيب عند النقطة ذات الترتيبة 3 والثاني -5 )

المستقيمت باللون الأخضر موازية للمستقيمين أنفي الذكر

بالضرورة المستقيم (1) معادلته  $y = -x + 5$  لأنه يقطع حامل محور

الترتيب عند النقطة ذات الترتيبة 5 وهكذا (4) معادلته  $y = -x - 4$

إذا مناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = -x + m$  تكون كما يلي:

إذا كان  $m < -5$  المعادلة تقبل حلان متمايزان (لاحظ أنه تحت المماس  $(\Delta')$  ولديك نقطتي تقاطع

( في وضع مشابه للمستقيم (5) )

إذا كان  $m = -5$  المعادلة تقبل حلا مضاعف (لاحظ أنه ينطبق على المماس  $(\Delta')$ )

إذا كان  $-5 < m < 3$  المعادلة لا تقبل حلول (لأن أي قيمة لـ  $m$  بين هاتين القيمتين تجعل المستقيم ذو

المعادلة  $y = -x + m$  تحت  $(\Delta)$  و فوق  $(\Delta')$  كما هو الوضع لـ (2) و (3) و (4) ولا يوجد تقاطع

( بمعنى لا يوجد حلول )

إذا كان  $m = 3$  المعادلة تقبل حل مضاعف (لاحظ أنه ينطبق على المماس  $(\Delta)$ )

إذا كان  $m > 3$  المعادلة تقبل حلان متمايزان (لاحظ أنه فوق المماس  $(\Delta)$  كما في حالة المستقيم (1))

إذا طلب منا مناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = x + m$  فهي تساوي عدد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم

ذو المعادلة  $y = x + m$  الموازي للمقارب المائل الذي معادلته  $y = x + 1$

إذا كان  $m < 1$  أو  $m > 1$  أو نقول  $m \neq 1$  المعادلة تقبل حلا وحيدا

وإذا كان  $m = 1$  المعادلة لا تقبل حلول

هام

مناقشة عدد وإشارة الحلول في كل الحالات يعني تحديد عدد النقط وإشارة فواصل هذه النقط بمعنى

لا يهمنا المنحنى تحت حامل محور الفواصل أو فوقه ولكن بالإسقاط على محور الفواصل نرى الفاصلة إن

كانت موجبة أو سالبة



-2- حلول المعادلة  $f(x) = ax + h(m)$ 

لا تختلف هذه الحالة مع ما قلناه في المناقشة الأفقية وذلك بالاعتماد على تغيير متغير بوضع  $h(m) = \alpha$   
 لا تختلف هذه الحالة مع ما قلناه في المناقشة الأفقية وذلك بالاعتماد على تغيير متغير بوضع  $h(m) = \alpha$

مثال:

1- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

$$f \text{ المعرفة على } ]0, +\infty[ \text{ بـ: } f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x}$$

لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = \frac{x}{2} + m^2 - 1$  حيث  $m \in \mathbb{R}$ لدينا  $y = \frac{x}{2}$  ( $\Delta$ ): مستقيم مقارب مائل لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$ و  $(T): y = \frac{x}{2} + 1$  مماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة 1نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m): y = \frac{x}{2} + m^2 - 1$  حيث

$$f(x) = \frac{x}{2} + \alpha \text{ نضع } \alpha = m^2 - 1 \text{ فالمطلوب تعيين عدد حلول المعادلة}$$

لذا لدينا:

من أجل  $\alpha \in ]-\infty; 0]$  المعادلة  $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$  تقبل حلا وحيداولدينا  $\alpha \in ]-\infty; 0]$  معناه  $m^2 - 1 \leq 0$  ومنه  $m^2 \leq 1$  أي  $m \in [-1; 1]$ من أجل  $\alpha \in ]0; 1[$  المعادلة  $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$  تقبل حلان متميزانولدينا  $\alpha \in ]0; 1[$  معناه  $0 < m^2 - 1 < 1$  ومنه  $1 < m^2 \leq 2$ ومنه  $m \in ]-\sqrt{2}; -1[ \cup ]1; \sqrt{2}[$ من أجل  $\alpha = 1$  المعادلة  $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$  تقبل حلا مضاعفاولدينا  $\alpha = 1$  معناه  $m^2 - 1 = 1$  ومنه  $m^2 = 2$  أي  $m = \sqrt{2}$  أو  $m = -\sqrt{2}$ من أجل  $\alpha \in ]1; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = \frac{x}{2} + \alpha$  لا تقبل حلولولدينا  $\alpha \in ]1; +\infty[$  معناه  $m^2 - 1 > 1$  ومنه  $m^2 > 2$ أي  $m \in ]-\infty; -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}; +\infty[$



## المناقشة الدورانية

1- حلول المعادلة  $f(x) = mx + b$ 

هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = mx + b$

- لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = mx + b$  يكفي أن نحدد عدد نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم ذو المعادلة  $y = mx + b$  مع  $m$  يتغير في  $\mathbb{R}$  الذي يتغير ميلا كلما تغير معامل توجيهه وهنا نذكر ما يلي:

قبل مناقشة حلول المعادلة لا بد من تعيين أولا مركز الدوران

إذا كانت  $b$  غير متعلقة بـ  $m$  فإن إحداثيات مركز الدوران هي النقطة ذات الإحداثيات  $(0; b)$

وإذا كانت  $b$  متعلقة بـ  $m$  فهي النقطة التي إحداثياتها  $(x; y)$  حل الجملة

$$\begin{cases} g(x; y) = 0 \\ h(x; y) = 0 \end{cases}$$

حيث المعادلة  $y = mx + b$  تكافئ  $mg(x; y) + h(x; y) = 0$

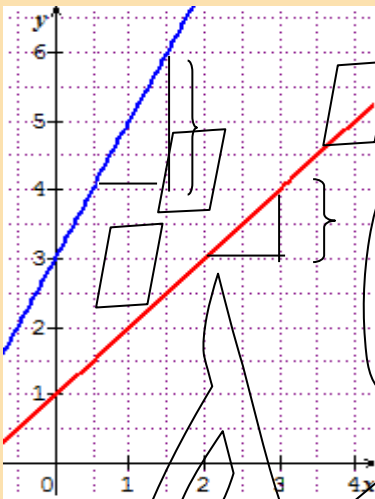
مثلا: معادلة المستقيم بالشكل  $y = mx + m - 1 = 0$  تكافئ  $y - mx - m + 1 = 0$

منه  $m(-x - 1) + y + 1 = 0$  منه لكي تكون المعادلة محققة مهما كان  $m$  يتغير في  $\mathbb{R}$  يكفي أن

يتحقق ما يلي  $\begin{cases} -x - 1 = 0 \\ y + 1 = 0 \end{cases}$  منه  $\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$  أي مركز الدوران النقطة ذات الإحداثيات  $(-1; -1)$

لا بد أن نعرف كذلك ما يلي

ميل مستقيم في معلم متعامد ومتجانس هو ارتفاع لمثلث قائم قائده تساوي واحد، باعتباره موجب



المستقيم بالأحمر معادلته  $y = x + 1$

المستقيم بالأزرق معادلته  $y = 2x + 3$

لذا فإن لرسم مستقيم علمت نقطة منه يكفي أن نتحرك بوحدة واحدة نحو

اليمين ونحو الأعلى بـ  $a$  وحدة حيث  $a$  معامل توجيهه - هذا إذا كان  $a$

موجب أو نتحرك بوحدة واحدة نحو اليمين ونحو الأسفل بـ  $a$  وحدة

هذا إذا كان  $a$  سالب

فزيادة  $a$  أو توجهه نحو  $+\infty$  يعني توجه الزاوية التي يميل بها المستقيم إلى

الزاوية  $\frac{\pi}{2}$  ونقصان  $a$  أو توجهه نحو  $-\infty$  يعني توجه الزاوية التي يميل بها المستقيم إلى الزاوية  $-\frac{\pi}{2}$  وهكذا

مثلا:

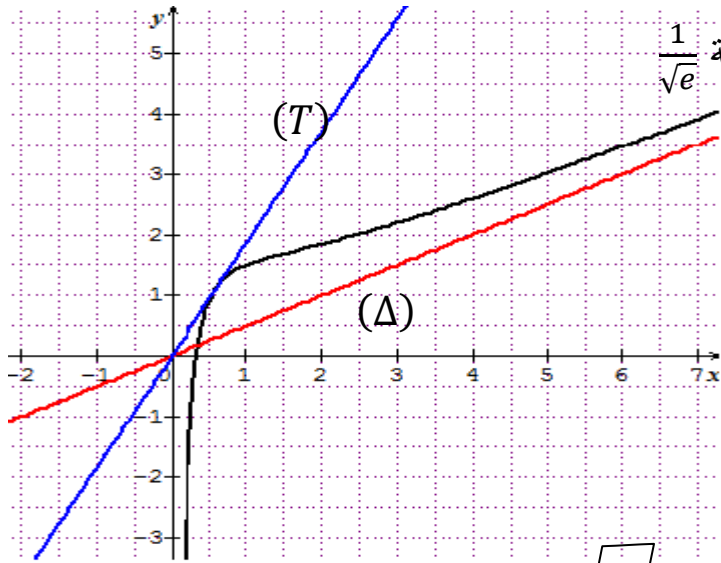
2- من أجل التمثيل البياني المقابل والذي هو التمثيل البياني للدالة

$$f(x) = \frac{x}{2} + \frac{1+\ln x}{x} \quad \text{بـ} \quad ]0, +\infty[$$

لمناقشة عدد حلول المعادلة  $f(x) = mx$  حيث  $m \in \mathbb{R}$

لدينا  $y = \frac{x}{2}$  ( $\Delta$ ): مستقيم مقارب لـ  $(C_f)$  بجوار  $+\infty$

و  $y = \frac{e+1}{2}x$  ( $T$ ): مماس لـ  $(C_f)$  عند النقطة ذات الفاصلة  $\frac{1}{\sqrt{e}}$



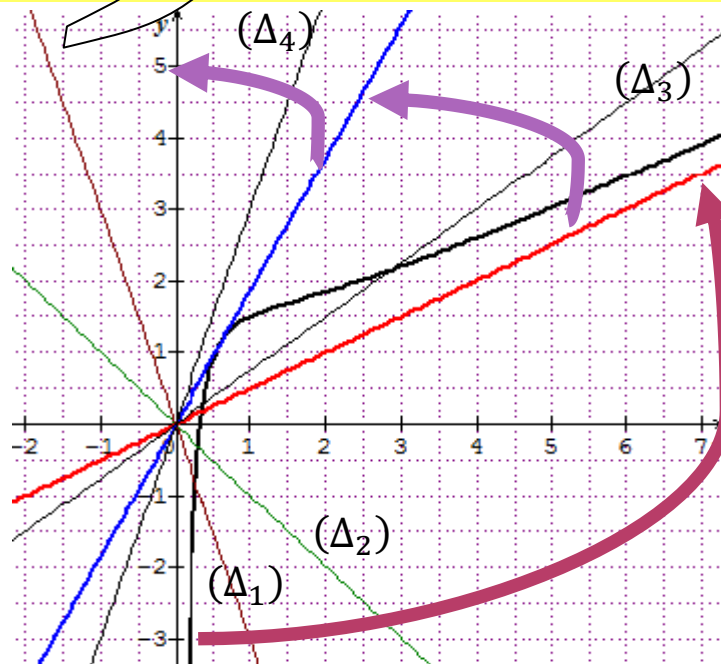
نعلم أن حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع  $(C_f)$  مع المستقيم  $(\Delta_m): y = mx$  حيث

من أجل  $m \in ]-\infty; \frac{1}{2}]$  المعادلة  $f(x) = mx$  تقبل حلا وحيدا (المستقيم يتحرك من الوضع العمودي في اتجاه عكس عقارب الساعة الى المستقيم  $(\Delta)$ ، كما هو الحال  $(\Delta_1)$  و  $(\Delta_2)$ )

من أجل  $m \in ]\frac{1}{2}; \frac{e+1}{2}]$  المعادلة  $f(x) = mx$  تقبل حلا متمايزان (المستقيم يتحرك من  $(\Delta)$  في اتجاه عكس عقارب الساعة الى المستقيم  $(T)$ ، كما هو الحال  $(\Delta_3)$ )

من أجل  $m = \frac{e+1}{2}$  المعادلة  $f(x) = mx$  تقبل حلا مضاعفا (المستقيم ينطبق على  $(T)$ )

من أجل  $m \in ]\frac{e+1}{2}; +\infty[$  المعادلة  $f(x) = mx$  لا تقبل حلول (المستقيم يتحرك من  $(T)$  في اتجاه عكس عقارب الساعة الى الوضع العمودي، كما هو الحال  $(\Delta_4)$ )



# الفهرس

| الصفحة | العنوان                                                                                                                                                                      |
|--------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1      | <b>النهايات</b>                                                                                                                                                              |
| 1      | حالات عدم التعيين وطرق ازلتها $\frac{\infty}{\infty}$                                                                                                                        |
| 2      | حالات عدم التعيين وطرق ازلتها $+\infty - \infty$                                                                                                                             |
| 3      | حالات عدم التعيين وطرق ازلتها $0 \times \infty$                                                                                                                              |
| 3      | حالات عدم التعيين وطرق ازلتها $\frac{0}{0}$                                                                                                                                  |
| 4      | نهايات شهيرة                                                                                                                                                                 |
| 5      | <b>بطاقة تقنية في حساب النهايات للدوال الاسية واللوغارتمية</b>                                                                                                               |
| 5      | <b>الدوال الأسية:</b>                                                                                                                                                        |
| 5      | (1) شكل العبارة $e^{f(x)}$ ، $f(x)$ يؤول الى $-\infty$                                                                                                                       |
| 5      | (2) شكل العبارة $e^{f(x)}$ ، $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ النتيجة : $+\infty$                                                                                                   |
| 5      | (3) شكل العبارة $e^{f(x)} + g(x)$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                                                    |
| 5      | (4) شكل العبارة $e^{f(x)} - g(x)$ ، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                                                    |
| 6      | (5) شكل العبارة $e^{f(x)} + h(x)g(x)$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                    |
| 7      | (6) شكل العبارة $e^{f(x)} + h(x)g(x)$ ، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$                                                    |
| 7      | (7) شكل العبارة $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$                                |
| 6      | (8) شكل العبارة $\frac{g(x)+e^{f(x)}}{h(x)}$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$                                |
| 8      | (9) شكل العبارة $\frac{e^{f(x)}-1}{g(x)}$ ، $g(x)$ يؤول الى 0 و $f(x)$ يؤول الى 0                                                                                            |
| 8      | (10) شكل العبارة $\frac{f(e^x)}{g(e^x)}$ ، $g(e^x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(e^x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$                                               |
| 8      | (11) شكل العبارة $\frac{f(e^x)+h(x)}{g(e^x)}$ ، $g(e^x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(e^x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ |
| 9      | (12) شكل العبارة $e^{f(x)}g(x)$ ، $f(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $g(x)$ تؤول الى $+\infty$ أو $-\infty$                                                                         |

|    |                                                                                                                                                                       |
|----|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 10 | <b>الدوال اللوغارتمية:</b>                                                                                                                                            |
| 10 | (1) شكل العبارة $f(x), \ln[f(x)]$ ، $f(x)$ يؤول الى 0 بقيم أكبرلما $x$ يؤول الى $-\infty$ او $+\infty$ أو $x_0$                                                       |
| 10 | (2) شكل العبارة $f(x), \ln[f(x)]$ ، $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ لما $x$ يؤول الى $-\infty$ او $+\infty$ أو $x_0$ :                                                      |
| 10 | (3) شكل العبارة $g(x) + \ln(f(x))$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                                            |
| 10 | (4) شكل العبارة $g(x) - \ln(f(x))$ ، $g(x)$ تؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                                            |
| 11 | (5) شكل العبارة $\frac{\ln[f(x)]}{g(x)}$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                                         |
| 12 | (6) شكل العبارة $g(x) + h(x)\ln[f(x)]$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $+\infty$                                            |
| 13 | (7) شكل العبارة $g(x) + h(x)\ln[f(x)]$ ، $g(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$ و $h(x)$ يؤول الى $-\infty$                                            |
| 14 | (8) شكل العبارة $\frac{g(x) + \ln[f(x)]}{h(x)}$ ، $g(x)$ و $h(x)$ يؤولان الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى $+\infty$                                       |
| 14 | (9) شكل العبارة $g(x)\ln[f(x)]$ ، إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ كثيري حدود حيث $f(x)$ ينتهي الى 0 و $g(x)$ ينتهي الى 0 من أجل $x$ يؤول الى $x_0$ و $x_0$ جذر بسيط لـ $f(x)$ |
| 15 | (10) شكل العبارة $g(x)\ln[f(x)]$ ، $g(x)$ يؤول الى $-\infty$ أو $+\infty$ و $f(x)$ يؤول الى 1                                                                         |
| 16 | خلاصة لاهم الحالات                                                                                                                                                    |
| 17 | <b>النهايات والحصص - النهايات والمقارنة</b>                                                                                                                           |
| 17 | مبرهنة الحصر:                                                                                                                                                         |
| 17 | مبرهنتي المقارنة                                                                                                                                                      |
| 18 | <b>المستقيمات المقاربة والمنحنيات المقاربة</b>                                                                                                                        |
| 18 | المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الفواصل                                                                                                                           |
| 18 | المستقيم المقارب الموازي لحامل محور الترتيب                                                                                                                           |
| 19 | المستقيم المقارب المائل                                                                                                                                               |
| 20 | المنحنى المقارب                                                                                                                                                       |
| 21 | طريقة البحث عن المستقيم المقارب المائل (خاص بالرياضي وتقني رياضي)                                                                                                     |
| 22 | <b>الإشارات:</b>                                                                                                                                                      |
| 22 | ملاحظة عامة :                                                                                                                                                         |
| 23 | 1- إشارة كثير حدود من الدرجة الأولى                                                                                                                                   |
| 23 | 2- إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية                                                                                                                                  |
| 24 | 3- الإشارة هندسيا انطلاقا من جدول تغيرات او تمثيل بياني مع معرفة قيم الانعدام                                                                                         |
| 25 | 4- إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد $\exp(p(x))$                                                                                                                       |

|    |                                                                  |
|----|------------------------------------------------------------------|
| 25 | حل معادلة من الشكل : $\alpha e^{p(x)} + \beta = 0$               |
| 25 | دراسة إشارة : $\alpha e^{p(x)} + \beta$ - حالة خاصة              |
| 26 | حل المعادلة : $ae^{2p(x)} + e^{p(x)} + c = 0$                    |
| 26 | دراسة إشارة : $e^{2p(x)} + e^{p(x)} + c$                         |
| 27 | <b>5- إشارة عبارة جبرية متعلقة بالعدد <math>\ln(p(x))</math></b> |
| 27 | حل معادلة من الشكل : $\alpha \ln[p(x)] + \beta = 0$              |
| 27 | دراسة إشارة : $\alpha \ln[p(x)] + \beta$                         |
| 28 | حل معادلة من الشكل : $a[\ln(p(x))]^2 + b \ln(p(x)) + c = 0$      |
| 28 | دراسة إشارة : $a[\ln(p(x))]^2 + b \ln(p(x)) + c$                 |
| 30 | <b>الاستمرارية</b>                                               |
| 30 | مبرهنة                                                           |
| 30 | مبرهنة القيم المتوسطة:                                           |
| 31 | <b>الاشتقاقية</b>                                                |
| 31 | الاشتقاقية : العدد المشتق - الدالة المشتقة                       |
| 32 | التفسير الهندسي لقابلية الاشتقاق أو عدم قابلية الاشتقاق          |
| 34 | <b>بعض الصيغ للأسئلة التي يطلب فيها معادلة المماس</b>            |
| 34 | 1- إعطاء فاصلة نقطة التماس تصريحاً أو تلميحا                     |
| 35 | 2- إعطاء ترتيبية نقطة التماس تصريحاً أو تلميحا                   |
| 35 | 3- إعطاء معامل توجيه المماس تصريحاً أو تلميحا                    |
| 37 | 4- إعطاء نقطة من المماس ليست بالضرورة نقطة التماس                |
| 38 | الاشتقاقية و الاستمرارية                                         |
| 38 | اتجاه تغير دالة:                                                 |
| 38 | اشتقاق دالة مركبة مبرهنة ( دون برهان ):                          |
| 39 | عمليات على المشتقات                                              |
| 40 | الوضع النسبي لمنحنيين بيانيين :                                  |
| 40 | الوضع النسبي لمنحني بياني ومستقيم :                              |
| 41 | <b>نقط خاصة - محور التناظر</b>                                   |
| 41 | شفعية دالة                                                       |
| 41 | مركز التناظر                                                     |
| 42 | محور التناظر                                                     |
| 43 | نقط التقاطع مع حامي محور الاحداثيات                              |



|    |                                                                         |
|----|-------------------------------------------------------------------------|
| 43 | نقطة التعطف : تعريفها - وخواصها                                         |
| 43 | حالات طرحها اربعة : الحالة الاولى                                       |
| 44 | الحالة الثانية                                                          |
| 45 | الحالة الثالثة                                                          |
| 46 | الحالة الرابعة خاصة بشعبة الرياضيات                                     |
| 47 | رسم منحنى بياني انطلاقا من منحنى بياني آخر                              |
| 47 | الحالة من 1 الى 6                                                       |
| 48 | الحالة من 7 و 8                                                         |
| 49 | الحالة 9 و 10 وملاحظات                                                  |
| 50 | تعيين ثوابت مجهولة لدالة مع اعطاء شروط - أو بالمطابقة أو بالقسمة        |
| 50 | باستعمال القسمة الاقليدية أو المطابقة                                   |
| 50 | باستعمال معطيات نستخلص منها معادلات عددها مساوي لعدد المجاهيل على الأقل |
| 52 | المناقشة البيانية                                                       |
| 52 | التمييز بين انواع المناقشة الافقية - المائلة - الدورانية                |
| 52 | المناقشة الافقية                                                        |
| 52 | 1 - حلول المعادلة $f(x) = m$                                            |
| 54 | 2- حلول المعادلة $f(x) = h(m)$                                          |
| 55 | خواص القيمة المطلقة                                                     |
| 55 | الخواص و الترتيب                                                        |
| 55 | المتباينة المزدوجة والقيمة المطلقة                                      |
| 55 | المتباينة المزدوجة و الترتيب                                            |
| 57 | المناقشة المائلة                                                        |
| 57 | حلول المعادلة $f(x) = ax + m$                                           |
| 59 | حلول المعادلة $f(x) = ax + h(m)$                                        |
| 60 | المناقشة الدورانية                                                      |
| 60 | حلول المعادلة $f(x) = mx + b$                                           |
|    | حلول المعادلة $f(x) = g(m)x + h(m)$                                     |