أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الــــدوال

المستوي منسوب لمعلم متعامد ومتجانس ولتكن الدالة f المعرفة على $[0,+\infty[$ عبارتها: $f(x)=\sqrt{x}$ ولتكن الدالة ω المعرفة على $\mathbb{R}$ بحيث: $\omega(x)=x^2-1$ ولتكن الدالة T المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $T(x)=x^3-3x^2$.

• انطلاقا من المنحنى البياني للدالة f استنتج رسم منحنيات للدوال الآتية دون دراستها.

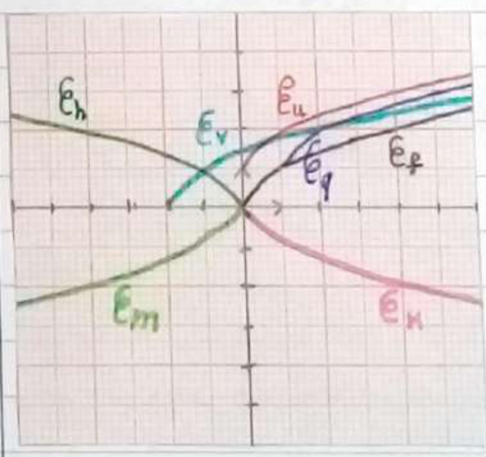
$q(x)=1+\sqrt{(x-1)}$	$v(x)=\sqrt{(x+2)}$	$u(x)=1+\sqrt{x}$
$m(x)=-\sqrt{(-x)}$	$K(x)=-\sqrt{x}$	$h(x)=\sqrt{(-x)}$

• انطلاقا من منحنى الدالة ω: أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$L(x)=|\omega(x)|$

• انطلاقا من منحنى الدالة T: أرسم منحنيات الدوال الآتية دون دراستها.

$g(x)=T(\lvert x\rvert)$	$L(x)=\lvert T(x)\rvert$
$u(x)=T(-\lvert x\rvert)$	$N(x)=\lvert T(\lvert x\rvert)\rvert$



الحالة 01: $u(x)=f(x)+1$

نستنتج $(\mathcal{C}_u)$ من $(\mathcal{C}_f)$ بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{-a}{-b}$ أي $\vec{v}\binom{0}{1}$.

الحالة 02: $v(x)=\sqrt{(x+2)}$

نستنتج $(\mathcal{C}_v)$ بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{-2}{0}$

الحالة 03: $q(x)=1+\sqrt{x-1}$

نستنتج $(\mathcal{C}_q)$ بالانسحاب ذي الشعاع $\vec{v}\binom{1}{1}$.

الحالة 04: $h(x)=\sqrt{(-x)}$

$h(x)=f(-x)$

نستنتج أن: $(\mathcal{C}_h)$ هو نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمحور التراتيب

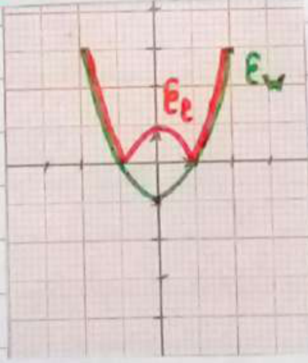
الحالة 05: $K(x)=-\sqrt{(x)}$

نستنتج أن: $\mathcal{C}_K$ هو نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 06: $m(x)=-\sqrt{(-x)}$

نستنتج أن: $\mathcal{C}_m$ هو نظير $(\mathcal{C}_f)$ بالنسبة لمبدأ المعلم.

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي



حالة: $L(x)=|w(x)|$

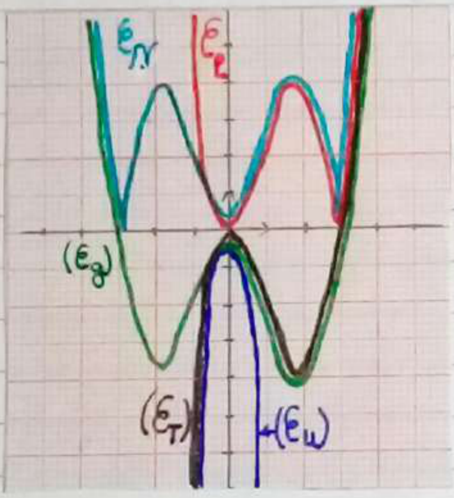
1- على المجالات التي يكون فيها $\omega(x)\geq 0$ أي يكون $\mathcal{C}_w$ على محور الفواصل أو فوقه.

نحصل على $L(x)=w(x)$ ومنه $(\mathcal{C}_L)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_w)$.

2- على المجالات التي يكون فيها $\omega(x)<0$ أي يكون $(\mathcal{C}_w)$ تحت محور الفواصل $L(x)=|w(x)|$

3- الدالة $L(x)$ لا تقبل الاشتقاق عند $x=1$ و $x=-1$ لأن الدالة تقبل نصف مماس.

•



الحالة 1: $g(x)=T(|x|)$

ملاحظة: غالبا يطلب إثبات أن الدالة زوجية أي: $f(-x)=f(x)$

1- إذا كان $x>0$ و $x\in D_T$ (الجزء الموجب من D_T) نحصل على: $g(x)=T(x)$ ومنه $(\mathcal{C}_g)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_T)$

2- نكمل الجزء المتبقي من $(\mathcal{C}_g)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن g زوجية.

الحالة 2: $u(x) = T(-|x|)$

1- إذا كان $x \leq 0$ و $x \in D_T$ (الجزء السالب من D_T) نحصل على: $u(x) = T(x)$ و منه $(\mathcal{C}_u)$ ينطبق على $(\mathcal{C}_T)$.

2- نكمل الجزء المتبقي من $(\mathcal{C}_u)$ بالتناظر بالنسبة إلى محور التراتيب لأن u زوجية.

الحالة 3: $L(x) = |T(x)|$

1- على المجالات التي تكون فيها $T(x) \geq 0$ أي يكون فيها $(\mathcal{C}_T)$ على محور الفواصل أو فوقه.
نحصل على: $L(x) = T(x)$

2- على المجالات التي تكون فيها $T(x) \leq 0$ يكون $(\mathcal{C}_L)$ متناظر لـ $(\mathcal{C}_T)$ بالنسبة لمحور الفواصل.

الحالة 4: $N(x) = |T(|x|)|$

1- $(\mathcal{C}_N)$ يقع فوق محور الفواصل لأن الدالة N قيمها $|T(|x|)|$ كلها موجبة لأن: $N(x) \geq 0$ أي منحناها البياني $(\mathcal{C}_N)$ يقع فوق محور الفواصل إلى الجزء السالب يناظر بالنسبة إلى $(x'x)$.

2- الدالة N زوجية $T(|x|)$ أي يكفي رسم الجزء من $[0,+\infty[$ والجزء الآخر يناظر بالنسبة لمحور التراتيب (yy').

طرق إزالة حالة عدم التعيين.

- بالإختزال.
- بالتحليل.
- بالمرافق.
- بالعدد المشتق.

f دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = x + \sqrt{9x^2-1}$ وتمثيلها البياني $(\mathcal{C}_f)$.

1. حدد نهايات عند $-\infty$ و $+\infty$.
2. أحسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]$
3. إستنتج أن $(\mathcal{C}_f)$ له مستقيمان مقاربان يطلب تعيين معادلتيهما.

ملاحظة: نكتب الدالة بدون رمز القيمة المطلقة لتسهيل العمل عليها

1- كتابة دون رمز القيمة المطلقة:

x	$-\infty$		$-1/3$		$1/3$		$+\infty$
$9x^2-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

القيمة المطلقة تتيح لنا كتابتين:

$$\begin{cases} f(x) = x+\sqrt{9x^2-1} & \text{لما } x \in]-\infty,-\frac{1}{3}] \cup [\frac{1}{3},+\infty[\\ f(x) = x+\sqrt{1-9x^2} & \text{لما } x \in [-\frac{1}{3},\frac{1}{3}] \end{cases}$$

النهايات:

▸ $\lim_{x\to-\infty}(x+\sqrt{9x^2-1}) =$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to-\infty}(x+|x|\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$$\begin{cases} x & : x \geq 0 \\ -x & : x \leq 0 \end{cases}$$

عند $-\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(x-x.\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to-\infty} x(1-\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to-\infty}(-\infty).(-2) = +\infty$

أي

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$$

▸ $\lim_{x\to+\infty}(x+\sqrt{9x^2-1}) =$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to+\infty} x(1+\sqrt{9-\frac{1}{x^2}})$

$\lim_{x\to+\infty}(+\infty)(4) = +\infty$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}$$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

2- حساب:

▸ $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]$

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-1}+x-4x) =$ ح.ع.ت

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2-1}-3x)$

ملاحظة: لما نجد $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{ax^2+\dots} \pm \alpha x+\beta)$ تحل بالمرافق.
إذا كان $|\alpha| = \sqrt{|a|}$
وإلا تحل بالتحليل.

$\sqrt{9} = |3| = -3$

تحل بالمرافق:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{(\sqrt{9x^2-1}-3x)(\sqrt{9x^2-1}+3x)}{(\sqrt{9x^2-1}+3x)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)} = \frac{-1}{x.6} = 0$$

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x] = 0}$$

▸ $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]$

ح.ع.ت= $\lim_{x\to-\infty}[\sqrt{9x^2-1}+3x]$

$\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x\left(\sqrt{9-\frac{1}{x^2}}+3\right)}=\frac{1}{x.6}=0$

$\boxed{\lim_{x\to-\infty}[f(x)-2x]=0}$

3- إستنتاج أن لـ C_f مستقيمان مقاربان مائلان:

$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$

1. بما أن: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-4x]=0$
أي: $(\Delta): y=4x$ م.م. مائل بجوار $+\infty$.

2. بما أن: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+2x]=0$
أي: $(\Delta'): y=-2x$ م.م. مائل بجوار $-\infty$.

③

1- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى C_f يعامد المستقيم ذو المعادلة $y=ax+b$.

نحل المعادلة:

$a.f'(x_0)=-1$

④

2- بين أنه يوجد مماس أو أكثر للمنحنى C_f يشمل النقطة ذات الإحداثيين (α,β).

نحل المعادلة

$\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$

لنعين قيمة أو قيم x_0.

⑤

لتكن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ وإشارتها:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

لتكن الدالة g المعرفة في كل حالة بـ D_g و عبارة مشتقتها

$D_g=\mathbb{R}$: $g'(x)=f(x^2)$ ✓

$D_g=]0,+\infty[$: $g'(x)=f(\ln x)$ ✓

$D_g=\mathbb{R}^*$: $g'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ ✓

عين إشارة $g'(x)$ ثم اعط تغيرات g في كل حالة.

الخطوات

1- جدول تغيرات البنت $u(x)=-x$

2- إستنتاج السوابق بالدالة البنت

الحالة 1: $g'(x)=f(x^2)$

$g=f\circ u \,/\, u(x)=x^2$

①

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
x^2	$+\infty$ ↘	1 ↘	0	↗ 1	↗ $+\infty$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	②	$+$	0	$-$	0	$+$	③

x	$-\infty$		-1	0	1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g:

متزايدة تماما على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

متناقصة تماما على $]-1,1[$

الحالة 2: $g'(x)=f(\ln x)$

$g=f\circ u \,/\, u(x)=\ln x$.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$	②	$+$	0	$-$	0	$+$	

①

x	0	e^{-1}	e^{1}	$+\infty$
$\ln(x)$	$-\infty$ ↗	-1 ↗	1 ↗	$+\infty$

x	0		e^{-1}		e^{1}		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة g:

متزايدة تماما على: $]0,e^{-1}]\cup[e,+\infty[$

و متناقصة تماما على: $[e^{-1},e^{1}]$

الحالة 3: $g'(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	0 ↘	-1 ↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$ ↘	1 ↘	0

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	

الدالة g:

متناقصة تماما على $]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$

و متزايدة تماما على $]-1,0[\cup]0,1[$

ملاحظة:

• معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay$ حلها $f(x)=Ce^{ax}$ حيث $C\in\mathbb{R}$ ثابت حقيقي.

• معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حلها $f(x)=Ce^{ax}-\frac{b}{a}$

6 -

أ) حل المعادلة التفاضلية:

$2y'+y=0$

ب) عين الحل الخاص f الذي يحقق

$f(\ln 4)=1$

-2

f هي الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ ب:

$f(x)=3.e^{-2x}-4$

جد معادلة تفاضلية من الشكل $y'=ay+b$ حيث تكون الدالة f حلا لهذه المعادلة.

-1

أ) حل المعادلة التفاضلية:

$f(x)=C.e^{-\frac{1}{2}x}$

ب) الحل الخاص:

لدينا $f(\ln 4)=1$

أي

$C.e^{-\frac{1}{2}\ln 4}=1$

$C.e^{\ln(4)^{-1/2}}=1$

$C.\frac{1}{\sqrt{4}}=1$

$\boxed{C=2}$

أي

$\boxed{f(x)=2.e^{-\frac{1}{2}x}}$

-2

إيجاد معادلة تفاضلية:

$f(x)=C.e^{ax}-\frac{b}{a}$

$f(x)=3.e^{-2x}-\left(\frac{-8}{-2}\right)$

بالمطابقة:

$C=3\ ;\ a=-2\ ;\ b=-8$

$\boxed{y'=-2y-8}$

التحقيق:

$f(x)=3.e^{-2x}-4$

$f'(x)=-6.e^{-2x}$

$-6.e^{-2x}=-2(3.e^{-2x}-4)-8$

$=-6.e^{-2x}+8-8$

$=-6.e^{-2x}$

العبارة:

$f(x)=3.e^{-2x}-4.$

حل للمعادلة

$y'=-2y-8.$

7

استنتج أنه يوجد تحويل نقطي بسيط يحول $\mathcal{E}_f$ إلى $\mathcal{E}_g$.

حيث $g(x)=f(-x)$

$\begin{cases} x'=x \\ y'=y \end{cases}$

$(\mathcal{E}_g)$ يناظر $(\mathcal{E}_g)$ بالنسبة إلى محور التراتيب.

8

M و N نقطتان من $(\mathcal{E}_f)$ ذواتا الفاصلتين x و $-x$ على الترتيب مع $x\in\mathbb{R}^*$

بين أن المستقيمين (MN) و (T) متوازيان.

$(T): y=-\frac{1}{6}x+\ln 2$

ولدينا:

$M\left(x\,;\ln(1+e^{x})-\frac{2}{3}x\right)$

$N\left(-x\,;\ln(1+e^{x})-\frac{1}{3}x\right)$

$\frac{y_M-y_N}{x_M-x_N}=\frac{-1/3\,x}{2x}=\frac{-1}{6}=f'(0)$

9

بين أن $f(x)=3$ تقبل حل وحيد α حيث $1{,}1<\alpha<1{,}2$

نحسب $f(1{,}1)$ و $f(1{,}2)$

نجد النتائج محصورة في 3.

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

المتتاليات

ضع تخمين حول إتجاه تغير U_n وتقاربها.

المتتالية (متناقصة/متزايدة) و تتقارب نحو فاصلة تقاطع (   ) حيث $x =$.

لدينا من أجل $n \in \mathbb{N}$:

$U_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot U_n + 1$

U_n معرفة بحدها الأول $U_0 = 2$

① أحسب U_1, U_2, U_3.

② (V_n) المتتالية العددية المعرفة من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ:

$V_n = U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n$

برهن بالتراجع أن (V_n) متتالية ثابتة.

البرهان بالتراجع:
تكون V_n ثابتة إذا كانت جميع حدودها متساوية أي: $U_{n+1} = U_n$

معناه نفس القيمة $V_{n+1} = V_0 = V_n$

$V_0 = U_0 + \left(\frac{2}{3}\right)^0 = 3$

$\begin{cases} V_0 = 3 \\ V_1 = 3 \end{cases}$

✓ من اجل $n=0$
$P(0)$ محققة

$V_1 = V_0$

✓ نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل n:

$V_n = 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي

$V_{n+1} = 3$

✓ لدينا $V_n = 3$

الفكرة تبدأ ب:

$V_{n+1} = U_{n+1} + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$V_{n+1} = \frac{2}{3} U_n + 1 + \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}$

$= \left(\frac{2}{3}\right)\left[U_n + \left(\frac{2}{3}\right)^n\right] + 1$

الهدف

$= \left(\frac{2}{3}\right) \cdot V_n + 1$

$= \frac{2}{3} \times 3 + 1$

أي

$\boxed{V_{n+1} = 3}$

ومنه:
$P(n+1)$ محققة أي:
V_n متتالية ثابتة.

الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$ ب $f(x) = \frac{2x^2}{x+4}$ و متزايدة تماما على مجال $[0,+\infty[$. (U_n) متتالية عددية معرفة ب $U_0 = 3$ ومن أجل $n \in \mathbb{N}$ لدينا $U_{n+1} = f(U_n)$

برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$: $0 \leq U_n \leq 3$

✓ من اجل $n=0$

$0 \leq 3 \leq 3$

محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n:

$0 \leq U_n \leq 3$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

العبارة صعبة إذن:

الخطة البديلة

✓ بما أن الدالة المرفقة f متزايدة تماما على $[0,3]$

$f(0) \leq f(U_n) \leq f(3)$

الهدف

$0 \leq U_{n+1} < \frac{18}{7} \leq 3$

ومنه

$\boxed{0 \leq U_{n+1} \leq 3}$

أي:
$P(n+1)$ محققة و
$0 \leq U_n \leq 3$

أثبت أنه من اجل كل $n \in \mathbb{N}$ $4^n + 2$ مضاعف للعدد 3.

✓ من أجل $n=0$

$4^0 + 2 = 3$

$P(0)$ محققة.

✓ نفرض أن $P(n)$ محققة من اجل n:

$4^n + 2 = 3K \Rightarrow 4^n = 3K - 2$

ونبرهن صحة: $P(n+1)$

أي $4^{n+1} + 2 = 3K$

الفكرة تبدأ ب:

$4^{n+1} + 2 = 4^n \cdot 4 + 2$

$= 4(3K - 2) + 2$

$= 12K - 8 + 2$

$= 12K - 6$

$= 3(4K - 2)$

$\boxed{4^{n+1} + 2 = 3K' \mid K' = 4K - 2}$

الهدف.

ومنه $P(n+1)$ محققة

أي $4^n + 2 = 3K$

لدراسة إتجاه تغير المتتالية (U_n):

① ندرس إشارة $U_{n+1}-U_n$.

② نقارن بين $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ و 1.

التقارب:

تقبل دون برهان

إذا كانت U_n متزايدة ومحدودة من الأعلى فإنها متقاربة.

إذا كان U_n متناقصة ومحدودة من الأسفل فهي متقاربة

لدينا: $0<U_n<3$ / $U_0=1$

ومن اجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$U_{n+1}=\sqrt{2U_n+3}$

1. أدرس إتجاه تغير المتتالية.
2. أحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

---

1. إتجاه التغير:

$U_{n+1}-U_n$

$\sqrt{2U_n+3}-U_n$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3}-U_n)(\sqrt{2U_n+3}+U_n)}{(\sqrt{2U_n+3}+U_n)}$$

$$\frac{(\sqrt{2U_n+3})^2-U_n^2}{\sqrt{2U_n+3}+U_n}$$

جذر موجب $0<U_n<3$

معناه

$\sqrt{2U_n+3}+U_n>0$

ومنه:

إشارة الفرق من إشارة البسط.

$-U_n^2+2U_n+3=0$

نضع $x=U_n$ (للتسهيل).

$-x^2+2x+3=0$

$$\begin{cases} x_1=3 \\ x_2=-1 \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
	$-$	0 $+$	0	$-$

$0<U_n<3$

من الجدول U_n متزايدة تماما على مجال $]0,3[$.

2- حساب

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell$

$\lim \sqrt{2U_n+3}=\lim U_n=\ell$

متقاربة نحو نهاية ℓ.

$\sqrt{2\ell+3}=\ell \rightarrow \ell\geq 0$

$2\ell+3=\ell^2$

$-\ell^2+2\ell+3=0$

حلين مع U_n متزايدة

$$\begin{cases} \ell_1=3 \ ✓ \\ \ell_2=-1 \ ✗ \end{cases}$$

لدينا: $U_{n+1}=3+\sqrt{U_n-3}$

برهن من أجل $n\in\mathbb{N}$:

$$U_{n+1}-U_n=\frac{-U_n^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}+U_n-3}$$

البرهان:

$U_{n+1}-U_n=3+\sqrt{U_n-3}-U_n$

$=\sqrt{U_n-3}-(U_n-3)$

الفكرة: نضرب في المرافق.

$$\frac{(\sqrt{U_n-3}-(U_n-3))(\sqrt{U_n-3}+(U_n-3))}{(\sqrt{U_n-3}+(U_n-3))}$$

$$\frac{-U_n^2+7U_n-12}{\sqrt{U_n-3}+(U_n-3)}$$

أحسب نهاية $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

مع العلم $3<U_n<4$

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1}=\lim\limits_{n\to+\infty} U_n=\ell.$

$3+\sqrt{\ell-3}=\ell$

$\sqrt{\ell-3}=\ell-3$

شرط ضروري: $\ell-3>0$

$\ell-3=(\ell-3)^2$

$-\ell^2+7\ell-12=0$

$$\begin{cases} \ell=3 \ ✗ \ \text{مرفوض} \\ \ell=4 \ ✓ \ \text{مقبول} \end{cases}$$

لدينا $f(U_n)=\frac{2U_n^2}{U_n+4}=U_{n+1}$

و $0\leq U_n\leq 3$

أ- أدرس إشارة العدد $7U_{n+1}-6U_n$

واستنتج أنه من اجل $n\in\mathbb{N}$

$0\leq U_{n+1}\leq \frac{6}{7}U_n$

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$

$0\leq U_n\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$

ج- أحسب نهاية المتتالية (U_n) عندما يؤول n إلى $+\infty$.

أ- دراسة الإشارة:

$$7U_{n+1}-6U_n=7\left(\frac{2U_n^2}{U_n+4}\right)-6U_n$$

$$=\frac{8U_n^2-24U_n}{U_n+4}$$

المقام: $0\leq U_n<3$

$4<U_n+4<7$

موجب على مجال $[0,3]$

البسط:

$U_n(8U_n-24)$

U_n	$-\infty$	0	3	$+\infty$
	$+$	0 $-$	0	$+$

$$U_n(8U_n-24)\leq 0$$

ومنه

$$7U_{n+1}-6U_n\leq 0$$

الإستنتاج:

لدينا:

$$7U_{n+1}-6U_n\leq 0$$

$$7U_{n+1}\leq 6U_n$$

$$U_{n+1}\leq \frac{6}{7}U_n$$

وأثبتنا سابقا أن

$$0\leq U_{n+1}\leq 3$$

ومنه،

$$0\leq U_{n+1}\leq \frac{6}{7}\cdot U_n$$

ب- **البرهان بالتراجع:**

✓ $P(0)$ محققة

$$0\leq 3\leq 3$$

✓ نفرض $P(n)$ محققة

$$0\leq U_n\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي:

$$0\leq U_{n+1}\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}$$

لدينا: $0\leq U_n\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$

$$0\leq \frac{6}{7}U_n\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^1$$

من سؤال السابق: $0\leq U_{n+1}\leq \frac{6}{7}\cdot U_n$

ومنه:

$$\boxed{0\leq U_{n+1}\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^{n+1}}$$

معناه

$P(n+1)$ محققة

إذن

$$0\leq U_n\leq 3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n.$$

ج- **حساب نهاية U_n:**

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\ell$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n\leq \lim_{n\to+\infty}3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n$$

$$\lim_{n\to+\infty}3\cdot\left(\frac{6}{7}\right)^n=0$$

قيمة البرهان 1: (صح) ↑، قيمة أصغر من 1 (0)

$$\lim_{n\to+\infty}U_n\leq 0$$

ومنه

حسب نظرية الحصر.

نجد

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=0}$$

لدينا: $\begin{cases}U_1=1\\ U_{n+1}=\sqrt{U_n+2}\end{cases}$

ولدينا:

$$0\leq U_n\leq 2$$

متتالية متزايدة ومحدودة من الأعلى $U_n\leq 2$.

• بين أن: $2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}$

• بين أن: $0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

ثم إستنتج: $\lim_{n\to+\infty}U_n=$.

1- البرهان: مهم.

$$2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}$$

• لدينا:

$$2-U_{n+1}=2-\sqrt{U_n+2}=\frac{(2-\sqrt{U_n+2})(2+\sqrt{U_n+2})}{2+\sqrt{U_n+2}}$$

إذن

$$\boxed{2-U_{n+1}=\frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}}\ ...(A)$$

• لدينا:

$$0\leq\sqrt{U_n+2}\leq 2$$

$$2\leq 2+\sqrt{U_n+2}\leq 4$$

$$\boxed{\frac{1}{4}\leq\frac{1}{2+\sqrt{U_n+2}}\leq\frac{1}{2}}\ ...1$$

ولدينا من جهة أخرى

$$0\leq U_n\leq 2$$

$$\boxed{0\leq 2-U_n\leq 2}\ ...2$$

الفكرة: نضرب 2 في 1

[redacted] Bac Rymo

www.facebook.com/bac.rymo

$$0\times\frac{1}{4}\leq\underbrace{\frac{2-U_n}{2+\sqrt{U_n+2}}}\leq\frac{2-U_n}{2}$$

من (A):

$$0\leq 2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}$$

أي

$$\boxed{2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}}$$

2- البرهان:

$$0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

الفكرة: البرهان بالتراجع:

• التحقق $P(1)$

$$0\leq 1\leq 1$$

محققة.

• نفرض أن $P(n)$ محققة:

$$0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

ونبرهن صحة $P(n+1)$

$$0\leq 2-U_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

لدينا $0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

نضرب في $\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$0\leq\frac{2-U_n}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

ولدينا:

من الجواب السابق: الفكرة.

$$2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}$$

ومنه

$$0\leq 2-U_{n+1}\leq\frac{2-U_n}{2}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

إذن

$$0\leq 2-U_{n+1}\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

معناه

$P(n+1)$ محققة

ومنه

$$\boxed{0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

• إستنتاج $\lim_{n\to+\infty}U_n$

لدينا:

$$0\leq 2-U_n\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$\lim_{n\to+\infty}0=0\qquad \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=0$$

ومنه: $\lim_{n\to+\infty}(2-U_n)=0$

أي

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n = 2}$$

لتكن (U_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ ب:

$U_{n+1}=\frac{4}{4-U_n}$ و $U_0=-1$

وتعتبر المتتالية (v_n) حسابية.

• عين حدها الأول وأساسها. $v_n=\frac{1}{U_n-2}$

• البرهان أن (v_n) متتالية حسابية:

الهدف: $v_{n+1}=v_n+r$

لدينا

$$v_n=\frac{1}{U_n-2}$$

$$v_{n+1}-v_n=\frac{1}{U_{n+1}-2}-\frac{1}{U_n-2}$$

$$=\frac{4-U_n}{2(U_n-2)}-\frac{1}{U_n-2}$$

$$=\frac{2-U_n}{2(U_n-2)}$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-2}{U_n-2}\right)$$

ومنه

$$\boxed{v_{n+1}-v_n=-\frac{1}{2}}$$

$$v_{n+1}=v_n-\frac{1}{2}$$

حدها الأول: $v_0=-\frac{1}{3}$

ومنه

$$\boxed{v_{n+1}=-\frac{1}{3}-\frac{n}{2}}$$

احسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty}\left(e^{\ln3-n\ln3}+3\right)$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n=\lim_{n\to+\infty} e^{\ln3-n\ln3}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\frac{e^{\ln3}}{e^{n\ln3}}+3$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{e^1}{e^n}\right)^{\ln3}+3$$

o

ومنه

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} U_n=3}$$

المتتالية الهندسية

المجاميع: $S=U_0+U_1+U_2+\dots+U_n$

$q\neq1:\ S=U_0\cdot\frac{q^{n-0+1}-1}{q-1}$

$q=1:\ S=(n-1).U_n$

أحسب نهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})^n-6}{(\frac{3}{8})(\frac{2}{7})^n-1}$$

إستنتج أن (U_n) متقاربة.

1. حساب النهاية:

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim\frac{(3/8)(2/7)^n-6}{(3/8)(2/7)^n-1}$$

بما أن: $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{7}\right)^n=0$

فإن

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty}U_n=6}$$

2. إستنتاج أن U_n متقاربة:

لأن نهايتها منتهية.

(U_n) متتالية هندسية غير منتهية حدودها موجبة تماما حيث:

$U_3=9U_1$ و $U_0=2$

① عين اساس المتتالية U_n.

② أحسب U_n بدلالة n.

③ احسب بدلالة n المجموع (S_n) حيث: $S=U_0+U_1+\dots+U_n$

① تعيين أساس U_n (هندسية):

$$U_n=U_p\cdot q^{n-p}$$

$$\begin{cases}U_1=U_0\cdot q^1\\U_3=U_0\cdot q^3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}U_1=2.q\ \dots(1)\\U_3=2.q^3\ \dots(2)\end{cases}$$

الفكرة

$$\begin{cases}U_1=2.q\\9U_1=2.q^3\end{cases}$$

ومنه

$$9(2q)=2q^3$$

أي

$$q^3=9$$

لها حلين

$$\begin{cases}q=3 & ✓\\q=-3 & ✗\ \text{مرفوض}\end{cases}$$

الحدود موجبة إذن الأساس موجب.

أي $\boxed{q=3}$

② حساب U_n: $U_n=2.3^n$

③ المجموع:

الحالة 01:

$$S=U_0+U_1+\dots+U_n$$

$$S=U_0\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

$$=2.\frac{3^{n+1}-1}{3-1}$$

أي

$$\boxed{S=3^{n+1}-1}$$

الحالة 02:

$$S'=U_0^2+U_1^2+U_2^2+\dots+U_n^2$$

الفكرة: ثابت.

$$(U_1)^2=(U_0\cdot q^1)^2$$
$$(U_2)^2=(U_0\cdot q^2)^2$$
$$(U_3)^2=(U_0\cdot q^3)^2$$
$$(U_4)^2=(U_0\cdot q^4)^2$$

$$S'=U_0^2+(U_0 q)^2+(U_0 q^2)^2+\dots+(U_0 q^n)^2$$

$$=U_0^2+U_0^2 q^2+U_0^2 q^4+\dots+U_0^2 q^{2n}$$

$$=U_0^2\left[1+q^2+q^4+\dots+q^{2n}\right]$$

متتالية حسابية جديدة.

$$S'=U_0^2\cdot\left[1\cdot\frac{(q^2)^{n-0+1}-1}{q^2-1}\right]$$

$$\boxed{S'=\frac{9^{n+1}-1}{2}}$$

الحالة 03:

$T_n = U_0 \cdot U_1 \cdot U_2 \cdots U_n$

$U_1 = U_0 \cdot q$

$U_2 = U_0 \cdot q^2$

$U_3 = U_0 \cdot q^3$

أي

$T_n = U_0 \cdot (U_0 \cdot q)(U_0 \cdot q^1) \cdots (U_0 \cdot q^n)$

$T_n = (U_0 \cdot U_0 \cdot U_0 \cdots U_0)(q \cdot q^2 \cdot q^3 \cdot q^4 \cdots q^n)$

فكرة: الفصل

$T_n = U_0^{n+1}(q^{1+2+3+\cdots+n})$

متتالية حسابية.

$T_n = 2^{n+1}(3^{\frac{n-1+1}{2}\cdot(1+n)})$

$\boxed{T_n = 2^{n+1}(3^{\frac{n}{2}\cdot(n+1)})}$

الحالة 04:

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \cdots + \frac{1}{U_n}$

$(U_1) = U_0 \cdot q^1$

$(U_2) = U_0 \cdot q^2$

$(U_3) = U_0 \cdot q^3$

أي

$S'' = \frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_0 \cdot q} + \cdots + \frac{1}{U_0 \cdot q^n}$

فكرة: $\frac{1}{U_0}$ عامل مشترك

$S'' = \frac{1}{U_0}\left[1 + \frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} + \cdots \frac{1}{q^n}\right]$

$S'' = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} \cdots + \frac{1}{3^n}\right)$

$S'' = \frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right)^1 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$

متتالية هندسية.

$S'' = \frac{1}{2}\left(\frac{(1/3)^{n+1} - 1}{(1/3) - 1}\right)$

$S'' = \frac{1}{2}\left(-\frac{3}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1\right)$

لدينا: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n - 1}{2} \end{cases}$

α عدد حقيقي غير معدوم.

من اجل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$V_n = U_n + \alpha$

عين قيمة العدد α التي يكون من اجلها (V_n) متتالية هندسية

لدينا: $v_n = U_n + \alpha$

ومنه: $\boxed{U_n = v_n - \alpha}$

ولدينا $v_{n+1} = v_n \cdot q$

إذن:

$v_{n+1} = U_{n+1} + \alpha$

$= \frac{U_n - 1}{2} + \alpha$

$= \frac{v_n - \alpha - 1}{2} + \alpha$

$\boxed{v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n - \frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \alpha}$

الهدف (متتالية)

$-\frac{\alpha}{2} - \frac{1}{2} + \alpha = 0$

ومنه

$\boxed{\alpha = 1}$

المتتاليتان (U_n) و (v_n) معرفتان من اجل $n \in \mathbb{N}^*$ ب:

$U_n = \frac{n-1}{n}$; $v_n = 1 + \frac{1}{n^2}$

أثبت أن المتتاليتان (U_n) و (v_n) متجاورتان ثم جد نهايتهما المشتركة.

اشارة U_n:

$U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n(n+1)} > 0$

اشارة v_n:

$v_{n+1} - v_n = \frac{-(2n+1)}{n^2(n+1)^2} < 0$

وبما أن:

$\lim_{n \to +\infty}(U_n - v_n) = 0$

والمتتاليتان إحداهما متزايدة والأخرى متناقصة فهما متجاورتان.

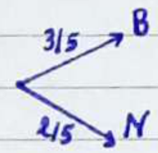
أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الاحتمالات

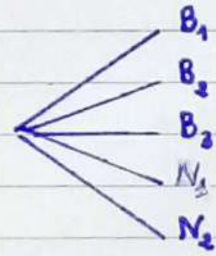
يحتوي كيس على 5 كريات (3 بيضاء و سوداوين) [لا نفرق بينها باللمس] نسحب كرية عشوائيا ونسجل لونها [B أبيض، N أسود].

$\Omega = \{B, N\}$

$P(B) = \frac{3}{5}$; $P(N) = \frac{2}{5}$



أو $\Omega = \{B_1, B_2, B_3, N_1, N_2\}$



صندوق 5 كريات مرقمة من 1 إلى 5. نسحب على التوالي 3 كريات بالإرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
نعيد التجربة دون إرجاع.
① ما هو عدد الحالات الممكنة؟
② ما هو إحتمال الحادثة "A". "الكرية الثانية المسحوبة تحمل الرقم 4".

عدد القوائم الممكنة دون إرجاع:
$5 \times 4 \times 3 = 60$

عدد القوائم الممكنة بالإرجاع:
$5 \times 5 \times 5 = 125$

إحتمال:
$P(A) = \frac{4 \times 3}{60} = \frac{1}{5}$

قاعدة:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

كيس A به أقلام: 6 زرقاء و 4 حمراء.
كيس B به أقلام: 9 زرقاء و 5 حمراء.
نسحب بطريقة عشوائية قلما من كل كيس
① عدد الحالات الممكنة Ω
② أحسب إحتمال كل حادثة من الحوادث التالية:
E: "الحصول على قلمين حمراوين"
F: "الحصول على قلم واحد أحمر"
G: "الحصول على الأقل على قلم أحمر".

عدد العناصر الممكنة:
$10 \times 14 = 140$

الإحتمالات:
إحتمال E:
$P(E) = \frac{4 \times 5}{140} = 0,14$

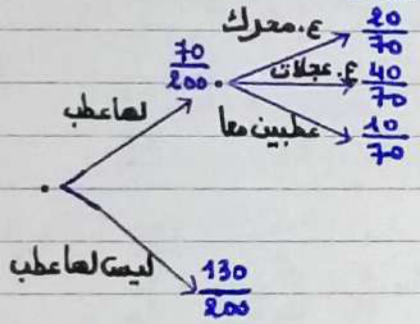
إحتمال F:
$P(F) = \frac{4 \times 9 + 5 \times 6}{140} = 0,47$

إحتمال G:
$P(G) = P(E) + P(F)$
$= 0,14 + 0,47$
$P(G) = 0,61$

في حظيرة للسيارات توجد 200 سيارة. 20 منها لها عطب في المحرك و 40 منها لها عطب في العجلات. و 10 منها فيها العطبين نختار عشوائيا سيارة من الحظيرة

A: هي الحادثة "سيارة فيها في محرك"
B: هي الحادثة "سيارة فيها عطب في العجلات"
① ما هو إحتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.
② ما هو إحتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب.

الرسم:



1. ما هو احتمال أن السيارة يوجد فيها على الأقل واحد من العطبين.

✓ من الرسم:
$= \frac{7}{20} \times \frac{2}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{4}{7} + \frac{7}{20} \times \frac{1}{7} = 0,35$

✓ من الحساب:
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
$P(A) = \frac{20}{200} = 0,1$
$P(B) = \frac{40}{200} = 0,2$
$P(A \cap B) = \frac{10}{200} = 0,05$
$P(A \cup B) = 0,1 + 0,2 - 0,05$

2. ما هو احتمال أن السيارة لا يوجد فيها أي عطب

✓ من الرسم: $= \frac{130}{200} = 0,65$

✓ من الحساب:
$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

يحتوي كيس على 3 كريات بيضاء، 4 كريات حمراء، و 10 كريات سوداء، لا نميز بينها باللمس.

- نسحب عشوائيا كرية من الصندوق فيربح الساحب:
- دينارا واحدا إذا كانت كرية سوداء.
- ثلاثة دنانير إذا كانت كرية حمراء.
- 10 دنانير إذا كانت كرية بيضاء.

نعرف المتغير العشوائي X الذي يأخذ قيمة الربح المحتمل في اللعبة.

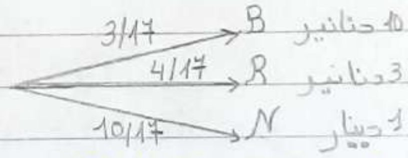
1- عين القيم الممكنة للمتغير X.

2- عين قانون الاحتمال للمتغير X.

3. أحسب الأمل الرياضياتي.

4- أحسب التباين ثم الانحراف المعياري للمتغير العشوائي.

الأمل الرياضياتي:
$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i . P_i$$
التباين:
$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
الانحراف المعياري:
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$



① قيم المتغير العشوائي x:

$\{1, 3, 10\}$

$1\ DA \rightarrow N$

$3\ DA \rightarrow R$

$10\ DA \rightarrow B$

② قانون الاحتمال للمتغير x:

$x = 1 \quad P(X=1) = \frac{10}{17}$

$x = 3 \quad P(X=3) = \frac{4}{17}$

$x = 10 \quad P(X=10) = \frac{3}{17}$

x_i	1	3	10
$P(x = x_i)$	$\frac{10}{17}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{3}{17}$

③ حساب الأمل الرياضياتي:
$$E(x) = \sum_{i=1}^{3} x_i . P_i$$
$$= 1\left(\frac{10}{17}\right) + 3\left(\frac{4}{17}\right) + 10\left(\frac{3}{17}\right)$$
$$\boxed{E(x) = 3,06}$$

④ حساب التباين:
$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + E(x))^2 . P_i$$
$$= \sum_{i=1}^{3} (x_i - E(x))^2 . P_i$$
$$= (1-3,06)^2 . \frac{10}{17} + (3-3,06)^2 . \frac{4}{17} + (10-3,06)^2 . \frac{3}{17}$$
$$\boxed{V(x) = \frac{3178}{289}}$$

⑤ حساب الانحراف المعياري:
$$\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$$
$$\sigma(x) = \sqrt{\frac{3178}{289}} = 3,32$$

يرمي لاعب زهري نرد رباعي الوجه $\{4, 3, 2, 1\}$

نعرف المتغير العشوائي X.

- مجموع الرقمين زوجيا ← يربح نفس مجموع الرقمين بالدينار.
- مجموع الرقمين فرديا ← يخسر نفس مجموع الرقمين بالدينار.

① عين قيم المتغير العشوائي X.

② عين قانون الاحتمال للمتغير.

① تعيين قيم المتغير X

الفكرة:

إنشاء جدول.

نرد2 \ نرد1	1	2	3	4
1	+2	-3	+4	-5
2	-3	+4	-5	+6
3	+4	-5	+6	-7
4	-5	+6	-7	+8

عدد الحالات الممكنة: 16 حالة.

قيم المتغير العشوائي.

$I = \{-7, -5, -3, +2, +4, +6, +8\}$

② تعيين قانون الاحتمال:

x_i	-7	-5	-3	+2	+4	+6	+8
$P(x = x_i)$	$\frac{2}{16}$	$\frac{4}{16}$	$\frac{2}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{16}$

زهرة نرد ذات أربعة أوجه $\{4, 3, 2, 1\}$ نرمز بالرمز P_i لاحتمال ظهور الوجه ذي الرقم i ، $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

- نعلم أن $P_2 = \frac{1}{5}$.
- الحدود P_4، P_3، P_2، P_1 تشكل حدود متتالية حسابية بهذا الترتيب.

① أحسب P_1، P_3، P_4.

② أحسب إحتمال ظهور رقم فردي.

① حساب الحدود: (متتالية حسابية)

$$U_2 = U_1 + r$$

$P_2 = P_1 + r \Rightarrow P_1 = P_2 - r$

$P_3 = P_2 + r$

$P_4 = P_3 + r \Rightarrow P_4 = P_2 + 2r$

الفكرة:

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = 1$$
$$\frac{1}{5} - r + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + r + \frac{1}{5} + 2r = 1$$
$$r = \frac{1}{10}$$

ومنه:

$P_1 = \frac{1}{10}$.

$P_2 = \frac{1}{5}$.

$P_3 = \frac{3}{10}$.

$P_4 = \frac{4}{10}$.

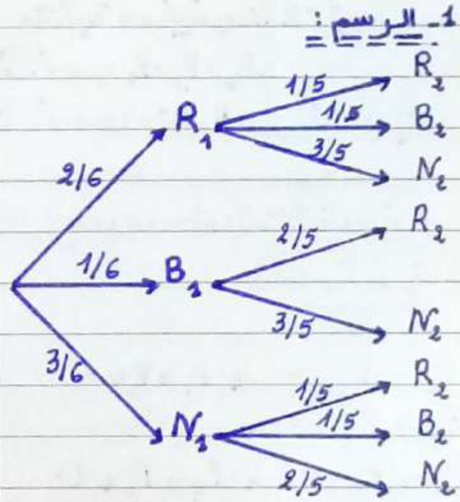
2- حساب إحتمال ظهور رقم فردي
لتكن A الحادثة.
"ظهور رقم فردي"

$P(A) = P_1 + P_3$
$= \frac{1}{10} + \frac{3}{10}$
$\boxed{P(A) = \frac{4}{10}}$

كيس يحتوي على كرتين حمراوتين و ثلاث كرات سوداء وكرة بيضاء نسحب عشوائيا كرتين على التوالي بدون إرجاع، و نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء المسحوبة.

① مثل النتائج بإستعمال
أ- شجرة الإحتمالات.
ب- جدول.
② عين قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X.

1- الرسم:



2- الجدول:

	R_1	R_2	B_1	N_1	N_2	N_3
R_1	X	0	0	1	1	1
R_2	0	X	0	1	1	1
B_1	0	0	X	1	1	1
N_1	1	1	1	X	2	2
N_2	1	1	1	2	X	2
N_3	1	1	1	2	2	X

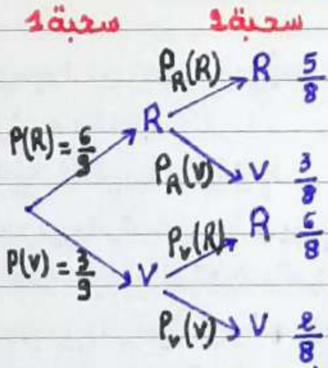
$x = \{0, 1, 2\}$

② تعيين قانون الإحتمال:
$x = \{0, 1, 2\}$
$P(x=0) = \frac{6}{30}$
$P(x=1) = \frac{18}{30}$
$P(x=2) = \frac{6}{30}$

x_i	0	1	2
$P(x=x_i)$	6/30	18/30	6/30

يحتوي صندوق على 5 كريات حمراء و 3 كريات خضراء. لا نميز بينها عند اللمس. نسحب كرتين على التوالي ودون إرجاع.
لتكن الحادثة A: "الكرة المسحوبة الأولى حمراء".
و الحادثة B: "الكرة المسحوبة الثانية خضراء".
أحسب $P(A)$، $P_A(B)$ ثم إستنتج $P(A \cap B)$

الرسم:



حساب:
$P(A) = P(R) = \frac{2}{3}$

حساب:
$P_A(B) = P_R(V) = \frac{3}{8}$

إستنتاج:
$P(A \cap B) = P_A(B) . P(A)$

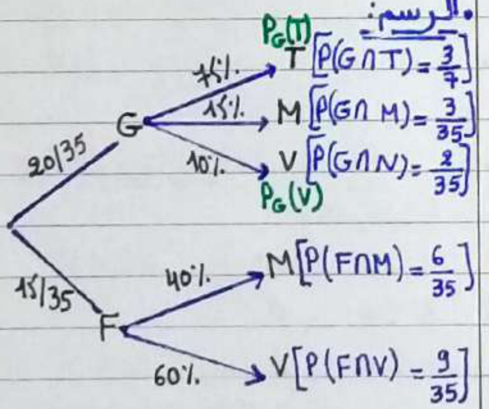
$P(R \cap V) = \frac{3}{8} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{4}$

الإحتمالات الشرطية

القانون:
$P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$
إحتمال B علما أن A محققة:
$P_A(B) = P(A|B)$

قسم فيه 35 تلميذ. منهم 15 بنت، يختار كل تلميذ نوع الرياضة.
الأولاد: 75% كرة قدم، 15% كرة يد، 10% كرة طائرة
البنات: 60% كرة يد، 40% كرة طائرة
الرموز:
G: "التلميذ المختار ولد".
F: "التلميذة المختارة بنت".
T: "تلميذ يمارس كرة القدم".
M: "تلميذ يمارس كرة اليد".
V: "تلميذ يمارس كرة الطائرة".
المطلوب:
• رسم الشجرة.
• أحسب احتمال $P(V)$ إحتمال أن تتحقق الحادثة V.
• أحسب الإحتمال الشرطي $P_V(G)$.
• أحسب إحتمال أن يكون التلميذ المختار لا يمارس كرة القدم.

• الرسم:



• إيجاد $P(V)$:
$P(V) = \frac{2}{35} + \frac{9}{35} = \frac{11}{35}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بإنضمامكم لي

• الاحتمال الشرطي:

$$P_V(G) = \frac{P(G\cap V)}{P(V)} = \frac{2/35}{11/35}$$

$$\boxed{P_V(G) = \frac{2}{11}}$$

•

$\overline{T}$ تلميذ لا يمارس كرة القدم:

$$P(\overline{T}) = 1 - P(T) = 1 - \frac{3}{7}$$

$$= \frac{4}{7}$$

ملاحظة:

ما إحتمال أن يكون التلميذ ضعيف في الفيزيا، أو في الرياضيات

$$P(M\cup F) = P(M) + P(F) - P(M\cap F)$$

أو

و

أفكار فيديوهات الأستاذ نور الدين

الأعداد المركبة

ليكن z و z' عددان مركبان حيث:
$z' = \frac{2-i}{1+i}$ و $z = \frac{2+i}{1-i}$

بين بدون حساب أن $\overline{z+z'}$ حقيقي و $\overline{z-z'}$ تخيلي صرف.

لدينا $\bar{z} = \frac{2-i}{1+i} = z'$

$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z'} = z' + \bar{z'} = 2Re(z')$

$\overline{z-z'} = \bar{z} - \bar{z'} = z' - \bar{z'} = 2i\,Im(z')$

حل في C المعادلة:

$z\bar{z} + z - \bar{z} - 5 - 2i = 0$

الفكرة:

نضع $\begin{cases} z = x+iy \\ \bar{z} = x-iy \end{cases}$

$(x+iy)(x-iy)+x+iy-x+iy-5-2i=0$

$\underbrace{x^2+y^2-5}_{Re}\ \underbrace{-2yi-2i}_{Im}=0$

$\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ -2y-2=0 \end{cases}$

$S=\{2+i\ ;\ -2+i\}$

نضع: $z' = \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2} + \frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}\, i$

• عين مجموعة النقط M حيث يكون z' حقيقي.

• عين مجموعة النقط M حيث يكون z' تخيلي صرف.

1. مجموعة النقط حتى يكون z' حقيقي:

يجب: $\frac{-2y}{(x-1)^2+y^2}=0$

ومنه $\begin{cases} -2y=0 \\ (x-1)^2+y^2\neq 0 \end{cases}$

أي $\begin{cases} y=0 \\ (1,0)\neq 0 \end{cases}$

مجموعة النقط هي المستقيم ذو المعادلة $y=0$ أي موازٍ لـ $(x'x)$ ماعدا $A(1,0)$

2. مجموعة النقط حتى يكون z' تخيلي

يجب: $\frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}=0$

ومنه $\begin{cases} x^2-y^2-1=0 \\ (x-1)^2+y\neq 0 \end{cases}$

الفكرة:

$x^2-y^2=1$

$(x-0)^2-(y-0)^2=1^2$

مجموعة النقط هي دائرة مركزها $O(0,0)$ ونصف قطرها $r=1$ بإستثناء $A(1,0)$

لدينا: $z_A=\sqrt{3}+i\ ;\ z_B=-\sqrt{3}-i$

$z_C=2i\ ;\ z_D=\sqrt{3}+3i$

• أحسب $|z_A|$ ، $|z_B|$ ، $|z_C|$

ماذا تستنتج ؟

الحساب:

$|z_A|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(1)^2}=2$

$|z_B|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+(-1)^2}=2$

$|z_C|=\sqrt{(0)^2+(2)^2}=2$

ومنه:

$|z_A|=|z_B|=|z_C|$

القاعدة

نستنتج أن النقط تنتمي إلى نفس الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها $r=2$.

عين مجموعة النقط M ذات اللاحقة z

أ- $|z+1+2i|=|z+4|$

ب- $|2z-i|=2$

ج- $|\bar{z}+i|=2$

أ- $|z-(-1-2i)|=|z-4|$

$|z-z_A|=|z-z_B|$

حيث: $\begin{cases} z_A=-1-2i \\ z_B=4 \end{cases}$

أي: $AM=BM$

مجموعة النقط M هي مستقيم محوري للقطعة $[AB]$.

ب- $|2z-i|=2$

$|2(z-\frac{1}{2}i)|=2$

$|2||z-\frac{1}{2}i|=2$

ومنه

$|z-\frac{1}{2}i|=1$

$|z-z_A|=1$

حيث $z_A=\frac{1}{2}i$

أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها A ونصف قطرها $r=1$ مع $A(0,\frac{1}{2})$

ج- $|\bar{z}+i|=2$

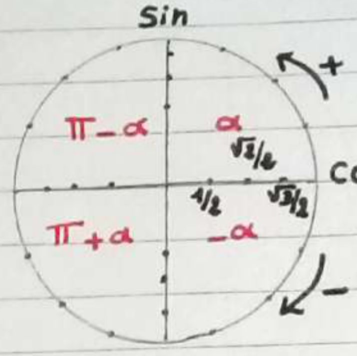
$|\overline{\bar{z}+i}|=\bar{2}$

$|\bar{\bar{z}}-\bar{i}|=2$

حيث: $z_B=i$

أي:

مجموعة النقط M هي دائرة مركزها B ونصف قطرها $r=2$ مع $B(0,1)$



مثل على الدائرة المثلثية النقط:

$\frac{1111\pi}{3}$; $\frac{-1111\pi}{2}$

① $\frac{1111\pi}{3}$

لدينا:

$1111 = 370(3) + 1$

معناه:

$(3(370)+1)\pi \div 3$

أي:

$\frac{3(370)\pi}{3} + \frac{\pi}{3}$

$\cancel{370}\pi + \frac{\pi}{3}$ الفكرة:

لأنه زوجي.

$\frac{180^\circ}{3} = 60^\circ$

$$\begin{cases} \cos \frac{1111\pi}{3} = \frac{1}{2} \\ \sin \frac{1111\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

② $\frac{-1111\pi}{2}$

لدينا:

$-1111 = -555(2) - 1$

معناه:

$-(-2(555)-1)\pi \div 2$

أي:

$\frac{-2(555)\pi}{2} - \frac{\pi}{2}$

$-555\pi - \frac{\pi}{2}$ الفكرة: نفكك

$(-556+1)\pi - \frac{\pi}{2}$

$-\cancel{556}\pi + \pi - \frac{\pi}{2}$

$\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

$$\begin{cases} \cos \frac{-1111\pi}{2} = 0 \\ \sin \frac{-1111\pi}{2} = 1 \end{cases}$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$

$-1 \leq \sin x \leq 1$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$-x$

$$\begin{cases} \cos(-x) = \cos x \\ \sin(-x) = -\sin x \end{cases}$$

$\pi + x$

$$\begin{cases} \cos(\pi+x) = -\cos x \\ \sin(\pi+x) = -\sin x \end{cases}$$

$\pi - x$

$$\begin{cases} \cos(\pi-x) = -\cos x \\ \sin(\pi+x) = \sin x \end{cases}$$

في مستوى $(O,\vec{OI},\vec{OJ})$ لدينا النقط:

$z_A = -i\sqrt{3}$; $z_B = 3+2i\sqrt{3}$

$z_C = -3+2i\sqrt{3}$

1. أعط تفسيرا هندسيا للطويلة و عمدة العدد المركب $\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}$.

2. ما طبيعة المثلث ABC.

1. التفسير الهندسي للطويلة

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = \frac{|z_B-z_A|}{|z_C-z_A|} = \frac{AB}{AC}$

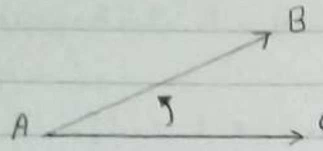
التفسير الهندسي للعمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \arg(z_B-z_A) - \arg(z_C-z_A)$

معناه:

الفكرة: $(\vec{AC},\vec{AB})$

الزاوية الموجهة (المقام ثم البسط)



$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = (\vec{OI},\vec{AB}) - (\vec{OI},\vec{AC}) = (\vec{AC},\vec{AB})$

2- طبيعة المثلث ABC:

حساب الطاويلة:

$\left|\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right| = 1 - \frac{AB}{AC}$

حساب العمدة:

$\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right) = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}$

ومنه:

المثلث ABC متقايس الأضلاع.

ما هي مجموعة النقط لعمدة:

$\arg(z-1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

.1 $\arg(z-1) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

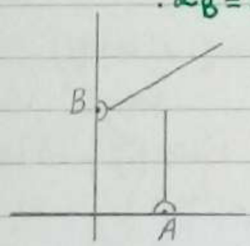
مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[AM)-\{A\}$ ويميل بدرجة 90°.

و $z_A = 1$.

.2 $\arg(z-2i) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi$

مجموعة النقط M هي نصف مستقيم $[BM)-\{B\}$ و يميل بدرجة 45°.

و $z_B = 2i$.



عين مجموعة النقط M من المستوي حيث:

$|z-1+i|=|z-1-i|$

---

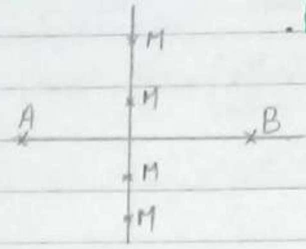
3. $|z-1+i|=|z-1-i|$

$|z-(1-i)|=|z-(1+i)|$

$|z-z_A|=|z-z_B|$

$AM=BM$

مجموعة النقط M هو محور القطعة $[AB]$.



عين طويلة وعمدة العدد المركب z:

$z=-3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$z=\sqrt5(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$

$z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$

---

1. $z=-3(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

الفكرة:

$-3=3(\cos\pi+i\sin\pi)$

ومنه

$z=3(\cos\pi+i\sin\pi)(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

$z=3(\cos(\pi+\frac{\pi}{3})+i\sin(\pi+\frac{\pi}{3}))$

$z=3(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3})$

---

2. $z=\sqrt5(\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$

فكرة 1: $1=-i^2$

نعوضها أمام $(\sin\frac{\pi}{6})$:

$z=\sqrt5(-i^2\sin\frac{\pi}{6}+i\cos\frac{\pi}{6})$

ومنه

$z=i\sqrt5(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))$

فكرة 2: $i=1(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$

ومنه:

$z=\sqrt5(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})(\cos(\frac{-\pi}{6})+i\sin(\frac{-\pi}{6}))$

$z=\sqrt5(\cos(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6})+i\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}))$

ومنه

$z=\sqrt5(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$

---

3. $z=\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$

$z=-i^2\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$

$z=(-i)(\cos(\frac{-\pi}{2})+i.\sin(\frac{-\pi}{2}))$

$-i=\cos(\frac{-\pi}{2})+i\sin(\frac{-\pi}{2})$

$z=\cos(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{6})+\sin(\frac{-\pi}{2}+\frac{\pi}{6})$

ومنه

$z=\cos(\frac{-\pi}{3})+i\sin(\frac{-\pi}{3})$

أعط الشكل الجبري:

$z=\frac{1}{\sqrt2}(\cos(\frac{1111\pi}{4})+i\sin(\frac{1111\pi}{4}))$

الفكرة: هي التبسيط.

$\frac{1111\pi}{4}=277\pi+\frac{3\pi}{4}$

$=\cancel{276}\pi+\pi+\frac{3\pi}{4}$

$=\frac{7\pi}{4}=315°$ (منتصف 4)

$\begin{cases}\cos\frac{\pi}{4}=+\frac{\sqrt2}{2}\\ \sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt2}{2}\end{cases}$

ومنه

$z=\frac{1}{\sqrt2}(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4})$

$=\frac{1}{\sqrt2}\cdot(\frac{\sqrt2}{2}-i\frac{\sqrt2}{2})$

إذن:

$z=\frac12-\frac12 i$

عين شكلا أسيا لكل من الأعداد المركبة التالية:

$z_1=-\sqrt2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$z_1=-\sqrt2\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

الفكرة هي: $e^{i\pi}$

$z_1=\sqrt2\cdot e^{i\pi}\cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}$

$=\sqrt2\cdot e^{i(\pi-\frac{\pi}{3})}$

$=\sqrt2\cdot e^{i(\frac{2\pi}{3})}$

لدينا: $z=z_0+Ke^{i\theta}$

حالة: لما يكون θ متغير

يمسح $\theta=[0,2\pi]$

$z=1+i+5.e^{i\theta}$

مجموعة النقط M هي دائرة

مركزها A، نصف قطرها $r=5$

حالة: لما يكون K متغير

يمسح $K\in\mathbb{R}_+^*$

$z=1+i+K.e^{i.\frac{\pi}{4}}$

مجموعة النقط M هو نصف مستقيم مبدؤه A وميله $\frac{\pi}{4}$

دستور موافر

من أجل $(e^{i\theta})^n=e^{in\theta}$

$(e^{i\theta})^n=(\cos\theta+i\sin\theta)^n$

من أجل $n\in\mathbb{Z}$ و $\theta\in\mathbb{R}$

$(e^{i\theta})^n=\cos n\theta+i\sin n\theta$

لدينا: $z=\sqrt2.(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

• عين قيم الصحيحة n في كل حالة:

أ- z^n حقيقيا.

ب- z^n تخيليا صرفا

أ- z^n حقيقي:

لدينا: $z=\sqrt2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

$z^n=(\sqrt2)^n.(\cos n.\frac{\pi}{4}+i.\sin n.\frac{\pi}{4})$

حتى يكون z^n حقيقيا يجب أن تكون

$\sin\frac{n\pi}{4}=0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4}=K\pi\ /\ K\in\mathbb{Z}$

ب- z^n تخيلي صرف:

$\cos\frac{n\pi}{4}=0$

الفكرة:

$\frac{n\pi}{4}=\frac{\pi}{2}+K\pi$

$\frac{n}{4}=\frac12+K$

$n=4K+2\ /\ K\in\mathbb{Z}$

[redacted] Bac Rymo
www.facebook.com/bac.rymo
سعيدة بانضمامكم لي

لدينا:

$$\begin{cases} Z=(3+\sqrt3)+i(-3+\sqrt3) \\ Z=2\sqrt6 . e^{-i\frac{\pi}{12}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} U=3+i\sqrt3 \\ U=2\sqrt3 . e^{i\frac{\pi}{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} v=1-i \\ v=\sqrt2 . e^{-i\frac{\pi}{4}} \end{cases}$$

- إستنتج $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

الإستنتاج

$$Z=2\sqrt6 . e^{-i\frac{\pi}{12}}$$
$$=2\sqrt6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right)$$

الفكرة: المطابقة بين

$$\begin{cases} Z=2\sqrt6\left(\cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)\right) \\ Z=(3+\sqrt3)+i(-3+\sqrt3) \end{cases}$$

نجد:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{3+\sqrt3}{2\sqrt6} \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\frac{-3+\sqrt3}{2\sqrt6} \end{cases}$$

ومنه:

$$\begin{cases} \cos\left(\frac{-\pi}{12}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) \\ \sin\left(\frac{-\pi}{12}\right)=-\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) \end{cases}$$

حل المعادلة:

$$Z^2-2(\cos\theta)Z+1=0$$

المعادلة

$$\Delta=[-2.\cos(\theta)]^2-4(1)(1)$$
$$=4.\cos^2\theta-4$$
$$=4(\cos^2\theta-1)$$

الفكرة: $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

$$=-4.\sin^2\theta$$
$$=4i^2.\sin^2\theta$$

الحلول:

$$Z_1=\cos\theta-i\sin\theta$$
$$Z_2=\cos\theta+i\sin\theta$$

لدينا: $P(Z)=Z^3-2Z^2-iZ+3-i$

بين أن المعادلة $P(Z)=0$ لها حل حقيقي.

الفكرة نضع α ثم نعزل Re و Im:

$$\alpha^3-2\alpha^2-i\alpha+3-i=0$$
$$\alpha^3-2\alpha^2+3+(-\alpha-1)i=0$$

$$\begin{cases} \alpha^3-2\alpha^2+3=0 \\ -\alpha-1=0 \end{cases}$$ و

ومنه: $\alpha=-1$

أي أن الحل حقيقي.

وهو جذر للمعادلة:

$$P(Z)=(Z+1)(aZ^2+bZ+c)$$

لدينا: $P(Z)=Z^3-iZ^2+3Z-3i$

بين أن المعادلة $P(Z)=0$ لها حل تخيلي صرف.

الفكرة نضع αi (حل تخيلي صرف)

$$(\alpha i)^3-i(\alpha i)^2+3(\alpha i)-3i=0$$
$$-\alpha^3 i+\alpha^2 i+3\alpha i-3i=0$$
$$i(-\alpha^3+\alpha^2+3\alpha-3)=0$$

مع $i\neq0$

الفكرة: مجموع المعاملات =0.

$$-1+1+3-3=0$$

إذن للمعادلة جذر وهو: "1".

ومنه نجد.

$$\alpha i=1.i$$
$$\alpha i=i$$

إذن i عدد تخيلي وهو جذر للمعادلة:

$$P(Z)=(Z-i)(aZ^2+bZ+c)$$

عين الجذرين التربيعين للأعداد المركبة التالية: $Z=-8+6i$

الفكرة: نضع

$$\begin{cases} Z=\omega^2. \\ \omega=x+iy. \end{cases}$$

$$-8+6i=\omega^2$$
$$=(x+iy)^2$$
$$-8+6i=\underbrace{x^2-y^2}_{Re}+\underbrace{2xyi}_{Im}$$

الفكرة: الطويلة.

$$\begin{cases} |-8+6i|=10 \\ x^2-y^2=-8 \\ 2x.y=6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+y^2=10 \quad .....(1) \\ x^2-y^2=-8 \quad .....(2) \\ 2x.y=6 \quad .....(3) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1=1 \\ x_2=-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=3 \\ y_2=-3 \end{cases}$$

ومنه

كل عدد مركب يقبل جذرين تربيعين متناظرين

$$\begin{cases} \omega_1=1+3i \quad (x_1+iy_1) \\ \omega_2=-1-3i \end{cases}$$

ليكن لدينا

$$P(Z)=Z^4-2\sqrt3Z^3+8.Z^2-8\sqrt2Z+16$$

مع $\overline{P(Z)}=P(\overline{Z})$

وتقبل الحلين: $P(\sqrt3+i)=P(-2i)=0$

. إستنتج الحلين الآخرين.

لدينا: $\overline{P(Z)}=P(\overline{Z})$

أي: $\overline{P(-2i)}=P(2i)$

$2i$ جذر لـ $P(Z)$.

ولدينا $\overline{P(\sqrt3+i)}=P(\sqrt3-i)$

$\sqrt3-i$ جذر لـ $P(Z)$.

ومنه:

$$S=\{2i;-2i;\sqrt3+i;\sqrt3-i\}$$

لدينا: $Z_A=-1+2i$; $Z_B=-4+3i$.

$$Z_C=3i \;;\; Z_D=4-3i$$

مع: $\frac{Z_C-Z_A}{Z_D-Z_B}=\frac{-i}{5}$; $\frac{Z_C-Z_B}{Z_D-Z_B}=\frac{-2}{3}i$

المثلثين: ACD قائم في A

BCD قائم في B

• بين أن النقط A، B، C، D تقع على دائرة يطلب تعيين مركزها ونصف قطرها.

• بما أن ACD قائم في A
فإن النقط A، D، C تنتمي إلى الدائرة (C) التي مركزها I منتصف القطعة [DC].

الفكرة ربط إستنتاج 1 بإستنتاج 2

لكن

لكي تنتمي B إلى الدائرة (C)
يكفي ان نبين $(IB = IA)$

$z_I = \frac{z_C + z_D}{2} = 2$

ومنه: $\begin{cases} IB = \sqrt{13} \\ IA = \sqrt{13} \end{cases}$

إذن B ينتمي إلى (C).
وعليه: A، B، C، D نقط تنتمي لنفس الدائرة.

A و B نقطتان متمايزتان.
1. لتكن النقطة K حيث أن:
$\vec{AK} = -\frac{8}{3}\vec{AB}$
أثبت أن K مرجح النقطتين A و B مرفقتين بمعاملين صحيحين يطلب تعيينهما.

لدينا $3\vec{AK} = -8\vec{KB}$

$-3\vec{KA} + 8\vec{KB} = \vec{0}$

$-3 + 8 \neq 0$

الجملة تقبل مرجح $\{(A,-3);(B,8)\}$

$\begin{cases} \alpha\vec{GA} + \beta\vec{GB} = \vec{0} \\ \vec{AG} = \frac{\beta}{\alpha+\beta}\vec{AB} \end{cases}$

$\alpha\vec{MA} + \beta\vec{MB} = (\alpha+\beta)\vec{MG}$

إحداثيات مرجح:

$z_G = \frac{\alpha . z_A + \beta . z_B + \gamma . z_C}{\alpha + \beta + \gamma}$

$\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$

المرجح ومجموعة النقط:

حالة 1:

$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \sqrt{5}$

$-2 + 1 - 3 = -4 \neq 0$

الجملة تقبل مرجح H

$\|-2\vec{MA} + \vec{MB} - 3\vec{MC}\| = \|-4\vec{MH}\|$

ومنه:

$\|-4\vec{MH}\| = \sqrt{5}$

$MH = \frac{\sqrt{5}}{4}$

دائرة مركزها H حيث:

$z_H = \frac{-2 . z_A + z_B - 3z_C}{-2 + 1 - 3}$

ونصف قطرها:

$r = \frac{\sqrt{5}}{4}$

حالة 2:

$\|\vec{MA} - \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MD} - \vec{ME}\|$

تقبل مرجح   لا تقبل مرجح

ومنه:

$\|\vec{MG}\| = \|-\vec{DM} - \vec{ME}\|$

$= \|-(\vec{DM} + \vec{ME})\|$

$= \|-\vec{DE}\|$

$MG = DE$

دائرة مركزها G ونصف قطرها $r = DE$.

حالة 3:

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

الفكرة نفكك وندرس كل جزء على حدى.

أول جزء:

$\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\|$

$1 - 2 + 1 = 0$

الجملة لا تقبل مرجح.

الفكرة:
برهان أن الشعاع $\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}$ مستقل على النقطة M.

$\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = \vec{MA} + 2\vec{BM} + \vec{MC}$

$= \vec{MA} + \vec{BM} + \vec{BM} + \vec{MC}$

$= \vec{BC} - \vec{AB}$

$= \vec{BC} + \vec{BA}$

$1 + 1 \neq 0$

الجملة تقبل مرجح.

ومنه $\|\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{BH}\|$

ثاني جزء:

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\|$

$1 - 4 + 1 \neq 0$

الجملة تقبل مرجح

$\|\vec{MA} - 4\vec{MB} + \vec{MC}\| = \|-2\vec{MG}\|$

إذن $\|-2\vec{MG}\| = \|2\vec{BH}\|$

$MG = BH$

دائرة مركزها G نصف قطرها BH

حالة 4:

$\|\vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC}\| = 2\|\vec{MA} + \vec{MC}\|$

$\|4\vec{MG}\| = 2\|2\vec{MH}\|$

$4MG = 4MH$

$MG = MH$

مستقيم محوري للقطعة [GH]

حالة 5:

$(\vec{MD} + \vec{MA} + 3\vec{MC}) . (\vec{MD} + \vec{MA} - 3\vec{MC}) = 0$

$(5\vec{MG})(-\vec{MH}) = 0$

$-5(\vec{MG} . \vec{MH}) = 0$

$-5 \neq$

دائرة قطرها [GH].

المناقشة

ناقش وجود النقطة G مرجح الجملة:
$\{(A; m^2+2); (B; m^2+m-3)\}$

من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ نضع:

$\Delta_n = |Z_{n+1} - Z_n|$

أحسب Δ_{n+1} بدلالة Δ_n.

$$\Delta_{n+1} = |Z_{n+2} - Z_{n+1}|$$
$$= \left|\frac{1}{2}(1+i).Z_{n+1} - \frac{1}{2}(1+i)Z_n\right|$$
$$= \left|\frac{1}{2}(1+i)\right| |Z_{n+1} - Z_n|$$

$$\boxed{\Delta_{n+1} = \frac{\sqrt{2}}{2}.\Delta_n}$$

بين أن المتتالية (Δ_n) هندسية يطلب إيجاد حدها الأول وأساسها.

لدينا المساواة:

$\Delta_{n+1} = \Delta_n . \frac{\sqrt{2}}{2}$

ومنها نستنتج:

أن (Δ_n) متتالية هندسية أساسها $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

وحدها الأول:

$\Delta_0 = |Z_1 - Z_0|$

$\boxed{\Delta_0 = 2\sqrt{2}}$

أحسب (Δ_n) بدلالة n

لدينا (Δ_n) متتالية هندسية

$$\Delta_n = \Delta_0 . r^n$$
$$= 2\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$$

إستنتج $n_0 \in \mathbb{N}$ بحيث لما $n \geq n_0$ يكون $\Delta_n < 10^{-2}$

$\Delta_n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}.(\sqrt{2})^n.\left(\frac{1}{2}\right)^n < 10^{-2}$

$2\sqrt{2}.\sqrt{2}^n.2^{-n} < 10^{-2}$

$2.2^{1/2}.2^{n/2}.2^{-n} < 10^{-2}$

$\overrightarrow{MA}^2 = \left(\sqrt{(x-0)^2+(y-2)^2}\right)^2$

$= x^2 + (y-1)^2$

$\overrightarrow{MB}^2 = \left(\sqrt{(x-\sqrt{3})^2+(y+1)^2}\right)^2$

$= (x-\sqrt{3})^2 + (y+1)^2$

ومنه

$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$

$2x\sqrt{3} - 4y - 4 = 0$

مستقيم.

(Z_n) متتالية الأعداد المركبة معرفة:

$$\begin{cases} Z_0 = 4 \\ Z_{n+1} = \frac{1}{2}(1+i).Z_n \end{cases}$$

أوجد طويلة وعمدة كل من:

Z_1, Z_2

---

① نحسب

$$\begin{cases} |Z_0| = 4 \\ \arg(Z_0) = 0 \end{cases}$$

نضع: $\alpha = \frac{1}{2}(1+i)$

$$\begin{cases} |\alpha| = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \arg(\alpha) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$Z_1 = \alpha . Z_0$

الطاويلة:

$$|Z_1| = |\alpha|.|Z_0|$$
$$= 4.\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\boxed{|Z_1| = 2\sqrt{2}}$$

العمدة:

$$\arg(Z_1) = \arg(\alpha . Z_0)$$
$$= \arg(\alpha) + \arg(Z_0)$$
$$= \frac{\pi}{4} + 0$$
$$\boxed{\arg(Z_1) = \frac{\pi}{4}}$$

ومنه:

$$\begin{cases} |Z_1| = 2\sqrt{2} \\ \arg(Z_1) = \frac{\pi}{4} \end{cases}$$

$$\begin{cases} |Z_2| = 2 \\ \arg(Z_2) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$m^2 + 2 + m^2 + m - 3 \neq 0$

$2m^2 + m - 1 \neq 0$

$m_1 \neq -1 \qquad m_2 \neq \frac{1}{2}$

حتى تقبل الجملة مرجح يجب:

$m \neq \frac{1}{2}$ و $m \neq -1$

أي

$$S = \mathbb{R} - \left\{-1, \frac{1}{2}\right\}$$

حالة 6:

$(-2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC})(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = 0$

$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BM} - \overrightarrow{MC}) = 0$

$(-\overrightarrow{MG})(-\overrightarrow{BC}) = 0$

$\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{BC} = 0$

مستقيم يشمل G ويعامد الشعاع $\overrightarrow{BC}$.

عبارتي لايبنتز

لدينا: $\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 4$

عين مجموعة النقط.

فكرة ①: تفكيك الجزء (1)

$\overrightarrow{MO}^2 + \overrightarrow{MA}^2 + 3\overrightarrow{MC}^2 = 5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2$

فكرة (2):

$5\overrightarrow{MG}^2 + \overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2 = 4$

$5\overrightarrow{MG}^2 = 4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)$

$\overrightarrow{MG}^2 = \frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}$

ندخل الجذر:

$\overrightarrow{MG} = \sqrt{\frac{4 - (\overrightarrow{GO}^2 + \overrightarrow{GA}^2 + 3\overrightarrow{GC}^2)}{5}} > 0$

$\overrightarrow{MG} = K$

دائرة مركزها G و $r = K$.

$\overrightarrow{MA}^2 - \overrightarrow{MB}^2 = 1$

$1 - 1 = 0$

الجملة لا تقبل مرجح نستعمل طريقة حساب الأطوال.

$$\begin{cases} Z_1 = i \\ Z_2 = -\sqrt{3} - i \\ Z_3 = -\sqrt{3} + i \end{cases}$$

الفكرة ⬅

$2^{1-n} \cdot 2^{\frac{1+n}{2}} < 10^{-2}$

$2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < 10^{-2}$

$\ln 2^{-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}} < \ln 10^{-2}$

$\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2}\right)\ln 2 < -2\ln 10$

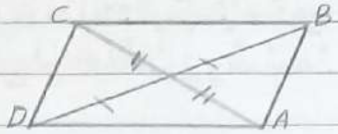
$-\frac{1}{2}n+\frac{3}{2} < -2\cdot\frac{\ln 10}{\ln 2}$

$-\frac{1}{2}n < -8,15$

ومنه: $n > 17$

الأعداد المركبة وطبيعة الرباعي:

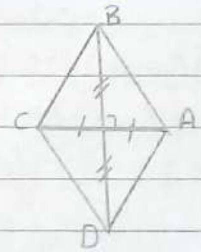
متوازي الأضلاع:



الأقطار متناصفة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

المعين:

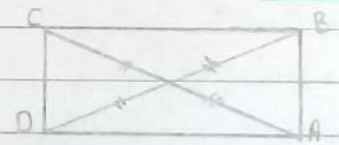


الأقطار متناصفة ومتعامدة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$(AC) \perp (BD)$

المستطيل:

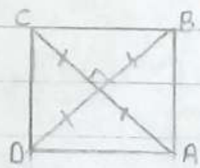


الأقطار متناصفة ومتقايسة

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

المربع:



الأقطار متناصفة ومتقايسة و متعامدة:

$\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{z_B+z_D}{2}$

$|z_C - z_A| = |z_D - z_B|$

$(AC) \perp (BD)$

شبه المنحرف:

يجب إثبات: $(CB) \parallel (DA)$

النسبة و مجموعة النقط:

حالة 1:

حقيقي $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*$

مجموعة النقط مستقيم (AB) باستثناء النقطة B أي $(AB) - \{B\}$

حالة 2:

حقيقي موجب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*_+$

مجموعة النقط مستقيم (AB) باستثناء القطعة $[AB]$ أي $(AB) - [AB]$.

حالة 3:

حقيقي سالب $\frac{z_A - z}{z_B - z} \in \mathbb{R}^*_-$

مجموعة النقط القطعة المفتوحة $]AB[$

الحالة 4:

تخيلي صرف $\in \frac{z_A - z}{z_B - z}$

مجموعة النقط دائرة التي قطرها $[AB]$ باستثناء النقطة B.

الحالة 5:

تخيلي صرف موجب $\in \frac{z_A - z}{z_B - z}$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة التي قطرها $]AB[$ في الاتجاه المباشر (العلوي) $(+)$

الحالة 6:

تخيلي صرف سالب $\in \frac{z_A - z}{z_B - z}$

مجموعة النقط هي نصف الدائرة قطرها $]AB[$ في الاتجاه السفلي $(-)$

التحويلات النقطية:

الإنسحاب:

الشرط $a = 1$

شعاعه b

مثال: $z' = z + 1 - 2i$

$$\begin{cases} \text{الشعاع } \vec{u}\binom{1}{-2} \\ \text{أو } z_{\vec{u}} = 1 - 2i \end{cases}$$

التحاكي:

الشرط $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

مركزه $z_\omega = \frac{b}{1-a}$

ونسبته $k = a$

مثال: $z' = 3z - 5i$

$$\begin{cases} \text{المركز } z_\omega = \frac{-5}{2}i \\ \text{نسبته } k = 3 \end{cases}$$

الدوران:

الشرط: $|a| = 1$ و $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \text{زاويته } \arg(a) \\ \text{مركزه } z_\omega = \frac{b}{1-a} \end{cases}$$

مثال:

$z' = iz + 1 - i$

$$\begin{cases} |a| = |i| = 1 \\ z_\omega = \frac{b}{1-a} = 1 \\ \arg(i) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

التشابه:

الشرط: $|a| \neq 1$ و $a \in \mathbb{C}$

$$\begin{cases} \text{نسبته } k = |a| \\ \text{زاويته } \arg(a) \\ \text{مركزه } z_\omega = \frac{b}{1-a} \end{cases}$$

مثال:

$z'=(1+i)z+i$

$$\begin{cases} |a| = |1+i| = \sqrt{2} \neq 1 \\ K = |a| = \sqrt{2} & \text{نسبته} \\ \arg(a) = \frac{\pi}{4} & \text{زاويته} \end{cases}$$

نعتبر التشابه المستوى المباشر S الذي يرفق بالنقطة A ذات اللاحقة $1+2i$، النقطة A' ذات اللاحقة $-4+2i$ وبالنقطة B ذات اللاحقة $\sqrt{3}+i$ النقطة B' ذات اللاحقة $-2+2i\sqrt{3}$.

1. عرف عبارة التشابه في المستوى المركب معينا عناصره المميزة.
2. عين عبارة التشابه باستعمال الشكل الأسي.
3. أكتب العبارة التحليلية لهذا التشابه.

1. عبارة التشابه:

$z' = az+b$

التعيين:

$$\begin{cases} z_{A'} = a z_A + b \\ z_{B'} = a . z_B + b \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4+2i = a(1+2i)+b \\ -2+2i\sqrt{3} = a(\sqrt{3}+i)+b \end{cases}$$

بالطرح نجد (بالحساب)

$a = 2i$

ثم نعوض

$-4+2i = (2i)(1+2i)+b$

$b = -4+2i-2i+4$

$b = 0$

إذن العبارة هي:

$z' = 2iz$

عناصرها المميزة:

$$\begin{cases} |a| = |2i| = 2 & \text{نسبته} \\ \theta = \arg(2i) = \frac{\pi}{2} & \text{زاويته} \\ z_\omega = 0 & \text{مركزه } O \end{cases}$$

2. الشكل الأسي:

$z' = 2iz$

$z' = 2 . e^{i\frac{\pi}{2}} . z$

3. العبارة التحليلية:

$z' = 2iz$

$x'+iy' = 2i(x+iy)$

$x'+iy' = 2ix - 2y$

$$\begin{cases} x' = -2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

نعتبر التحويل النقطي S الذي يرفق بالنقطة $M(x,y)$ النقطة $M'(x',y')$ بحيث:

$x' = x+y+1$

$y' = -x+y+1$

أدرس طبيعة التحويل S.

لدينا: $z' = az+b$

$$\begin{cases} x' = x+y+1 \\ y' = -x+y+1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z' = x'+iy' \\ z = x+iy \end{cases}$$

$z' = [x+y+1]+i[-x+y+1]$

$= x+y+1-xi+yi+i$

$= z+y+1-xi+i$

$= z-i^2y+1-xi+i$

$= z-i(x+iy)+1+i$

$= z-iz+1+i$

$$\begin{cases} z' = (1-i)z+1+i \\ z' = az+b \end{cases}$$

بالمطابقة:

$$\begin{cases} a = 1-i \\ b = 1+i \end{cases}$$

العبارة المركبة لتحويل نقطي:

$z' - z_\omega = K.e^{i\theta}(z - z_\omega)$

لدينا العبارة: لـ(S) التشابه المباشر

$z' = (i+1)z+2-i$

عين صورة بالتشابه (S) لـ الدائرة (C) ذات المركز $\Omega(2,2)$ ونصف القطر 3.

لإيجاد صورة دائرة بتحويل نقطي:

مركزها هو صورة المركز الأول بالتحويل (S)

$z_{\Omega'} = (1+i).z_\Omega + 2 - i$

$= (1+i)(2+2i)+2-i$

$= 2+3i$

ومنه $\Omega'(2,3)$

و نصف قطرها:

$\boxed{r' = K.r}$

$r' = \sqrt{2}.3$

$r' = 4,24$