# الطريق الى البكالوريا

عدد التمارين : 64

الشعب : علوم تجريبية - رياضيات - تقني رياضي

**الأستاذ مرنيز وليد**

**The essence of math is**

**not to make simple things complicated,**

but to make complicated things simple.

**اخر تحديث :** 14 مارس 2021

السنة الدراسية

2021 - 2020

# المحتويات

I بطاقة تعريفية للإحتمالات 2

II تمارين تدريبية 4

III مواضيع بكالوريات جزائرية 14

1 شعبة علوم تجريبية 15

2 شعبة تسيير و اقتصاد 17

3 شعبة تقني رياضي 19

4 شعبة رياضيات 22

IV مواضيع بكالوريات أجنبية 25

V مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس اشبال الامة 29

5 شعبة علوم تجريبية 30

6 شعبة رياضيات 34

VI تمارين مقترحة للتعمق 37

...

# القسم I

# بطاقة تعريفية للإحتمالات

# عموميات

$A$ و $B$ حادثتان كيفيتان اذن :

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(\emptyset) = 0$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ ، ( $\overline{A}$ الحادثة العكسية للحادثة $A$ )
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A$ و $B$ حادثتان غير متلائمتان اذن :

- $P(A \cap B) = 0$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

**في حالة تساوي الاحتمالات**

$$P(A) = \frac{Card(A)}{Card(\Omega)} = \frac{\text{عدد عناصر } A}{\text{عدد عناصر } \Omega} = \frac{\text{عدد الحالات الملائمة}}{\text{عدد الحالات الممكنة}}$$

# انواع السحب

عدد الطرق لسحب $p$ كرة من كيس يحتوي على $n$ كرة

| على التوالي و بارجاع | قائمة | $n^p$ |
|---|---|---|
| على التوالي دون ارجاع | ترتيبة | $A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$ |
| في آن واحد | توفيقة | $C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$ |

## ملاحظات

- اذا كان السحب على التوالي فيجب اخذ الحيطة و الحذر من **معامل الترتيب**
- معامل الترتيب يحسب بالطريقة التالية :

$$A_{n_1}^{p_1} \times A_{n_2}^{p_2} \times \cdots \times A_{n_k}^{p_k} \times \alpha$$

حيث :

$$\alpha = \frac{(p_1 + p_2 + \cdots + p_k)!}{p_1! \times p_2! \times \cdots p_k!}$$

# الاحتمال الشرطي لـ $B$ علما ان $A$ محققة

$P_A(B)$ تقرأ " احتمال $B$ علما ان $A$ محققة " معرفة بـ :

- $P_A(B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

اذا كان الحادثتان $A$ و $B$ مستقلتان فان :

- $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

يجب قراءة نص السؤال جيدا وان لا نخلط بين $P_A(B)$ و $P(A \cap B)$.

**طريقة :**
نستعين بالعبارات "علما ان" ، "اذا كان $B$، احتمال $A$"...

# دستور الاحتمالات الكلية

- لتكن $B_1$ ، $B2$ ، $\cdots$ ، $B_n$ تشكل تجزئة للمجموعة $\Omega$ ، لدينا من اجل كل حادثة $A$ :

$$P(A) = P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n)$$

# المتغير العشوائي

| | |
|---|---|
| **الامل الرياضياتي** | $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i$ |
| **التباين** | $V(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i (x_i - E(X))^2$ <br> $= \sum_{i=1}^{n} (p_i x_i^2) - (E(X))^2$ |
| **الانحراف المعياري** | $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$ |

**حالة خاصة :**
اذا كان $E(X)$ يمثل الربح المتوسط الذي يامله اللاعب بعد تكرار اللعبة مرات كثيرة فان :

- $E(X) = 0$ اللعبة عادلة
- $E(X) > 0$ اللعبة مربحة
- $E(X) < 0$ اللعبة ليست في صالح اللاعب

# التوفيقات و دستور ثنائي الحد

من اجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ومن اجل كل $p \in \mathbb{N}$ ، $0 \leq p \leq n$

- $0! = 1 \, ; n! = 1 \times 2 \times 3 \times n$
- $C_n^p = C_n^{n-p}$
- $C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$

...

# القسم II

# تمارين تدريبية

# رموز مفتاحية

تمارين للتدرب في المنزل
تمارين للتدرب تتضمن افكار اساسية
درس حذف هذه السنة استثناءا
فكرة تستحق المحاولة
تمارين للتعمق

## تمرين رقم 1:

ماهو عدد الطرق الممكنة لترتيب الحروف : $a,b,c,d,e$

## تمرين رقم 2:

قسم دراسي يتكون من 42 تلميذا، يراد تشكيل لجنة مؤلفة من 3 تلاميذ من هذا القسم.
بكم طريقة يتم تشكيل هذه اللجنة؟

## تمرين رقم 3:

نريد ترتيب 8 اشخاص حول طاولة مستديرة.
بكم طريقة مختلفة يمكن تحديد وضعية كل شخص؟

## تمرين رقم 4:

ما عدد الاعداد ذات 3 ارقام مختلفة مثنى مثنى و التي يمكن تشكيلها باستعمال الارقام 2 ، 3 ، 5 ، 6 ، 7 ، 9
من بين هذه الاعداد. ما عدد الاعداد

- الزوجية؟
- مضاعفات 5 ؟
- الاصغر من 500؟

## تمرين رقم 5:

احسب مايلي:

- $\frac{9!}{6!}$
- $\frac{13!-12!}{12!}$
- $\frac{11!}{9!\times 2!}$
- $\frac{4}{12!}-\frac{4}{11!}+\frac{4}{10!}$

## تمرين رقم 6:

$n$ عدد طبيعي غير معدوم. بسط العبارات التالية :

- $\frac{n!}{(n+1)!}$
- $\frac{(2n+1)!}{(2n-1)!}$
- $\frac{1}{(n-1)!}-\frac{1}{(n+1)!}$
- $\frac{n!}{n}-(n-1)!$

## تمرين رقم 7:

اوجد العدد الطبيعي $n$ في كل حالة من الحالات التالية :

**1)** $C_n^3=56$

**2)** $C_n^3+C_n^2=8n$

**3)** $9C_n^2=2C_{2n}^2$

## تمرين رقم 8:

$n$ و $m$ عددان طبيعيان حيث $n\geq 2$ و $n-2\geq m$. اثبت صحة المساواة التالية :

- $C_{2n}^m=2C_{2n-1}^{n-1}$

- $C_n^m = C_{n-2}^{m-2} + 2C_{n-2}^{m-1} + C_{n-2}^m$

## تمرين رقم 9:

كيس به 12 كرية متجانسة، لا نفرق بينها باللمس، منها: 5 خضراء، 4بيضاء، 3 حمراء.
نسحب في آن واحد 3 كريات من هذا الكيس.

1) ماهو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب؟

2) ماهو عدد الحالات الممكنة لهذا السحب في الحالات التالية:

ا) الكريات من الوان مختلفة.

ب) الكريات من نفس اللون.

ج) على الاقل كرية بيضاء

د) على الاكثر كرية خضراء

## تمرين رقم 10:

نرمي قطعة نقدية متوازنة مرتين. (نرمز بـ $F$ الى الوجه و بـ $P$ الى الظهر )

1) عين $\Omega$ مجموعة الامكانيات لهذه التجربة.

2) اوجد احتمال كل حادثة من الاحداث التالية:
$A$ "ظهور الوجه مرة واحدة فقط"
$B$ "ظهور الوجه مرتين"
$C$ "ظهور الوجه مرة واحدة على الاكثر"

## تمرين رقم 11:

يحتوي صندوق على 32 كرة لا نفرق بينها باللمس.
نسحب من الصندوق 8 كرات عشوائيا. احسب عدد الحالات الممكنة للسحب.

## تمرين رقم 12:

صندوق به 15 كرية 6 سوداء و 5 حمراء و 4 صفراء. نسحب عشوائيا 3 كريات في آن واحد.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة

2) ما هو احتمال الحصول على كرتين سوداء وكرة صفراء

3) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات من نفس اللون.

4) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مختلفة في اللون

5) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل

6) ماهو احتمال الحصول على كرتين صفراء على الاكثر.

7) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات حمراء

8) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات منهم واحدة سوداء فقط.

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات السوداء.

1) حدد القيم التي ياخذها $X$

2) حدد قانون الاحتمال

3) احسب الامل الرياضي

4) احسب التباين

5) احسب الانحراف المعياري.

## تمرين رقم 13:

كيس به 9 كريات 3 سوداء و 4 حمراء و 2 خضراء. نسحب من الكيس عشوائيا 3 كريات على التوالي وبدون ارجاع الكرية المسحوبة

1) ماهو عدد السحبات الممكنة

2) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات تحمل لون احمر

3) ماهو احتمال الحصول على كريتين سوداء و كرة خضراء

4) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات الحمراء

1) حدد القيم التي ياخذها $X$

2) حدد قانون الاحتمال

3) احسب الامل الرياضي

4) احسب التباين.

5) احسب الانحراف المعياري

## تمرين رقم 14:

©

صندوق به 8 كريات 2 بيضاء و 3 حمراء و 3 سوداء. نسحب عشوائيا 3 كريات على التوالي وبارجاع الكرية المسحوبة الى الكيس

1) ماهو عدد السحبات الممكنة
2) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات من نفس اللون.
3) ماهو احتمال الحصول على كرة بيضاء وكرتين سوداء
4) ماهو احتمال الحصول على كرة سوداء واحدة على الاقل.

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات البيضاء.

1) حدد القيم التي ياخذها $X$
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي
4) احسب التباين
5) احسب الانحراف المعياري

## تمرين رقم 15:

©

في ثانوية ما نجح 40% من التلاميذ في امتحان الرياضيات، 25% من التلاميذ في امتحان الفيزياء، 15% في امتحان الرياضيات و الفيزياء. نختار عشوائيا تلميذ و نفرض ان جميع الاختيارات متساوية الاحتمال.

1) ما هو احتمال ان لا يكون التلميذ المختار ناجح في امتحان الرياضيات
2) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار ناجح في الرياضيات او في الفيزياء
3) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار ناجح في الفيزياء و غير ناجح في الرياضيات.
4) ما هو احتمال ان يكون التلميذ المختار غير ناجح في الرياضيات و غير ناجح في الفيزياء
5) اذا اخترنا التلميذ الناجح في الرياضيات فما هو احتمال ان يكون ناجح في الفيزياء ✖

## تمرين رقم 16:

©

قسم تربوي مكون من40 تلميذا منهم 25 بنتا و15 ولدا. نريد تشكيل لجنة مكونة من ثلاث تلاميذ.

1) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها

2) اذا كانت اللجنة مكونة من رئيس القسم و نائب الرئيس و النائب العام.

ا) ما هو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها اذا كان رئيس القسم ولدا و النائب العام بنتا.

ب) ماهو عدد اللجان التي يمكن تشكيلها اذا كان نائب الرئيس بنتا

## تمرين رقم 17:

يحتوي صندوق على 10 كريات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها خمس بيضاء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 ، 3 ، 1 و ثلاث حمراء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 وكريتان سوداء تحمل الرقمين 1 ، 1 . نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كرات من هذا الصندوق.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة.

2) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء فقط

3) ما هو احتمال الحصول على 3 كرات تحمل الرقم 2

4) ما هو احتمال الحصول على كريتين تحملان الرقم 1

5) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مجموع ارقامها يساوي 7

6) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات مجموع ارقامها اكبر تماما من 7

7) ماهو احتمال الحصول على 3 كرات جداءها اقل تماما من 6

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات التي تحمل الرقم 2

1) حدد القيم التي ياخذها $X$

2) حدد قانون الاحتمال

3) احسب الامل الرياضي

4) احسب التباين

5) احسب الانحراف المعياري

## تمرين رقم 18:

تحتوي علبة على 10 قريصات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها 6 حمراء اللون تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 ، 4 ، 6 ، 8 و البقية بيضاء اللون تحمل الارقام 1 ، 3 ، 5 ، 5 نسحب 3 قريصات من هذه العلبة واحدة تلو الاخرى دون ارجاع.

1) شكل شجرة الاحتمال المناسبة لذلك

2) ماهو احتمال الحصول على 3 قريصات من نفس اللون.

3) ما هو احتمال الحصول على 3 قريصات بلونين مختلفين

4) ماهو احتمال الحصول على 3 قريصات تحمل 3 ارقام مجموعها يساوي 15

5) ماهو احتمال الحصول على 3 كريات مجموعها يساوي 15 علما انها من نفس اللون.✖

## تمرين رقم 19:

© |

رقمت اوجه نرد مزيف من 1 الى 6. عند رمي هذا النرد نفترض ان احتمال ظهور وجه يحمل رقما زوجيا هو 3 اضعاف احتمال ظهور وجه يحمل رقما فرديا.

1) احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما فرديا و احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقما زوجيا.

2) احسب احتمال ظهور الوجه الذي يحمل رقم 1

3) عندما يرمي شخص هذا النرد يربح 20 دينارا اذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 2 و يربح 10 دنانير اذا ظهر الوجه الذي يحمل رقم 5 اما اذا ظهر وجه اخر غير هذين الوجهين فانه يخسر 5 دنانير.

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رمي عدد النقط المحصل عليها.

1) ماهي قيم المتغير العشوائي $X$

2) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

3) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ احسب التباين

4) احسب الانحراف المعياري.

## تمرين رقم 20:

© |

يحتوي صندوق على 8 قريصات بيضاء و $n$ قريصة سوداء بحيث $n \geq 2$ نفرض ان سحب كرية بيضاء يعطي ربح نقطة و سحب كرية سوداء يفقد نقطتين.
ليكن $x$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع النقط المحصل عليها.

1) نسحب من هذا الكيس كريتين على التوالي مع اعادة الكرية المسحوبة قبل السحب الموالي.

ا) عين قيم المتغير العشوائي $x$

ب) عرف قانون الاحتمال

ج) احسب بدلالة $n$ الامل الرياضي $E(x)$.
هل توجد قيمة لـ $n$ حتى تكون $E(x) = 0$ ؟

2) نفرض ان السحب يكون في ان واحد

ا) عين قيم المتغير العشوائي $x$

ب) عرف قانون الاحتمال

ج) احسب بدلالة $n$ الامل الرياضي $E(x)$ هل توجد قيمة لـ $n$ حتى يكون $E(x) = 0$ ؟

## تمرين رقم 21:

يحتوي صندوق على 12 كرية. منها 5 حمراء و 4 سوداء و 3 خضراء. نسحب عشوائيا في ان واحد 4 كرات.

1) ماهو عدد السحبات الممكنة.
2) ماهو احتمال الحصول على 4 كرات من نفس اللون.
3) ماهو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون و كرتين من لونين مختلفين
4) ماهو احتمال الحصول على 4 كرات من لونين مختلفين
5) ماهو احتمال الحصول على كرتين سوداء فقط و كرة خضراء واحدة على الاقل
6) ما هو احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة فقط وكرتين حمراء على الاكثر
7) ما هو احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة فقط.

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الالوان المتحصل عليها.

1) حدد القيم التي ياخذها $X$
2) حدد قانون الاحتمال
3) احسب الامل الرياضي

## تمرين رقم 22:

يحتوي صندوق على 9 كريات لا يمكن التفريق بينها باللمس، من بينها اربعة حمراء اللون تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 ، 3 وثلاثة سوداء اللون تحمل الارقام 2 ، 2 ، 3 وكريتان خضراء تحمل الرقمين 2 ، 3

1) نسحب كريتين عشوائيا و في ان واحد
   ا) ماهو احتمال الحصول على كريتين من نفس اللون
   ب) ماهو احتمال الحصول على كريتين من نفس الرقم
   ج) ماهو احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الاقل
   د) ماهو احتمال الحصول على كريتين مجموع ارقامهما يساوي 5
2) **نفس السؤال و لكن السحب يكون على التوالي و بدون ارجاع**
3) **نفس الاسئلة و لكن السحب يكون على التوالي و بارجاع الكرية المسحوبة**

## تمرين رقم 23:

وحدة انتاجية يسيرها 10 عمال منهم 4 نساء و 6 رجال يراد تشكيل لجنة مؤلفة من ثلاثة اعضاء.

1) ما احتمال ان تشمل اللجنة :

ا) ثلاث نساء

ب) على الاقل إمراتين

ج) على الاكثر إمراتين

د) على الاقل إمراة واحدة

## تمرين رقم 24:

يحتوي كيس على 20 قريصة مرقمة من 1 الى 20. نسحب من الكيس قريصتين في ان واحد

1) احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما يساوي 10

2) احسب احتمال سحب قريصتين الفرق بين رقميهما يساوي 4

3) احسب احتمال سحب قريصتين مجموع رقميهما يساوي 10 علما ان الفرق بينهما يساوي 4 ✖

## تمرين رقم 25:

ليكن $X$ المتغير العشوائي المعرف كمايلي :

| $\alpha$ | 4 | 3 | 2 | $-1$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=\alpha)$ | $a$ | $\frac{1}{5}$ | $\frac{1}{4}$ | $\frac{1}{3}$ |

1) عين قيمة العدد الحقيقي $a$

2) احسب $P(X \geq \frac{5}{2})$ ثم $P(X < 1)$

3) احسب $P(X^2 \leq 2)$

4) احسب $P(X^2 - 6x + 8 < 0)$

...

# القسم III

# 1

# شعبة علوم تجريبية

If you fail, never give up because F.A.I.L means"First Attempt In Learning". End is not the end. In fact, E.N.D means "Effort Never Dies". If you get No as an answer, remember No means "Next Opportunity

---

## تمرين رقم 26:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الأول (04 نقاط)

يحتوي كيس على خمس كريات حمراء منها اربع كريات تحمل الرقم 1 وكرية واحدة تحمل الرقم 2 وسبع كريات خضراء منها اربع كريات تحمل الرقم 1 و ثلاث كريات تحمل الرقم 2 (كل الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس). نسحب عشوائيا كريتين من الكيس في ان واحد و نعتبر الحادثتين $A$ و $B$ حيث : $A$ : "سحب كريتين من نفس اللون"، $B$ : "سحب كريتين تحملان نفس الرقم".

1) بين ان احتمال الحادثة $A$ هو $P(A) = \frac{31}{66}$ واحسب احتمال الحادثة $B$.

2) علما ان الكريتين المسحوبتين من نفس اللون، ما احتمال ان تحملا نفس الرقم؟

3) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

## تمرين رقم 27:

© | علوم تجريبية - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي صندوق على 10 كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها كريتان تحملان الرقم 0 وثلاث تحمل الرقم 1 و الكريات الاخرى تحمل الرقم 2 . نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من الصندوق.
ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب، جداء الارقام المسجلة على الكريات المسحوبة.

1) عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ ثم احسب امله الرياضياتي $E(X)$

2) بين ان احتمال الحصول على ثلاث كريات كل منها تحمل رقما زوجيا هو $\frac{7}{24}$

3) نسحب الان من الصندوق كريتين على التوالي دون ارجاع.
ما احتمال الحصول على كريتين تحملان رقمين مجموعهما فردي علما ان جداءهما زوجي؟ ✖

## تمرين رقم 28:

© | علوم تجريبية - 2018 - الموضوع الأول (04 نقاط)

يحوي صندوق 10 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس، منها اربع كريات بيضاء مرقمة بـ: 1،2،2،3 وثلاث كريات حمراء مرقمة بـ: 2،2،3 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 2،3،3
نسحب عشوائيا و في ان واحد 3 كريات من هذا الصندوق.
نعتبر الحادثتين $A$ : "الكريات الثلاث المسحوبة تحمل الوان العلم الوطني"
و $B$ : "الكريات الثلاث المسحوبة لها نفس الرقم"

1) ا) احسب : $P(A)$ و $P(B)$ احتمالي الحادثتين $A$ و $B$ على الترتيب.

ب) بين ان : $P(A\cap B)=\frac{1}{20}$. ثم استنتج $P_A(B)$ و $P(A\cup B)$.

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات التي تحمل رقما فرديا.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ و احسب امله الرياضياتي $E(X)$

# 2

# شعبة تسيير و اقتصاد

## تمرين رقم 29:

**تسيير و اقتصاد - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)**

نرمي نردا غير مزيف ذا ستة اوجه مرقمة من 1 الى 6 مرتين متتاليتين و نسجل الرقم الظاهر على الوجه العلوي في كل مرة

1) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين ؟
2) ما احتمال الحصول على رقمين جداؤهما يساوي 6
3) ما احتمال الحصول على رقمين احدهما ضعف الاخر ؟
4) ما احتمال الحصول على رقمين زوجيين احدهما هو 2 ؟

## تمرين رقم 30:

**تسيير و اقتصاد - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)**

1) حل في مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ المعادلة : $(4x^2+3x-1)(x^2-5x+6)=0\cdots(E)$
2) كيس به اربع كريات تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 نسحب منه كرية واحدة و نرمز بـ $p_i$ الى احتمال سحب الكرية التي تحمل الرقم $i$ ونضع $p_1=3\alpha^2$ ، $p_2=\alpha^2$ ، $p_3=\alpha$ و $p_4=3\alpha$ - حدد قيمة $\alpha$.
3) نضع $\alpha=\frac{1}{4}$ ، احسب احتمال الاحداث التالية :
   - $A$ : " سحب كرية تحمل رقما فرديا "

- $B$ : " سحب كرية تحمل الرقم 4 "
- $C$ : " سحب كرية تحمل رقما اصغر من او يساوي 3 "
- $D$ : " سحب كرية تحمل رقما حلا للمعادلة $(E)$ " .

## تمرين رقم 31:

**تسيير و اقتصاد - 2017 - الدورة الاستثنائية، الموضوع الثاني (04 نقاط)**

في كل حالة من الحالات الاتية، اقترحت ثلاث اجابات صحيحة واحدة فقط صحيحة. عين الاقتراح الصحيح مع التبرير.

**1)** $A$ و $B$ حادثتان مستقلتان.
اذا كان $P(A\cap B)=0.03$ و $P(A)=0.4$ فان :

ا) $P(B)=0.43$

ب) $P(B)=0.075$

ج) $P(B)=0.37$

**2)** $A$ و $B$ حادثتان.
اذا كان $P(A\cap B)=\dfrac{3}{100}$ و $P_A(B)=\dfrac{1}{4}$ فان :

ا) $P(A)=\dfrac{3}{25}$

ب) $P(A)=\dfrac{4}{25}$

ج) $P(A)=\dfrac{3}{400}$

**3)** $A$ و $B$ حادثتان.
اذا كان $P(A)=0.4$ و $P(B)=0.5$ و $P(\overline{A\cup B})=0.55$ فان :

ا) $P(A\cap B)=0.2$

ب) $P(A\cap B)=0.45$

ج) $P(A\cap B)=0.9$

**4)** الجدول التالي يعرف قانون احتمال تجربة عشوائية.

| $x_i$ | $-2$ | $-1$ | $\alpha$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $P(X=x_i)$ | $0.12$ | $0.50$ | $\beta$ | $0.30$ |

قيمتا $\alpha$ و $\beta$ حتى يكون الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$ يساوي $0.32$ هما :

ا) $\alpha=1$ و $\beta=0.08$

ب) $\alpha=2$ و $\beta=0.03$

ج) $\alpha=2$ و $\beta=0.08$

# 3

# شعبة تقني رياضي

## تمرين رقم 32:

© | تقني رياضي - 2020 - الموضوع الاول (05 نقاط)

يحتوي كيس على اربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 2 ، 2 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 3 ، 2 .
الكريات لا نفرق بينها باللمس، نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحدثين: $A$ " الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم" و $B$ " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون "

ا) احسب احتمال كل من الحدثين $A$ و $B$

ب) بين ان احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم و مختلفتين في اللون يساوي $\frac{4}{21}$

ج) استنتج احتمال الحصول على كريتين تحملان نفس الرقم او مختلفتين في اللون.

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب جداء الرقمين الظاهرين على الكرتين المسحو بتين.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$.

3) في لعبة، يقوم لاعب بسحب كريتين: اذا كان جداء رقميهما 4 يربح $x^2$ دينارا، اذا كان جداء رقميهما 6 يخسر $y^2$ دينارا و اذا كان جداء رقميهما 9 يخسر 130 دينار. ( $x$ و $y$ ) عددان طبيعيان غير معدومين.
عين قيمة كل من $x$ و $y$ حتى تكون هذه اللعبة عادلة

## تمرين رقم 33:

© | تقني رياضي - 2020 - الموضوع الثاني (05 نقاط)

يحتوي كيس على كريتين خضراوين تحملان الرقمين 1 ، 2 و ثلاث كريات حمراء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 2 و اربع كريات بيضاء تحمل الارقام 2 ، 3 ، 3 ، 4. ( الكريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس )

**1)** نسحب من هذا الكيس 3 كريات في ان واحد.

**ا)** احسب احتمال كل من الحدثين $A$ و $B$ التاليين :

- $A$ : " الحصول على 3 كريات من نفس اللون "
- $B$ : " الحصول على كرية بيضاء على الاقل "

**ب)** ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب اكبر الارقام المحصل عليها

**i.** بين ان: $P(X=3)=\frac{3}{7}$ ثم عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

**ii.** احسب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$.

**2)** نسحب الان 3 كريات على التوالي دون ارجاع.

ليكن $C$ الحدث : " الحصول على 3 ارقام جداؤها عدد زوجي ".

احسب احتمال $C$.

## تمرين رقم 34:

© | تقني رياضي - 2019 - الموضوع الاول (04 نقاط)

توجد اجابة صحيحة واحدة من بين الاجوبة المقترحة في كل حالة من الحالات التالية. اختر الاجابة الصحيحة مبررا اختيارك.

يحتوي كيس على ثلاث كريات بيضاء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2.

(الكريات لا نفرق بينها عند اللمس) نسحب من الكيس 3 كريات عشوائيا و في ان واحد.

$X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة.

**1)** قيم المتغير العشوائي $X$ هي :

أ) $\{1;2;3\}$ ب) $\{0;2;3\}$ ج) $\{0;1;2\}$

**2)** الامل الرياضياتي $E(X)$ لـ $X$ هو :

أ) $E(X)=\frac{4}{5}$ ب) $E(X)=\frac{6}{5}$ ج) $E(X)=\frac{11}{10}$

**3)** احتمال "الحصول على كرية واحدة سوداء تحمل الرقم 1 من الكريات المسحوبة" يساوي :

أ) $\frac{7}{10}$ ب) $\frac{9}{10}$ ج) $\frac{3}{5}$

**4)** احتمال "باقي قسمة مجموع مربعات الارقام التي تحملها الكريات المسحوبة على 13 هو 1" يساوي :

أ) $\frac{2}{5}$ ب) $\frac{3}{10}$ ج) $\frac{1}{5}$

## تمرين رقم 35:

© | تقني رياضي - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على اربع كريات بيضاء تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، 4 وثلاث كريات حمراء 1 ، 2 ، 3 وكريتين سوداوين تحملان الرقمين 1 ، 2 (كل الكريات متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس).
نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كريات من هذا الكيس.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

ا) الحادثة $A$ : "الحصول على كرية بيضاء واحدة".

ب) الحادثة $B$ : "الحصول على كريتين بيضاوين على الاكثر".

ج) الحادثة $C$ : "الحصول على ثلاث كريات تحمل ارقاما غير اولية".

2) نعتبر المتغيرالعشوائي $X$ الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات التي تحمل ارقاما اولية.

ا) عين قيم المتغير العشوائي $X$ ، ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب $P(X^2 - X \leq 0)$

## تمرين رقم 36:

© | تقني رياضي - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

كيس به 7 كريات متماثلة، لا نفرق بينها باللمس، منها 3 بيضاء و 4 خضراء.
نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الكيس.

1) ا) احسب احتمال الحادثة $A$ : "سحب كرتين مختلفتين في اللون".

ب) احسب احتمال الحادثة $B$ : "سحب كرتين من نفس اللون"

2) نقترح اللعبة التالية : للمشاركة يدفع اللاعب $\alpha(DA)$ ، (حيث $\alpha$ عدد طبيعي معطى و $DA$ تعني دينار جزائري ).
فاذا سحب كرتين بيضاوين يتحصل على $100DA$ ، واذا سحب كرتين مختلفتين في اللون يتحصل على $50DA$ ، واذا سحب كريتين خضراوين يخسر ما دفعه. وليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يمثل ربح او خسارة اللاعب بدلالة $\alpha$.

ا) برر ان قيم المتغير العشوائي هي $\{100 - \alpha, 50 - \alpha, -\alpha\}$ ثم عرف قانون احتماله.

ب) بين ان الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$ بدلالة $\alpha$ هو : $E(X) = -\alpha + \frac{300}{7}$
ثم اوجد اكبر قيمة ممكنة لـ $\alpha$ حتى تكون اللعبة في صالح اللاعب.

# 4

# شعبة رياضيات

## تمرين رقم 37:

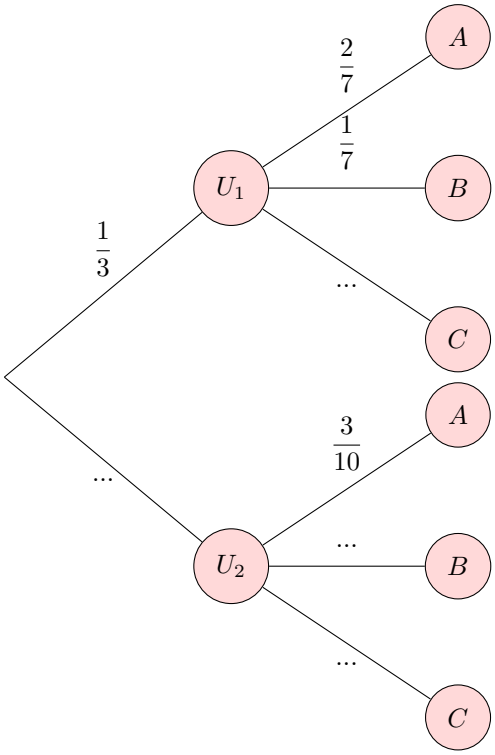
© | ✎ | ✖ رياضيات - 2019 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

صندوقان غير شفافين $U_1$ و $U_2$ ، يحتوي الصندوق $U_1$ على $4$ كريات حمراء و $3$ كريات سوداء ويحتوي الصندوق $U_2$ على $3$ كريات حمراء و كريتين سوداوين (الكريات كلها متشابهة لا نفرق بينها عند اللمس) نرمي نردا غير مزيف ذا ستة اوجه مرقمة من $1$ الى $6$.

اذا ظهر الرقمان $2$ او $4$ نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق $U_1$ وفي باقي الحالات نسحب عشوائيا كريتين في ان واحد من الصندوق $U_2$.

نعتبر الاحداث $A$ ، $B$ و $C$ المعرفة بـ: $A$: "نسحب كريتين حمراوين"

$B$: "سحب كريتين سوداوين" و $C$ : "سحب كريتين من لونين مختلفين".




1) انقل، و اكمل شجرة الاحتمالات.

2) احسب احتمالات الاحداث $A$ ، $B$ و $C$.

نعتبر $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات الحمراء المسحوبة.

3) ا) عين قيم المتغير العشوائي $X$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$.

4) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$

## تمرين رقم 38:

© | رياضيات - 2018 - الموضوع الثاني (04 نقاط)

كيس يحوي 9 كريات لا نفرق بينها باللمس موزعة كمايلي:
خمس كريات حمراء مرقمة بـ: 1،1،2،2،2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-3$ ، 2 ، 3 وكرية بيضاء مرقمة بـ: $-1$ نسحب عشوائيا 4 كريات في ان واحد.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

$A$ : "الحصول على اربع كريات من نفس اللون"
$B$ : "الحصول على اربع كريات مجموع ارقامها معدوم"
$C$ : " الحصول على اربع كريات مجموع ارقامها معدوم "

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الخضراء المتبقية في الكيس.

ا) عين قيم المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي $X$.

ج) احسب احتمال الحادثة : "$X^2 - X > 0$"

## تمرين رقم 39:

رياضيات - 2009 - الموضوع الاول (05 نقاط)

كيس به 10 كريات متماثلة لا نميز بينها عند اللمس منها 4 بيضاء و 6 حمراء.

1) نسحب عشوائيا من الكيس 3 كريات و في ان واحد.

ا) احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء.

ب) احسب احتمال الحصول على الاقل على كرية حمراء.

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة. عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ و احسب امله الرياضي $E(X)$

3) نسحب من الكيس في ان واحد 3 كريات خمس مرات على التوالي مع الاعادة (الإرجاع).
احسب احتمال الحصول على 3 كريات بيضاء مرتين بالضبط.✖

# القسم IV

# مواضيع بكالوريات أجنبية

## تمرين رقم 40:

**بكالوريا تونس - 2018 -**

يقوم لاعب برمي زهر نرد غير مزيف حيث ان احد اوجهه يحمل الحرف $G$ ، ووجهين يحملان الحرف $R$ ، و ثلاث اوجه تحمل الحرف $D$

- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف $G$ فان اللاعب يربح $100DA$ وتنتهي اللعبة
- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف $R$ فان اللاعب لا يربح شيئا و تنتهي اللعبة.
- اذا حمل الوجه العلوي للزهر حرف $D$ فان اللاعب يرمي للمرة الثانية فان حمل بعدها الوجه العلوي للزهر حرف $G$ فان اللاعب يربح $50DA$ وتنتهي اللعبة، و ان حمل الوجه العلوي للزهر حرف $R$ او $D$ فان اللاعب لا يربح شيئا و تنتهي اللعبة.

نعتبر الاحداث التالية :

- $G_1$ : "اللاعب يربح $100DA$"
- $G_2$ : " اللاعب يربح $50DA$"

1) ا) احسب احتمال الحادثة $G_1$

ب) بين ان : $P(G_2)=\frac{1}{12}$

ج) استنتج ان حصول لاعب على ربح غير معدوم يساوي $\frac{1}{4}$

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل جولة لعب المبلغ المتحصل عليه خلالها.

ا) حدد قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

ب) احسب $E(X)$ متوسط ارباح اللاعب

3) نفرض ان 200 شخص قد شاركوا في هذه اللعبة، وليكن $Y$ المتغير العشوائي الذي يرفق عدد اللاعبين الرابحين ربحا غير معدوم و $E(Y)$ متوسط اللاعبين الرابحين.

حدد معللا قيمة $E(Y)$

4) خصص المدير مبلغ $1200DA$ كمبلغ اجمالي ليتم توزيعه على الرابحين فهل اصاب المدير في تقديره هذا ام اخطأ؟

## تمرين رقم 41:

**بكالوريا المغرب - 2019 -**

يحتوي صندوق على عشر كرات : 3 منها خضراء و 6 منها حمراء و 1 سوداء، لا يمكن التمييز بينها باللمس. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.
نعتبر الاحداث التالية :

- $A$ : " الحصول على ثلاث كرات خضراء "
- $B$ : " الحصول على ثلاث كرات من نفس اللون "
- $C$ : " الحصول على كريتين على الاقل من نفس اللون. "

1) بين ان : $P(A)=\frac{1}{120}$ و $P(B)=\frac{7}{40}$

2) احسب $P(C)$

## تمرين رقم 42:

**بكالوريا المغرب، الدورة الاستدراكية - 2018 -**

يحتوي صندوق على 12 كرة لا يمكن التمييز بينها باللمس موزعة كمايلي : 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 1 و 3 كرات حمراء تحمل كل واحدة منها العدد 2 و 6 كرات خضراء تحمل كل واحدة منها العدد 2
نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الصندوق، و نعتبر الاحداث التالية :
$A$ : "الحصول على كرتين تحملان نفس العدد" و $B$ : "الحصول على كرتين مختلفتي اللون" و $C$ : "الحصول على كرتين تحملان عددين مجموعهما يساوي 3"

1) بين ان $P(A)=\frac{13}{22}$ و $P(B)=\frac{6}{11}$ و احسب $P(C)$

2) ا) بين ان $P(A\cap B)=\frac{3}{11}$

ب) هل الحادثتان $A$ و $B$ مستقلتان؟ علل جوابك.

3) علما ان الحدث $B$ محقق، احسب احتمال الحصول على كرتين تحملان نفس العدد.

## تمرين رقم 43:

**بكالوريا المغرب - 2017 -**

يحتوي صندوق على ثماني كرات لا يمكن التمييز بينها باللمس و تحمل الارقام الاتية : 4 ، 2 ، 2 ، 2 ، 2 ، 1 ، 0 ، 0. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من الصندوق.

1) نعتبر الاحداث :

- $A$ : " من بين الكرات المسحوبة لا توجد اية كرة تحمل الرقم 0"
- $B$ : " جداء الاعداد التي تحملها الكرات المسحوبة يساوي 8"

بين ان : $P(A)=\frac{5}{14}$ و $P(B)=\frac{1}{7}$

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة جداء الارقام التي تحملها الكرات الثلاث المسحوبة

ا) بين ان : $P(X=16)=\frac{3}{28}$

ب) حدد قانون احتمال المتغير العشوائي $X$

## تمرين رقم 44:

**بكالوريا المغرب - 2015 -**

يحتوي صندوق $U_1$ على 7 كرات: 4 حمراء و 3 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس) و يحتوي صندوق $U_2$ على 5 كرات : 3 حمراء و 2 خضراء (لا يمكن التمييز بينها عند اللمس)

1) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا 3 كرات و في ان واحد من الصندوق $U_1$.
ليكن $A$ الحادث "الحصول على كرة حمراء واحدة وكرتين خضراوين" و $B$ الحادث "الحصول على 3 كرات من نفس اللون".
بين ان $P(A)=\frac{12}{35}$ و ان $P(B)=\frac{1}{7}$

2) نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من $U_1$ ثم نسحب عشوائيا كرة واحدة من $U_2$
ليكن $C$ الحادث "الحصول على 3 كرات حمراء".
بين ان : $P(C)=\frac{6}{35}$

## تمرين رقم 45:

**بكالوريا فرنسا - 2008 -**

يحتوي كيس $A$ على 4 كريات حمراء و 6 كريات سوداء(لا نفرق بينها باللمس). ويحتوي كيس اخر $B$ على كرة حمراء و 9 كريات سوداء.(الكريات لا نفرق بينها باللمس). يرمي اللاعب زهرة نرد متوازنة مرقمة من 1 الى 6 مرة واحدة اذا تحصل على 1 يسحب عشوائيا كرية من الكيس $A$ والا فانه يسحب عشوائيا كرية من الكيس $B$

1) ليكن $R$ الحادث " الحصول على كرية حمراء". اثبت ان $P(R)=0.15$

2) اذا تحصل اللاعب على كرية حمراء. هل احتمال ان تكون من الكيس $A$ اكبر او تساوي من احتمال ان تكون من الكيس $B$

**الجزء الثاني**

يعيد اللاعب التجربة الموصوفة سابقا مرتين في نفس الظروف و بطريقة مستقلة.
ليكن $x$ عدد طبيعي غير معدوم.
في كلا التجربتين اللاعب يربح $x$ دينار اذا تحصل على كرية حمراء و يخسر 2 دينار اذا تحصل على كرية سوداء.
ليكن $G$ المتغير العشوائي الذي يمثل ربح او خسارة اللاعب.

1) برر ان قيم المتغير العشوائي $G$ هي $2x$ ، $x-2$ ، $-4$ ثم عرف قانون احتماله $G$

2) عبر عن الامل الرياضياتي $E(G)$ بدلالة المتغير $x$ ما هي القيمة التي ياخذه $x$ حتى يكون $E(G)\geq 0$ ؟

...

# القسم V

# مواضيع بكالوريات تجريبية لمدارس اشبال الامة

# 5

# شعبة علوم تجريبية

## تمرين رقم 46:

بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة سبتمبر ،الموضوع الاول (04 نقاط)

يحتوي الصندوق $U_1$ على اربع كرات سوداء و كرتين بيضاوين و ثلاث كرات حمراء، الكرات لا نميز بينها عند اللمس.
نسحب عشوائيا ثلاث كرات على التوالي دون ارجاع الكرة المسحوبة الى الصندوق.

1) احسب احتمال الحوادث التالية :

$A$ : " سحب ثلاث كرات من نفس اللون " ، $B$ : " سحب كرة سوداء واحدة على الاقل "

$C$ : " سحب كرتين حمراوين و كرة بيضاء "

2) نعتبر $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الالوان المحصل عليها.

ا) حدد القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي $X$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

3) نعتبر صندوق اخر $U_2$ يحتوي على كرتين سوداوين و كرة حمراء واحدة. نضع الكرات المسحوبة من الصندوق $U_1$ في الصندوق $U_2$ ، ثم نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من $U_2$

- احسب احتمال ان تكون الكرتان المسحوبتان من $U_2$ سوداوين علما ان الكرات الثلاثة من $U_1$ لها نفس اللون.✖

## تمرين رقم 47:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة سبتمبر ،الموضوع الثاني (04 نقاط)**

نعتبر زهرتي نرد كل منهما مرقم من 1 الى 6 ، زهرتي النرد متطابقان في المظهر لكن احدهما مزيف و الاخر غير مزيف.
احتمال ظهور الرقم 6 بالنسبة للمزيف يساوي $\frac{1}{3}$

1) نرمي زهرة النرد الغير مزيف ثلاث مرات على التوالي و نرمز بـ $X$ للمتغير العوشائي الذي يهتم بعدد المرات التي نحصل فيها على الرقم 6.

ا) عين قيم المتغير العشوائي $X$

ب) تحقق ان $P(X=2)=\frac{5}{72}$

ج) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي $X$ و احسب امله الرياضياتي

2) نختار عشوائيا احد زهري النرد، ثم نرمي زهرة النرد المختارة ثلاث مرات على التوالي

نعتبر الحادثتين التاليتين :

$A$ الحصول على الرقم 6 مرتين بالضبط.

$B$ زهر النرد المختار هو زهر النرد الغير مزيف

مستعينا بشجرة الاحتمالات احسب $P(B\cup A)$ و $P(\overline{B}\cup A)$ ثم استنتج ان $P(A)=\frac{7}{48}$

3) تحصلنا على الرقم 6 مرتين بالضبط ما هو احتمال ان يكون زهر النرد المختار مزيف.✖

## تمرين رقم 48:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الاول (04 نقاط)**

يحتوي وعاء على $n$ كرة بيضاء، 5 كرات حمراء و 3 خضراء نسحب عشوائيا كرتين في آن واحد.

1) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين؟

2) نرمز بـ $P(n)$ الى احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون.

ا) أثبت أن : $P(n)=\frac{n^2-n+26}{(n+7)(n+8)}$

ب) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty}P(n)$ ثم فسر النتيجة.

3) نضع $n=4$ يقوم لاعب بسحب كرتين من الوعاء في آن واحد ثم يرجعهما و يسحب كرتين أخريين. لإجراء هذين السحبتين يدفع اللاعب مبلغا قدره 30 دينارا وبعد كل سحب يتحصل على 40 دينارا اذا كانت الكرتان من نفس اللون، و إلا يتحصل على 5 دنانير فقط.
ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبين ربح هذا اللاعب.

ا) عين قيم المتغير العشوائي $X$

ب) عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$

ج) احسب الامل الرياضياتي $E(X)$ للمتغير العشوائي $X$.

## تمرين رقم 49:

© | بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

يحتوي كيس على 12 كرة منها 3 بيضاء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 3 و اربعة حمراء الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2 و خمس خضراء تحمل الارقام : 1 ، 2 ، 2 ، 2 ، 3 .
نسحب في آن واحد كرتين من هذا الكيس.

1) نعتبر الحادثتين : $A$ : " سحب كرتين من نفس اللون" و $B$ : " سحب كرة خضراء على الاقل " .

ا) أحسب احتمال الحوادث التالية : $A$ ، $B$ و $A \cap B$.

ب) هل الحادثتين : $A$ و $B$ مستقلتان؟

2) نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.
عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ و أحسب الأمل الرياضياتي $E(X)$.

## تمرين رقم 50:

© | بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الاول (04 نقاط)

تتكون مجموعة اشخاص من ثمانية رجال و اربع نساء من بينهم رجل واحد اسمه علي و امرأة واحدة اسمها فاطمة نريد تكوين لجنة مكونة من ثلاث اعضاء لهم نفس المهام.

1) احسب احتمال كل من الاحداث التالية
$A$ "تكوين لجنة تضم 3 رجال"
$B$ "تكوين لجنة تضم رجلا و امراتين"
$C$ "تكوين لجنة تضم علي"
$D$ "تكوين لجنة تضم اما علي و اما فاطمة"

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار بعدد الرجال في اللجنة المكونة

ا) عين القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب الانحراف المعياري للمتغير العشوائي $X$.

## تمرين رقم 51:

بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)

لعبة تعتمد على رمي كرة داخل دلو من بين مجموعة اللاعبين لدينا $\frac{5}{6}$ لاعبين باليد اليمنى و $\frac{1}{6}$ لاعبين باليد اليسرى
احتمال وضع الكرة داخل الدلو بالنسبة للاعبين باليد اليمنى هو $\frac{1}{4}$ و بالنسبة للاعب لليد اليسرى هو $\frac{1}{2}$

1) نختار لاعبا و نسمي الحادثتين
$G$ "لاعب باليد اليسرى"
$S$ "اللاعب يضع الكرة داخل الدلو"

ا) احسب احتمال الحادث $G \cap S$

ب) احسب احتمال الحادث $S$

ج) احسب احتمال الحادث ان يكون الاعب باليد اليمنى علما انه وضع الكرة داخل الدلو

2) في هذال السؤال نسمي عمر اللاعب باليد اليمنى انه يرمي كرتين واحدة بعد الاخرى(بفرض الرميتين مستقلتين) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل رميتين بعدد الكرات داخل الدلو المكونة

ا) عين القيم الممكنة التي ياخذها المتغير العشوائي $X$ ثم عرف قانون احتماله

ب) احسب الامل الرياضياتي للمتغير العشوائي $X$

# 6

# شعبة رياضيات

## تمرين رقم 52:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)**

يحتوي صندوق على 7 كرات بيضاء و 3 كرات سوداء لا نفوق بينها عند اللمس. نسحب عشوائيا كرة واحدة من هذا الصندوق و نسجل لونها، ثم نعيدها الى الصندوق و نسحب منه كرة و نسجل لونها و ننهي التجربة.

**1)** احسب احتمال الحوادث التالية :

$A$ : " الحصول على كرتين بيضاوين "

$B$ " الحصول على كرتين من نفس اللون "

**2)** نعرف لعبة حظ كما يلي : تمنح لكل كرة بيضاء العلامة $\alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$ ، و لكل كرة سوداء العلامة $(-\alpha)$

ليكن المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع النقاط المحصل عليها.

**ا)** عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي $X$ و احسب امله الرياضي $E(X)$

**ب)** عين قيمة العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون اللعبة مربحة.

**3)** نضيف $(n-3)$ كرة سوداء الى الصندوق و نعيد عملية السحب المعرفة اعلاه.

ما هو عدد الكرات السوداء التي تم اضافتها الى الصندوق علما ان احتمال الحادثة $A$ يساوي $\frac{1}{4}$ ✖

## تمرين رقم 53:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2020 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي كيس على 6 كريات بيضاء تحمل الارقام : 2 ، 1 ، 1 ، 0 ، 0 ، 0 وكرتين سوداوين تحمل الارقام : 1 ، 0 ( لا نميز بينها باللمس ) نسحب عشوائيا و في ان واحد كرتين من الكيس

1) احسب احتمال كل من الاحداث التالية :

- $A$ : " للكرتين المسحوبتين نفس اللون "
- $B$ : " للكرتين المسحوبتين نفس الرقم "
- $C$ : " للكرتين المسحوبتين لونين مختلفين و رقمين مختلفين "
- $D$ : " جداء الرقمين المسجلين على الكرتين معدوم "

2) نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يربط كل عملية سحب للكرتين مجموع الرقمين المسجلين عليهما.

ا) اوجد قانون الاحتمال للمتغير $X$

ب) احسب الامل الرياضياتي و التباين و الانحراف المعياري للمتغير $X$

## تمرين رقم 54:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2019 - دورة ماي ،الموضوع الثاني (04 نقاط)**

يحتوي كيس على اربع كرات بيضاء تحمل الارقام 0 ، 1 ، 1 ، 2 و اربع كرات حمراء تحمل الارقام 1 ، 1 ، 2 ، 2. نسحب عشوائيا و في ان واحد ثلاث كرات من هذا الكيس.

1) احسب احتمال الحصول على :

ا) ثلاث كرات من نفس اللون

ب) ثلاث كرات تحمل نفس الرقم

ج) ثلاث كرات ارقامها مختلفة مثنى مثنى

2) ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد الكرات المسحوبة التي تحمل الرقم 1

ا) عين قانون احتمال المتغير العشوائي $X$

ب) أحسب الامل الرياضي $E(X)$ و الانحراف المعياري $\sigma(X)$

## تمرين رقم 55:

**بكالوريا تجريبية لمدارس اشبال الامة - 2018 - دورة ماي ،الموضوع الأول (04 نقاط)**

عمر و حمزة راميا قوس، كل منهما يسدد سهما نحو هدف مقسم الى ثلاث مناطق (C-B-A)
نفرض ان كل رامي يصيب في كل رمية منطقة واحدة و واحدة فقط. اذا علمت ان :
-احتمالات اصابة الرامي عمر المناطق (C-B-A) على الترتيب هو $\left(\frac{7}{12}، \frac{1}{3}، \frac{1}{12}\right)$
- احتمالات اصابة الرامي حمزة المناطق (C-B-A) متساوية.

**1)** الرامي عمر يسدد سهمه ثلاث مرات متتابعة :

**ا)** ما احتمال ان يصيب في كل رمية المنطقة $(C)$ ؟

**ب)** ما احتمال ان يصيب المناطق (C-B-A) بهذا الترتيب؟

**ج)** ما احتمال ان يصيب المناطق (C-B-A) ؟

**2)** نختار احد الراميين مع العلم ان احتمال اختيار الرامي عمر ضعف احتمال اختيار الرامي حمزة

**ا)** في حالة تسديد رمية واحدة. ما احتمال ان تصيب هذه الرمية المنطقة $(C)$ ؟ ✖

**ب)** علما ان رمية واحدة قد سددت و اصابت المنطقة $(C)$ ، ما احتمال ان تكون هذه الرمية للرامي عمر؟✖

...

# القسم VI

# تمارين مقترحة للتعمق

## تمرين رقم 56:

في لعبة يرمي اللاعب زهرة نرد متجانسة مرة واحدة و كلما كان الرقم المحصل عليه زوجي سمح له برمية اخرى. تنتهي اللعبة اجباريا بعد 10 رميات او بتوقف اللاعب عن الرمي تلقائيا.

1) ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الاولى.

2) ما هو احتمال الحصول على رقم فردي في الرمية الثانية

3) اذا اراد اللاعب ان يكون احتمال حصوله على رقم فردي اكبر من $0.03$ فما هو عدد الرميات التي لا ينبغي تجاوزها.

## تمرين رقم 57:

$A$ و $B$ صندوقان يحتويان على كرات موزعة كمايلي:
الصندوق $A$ : $5$ كرات بيضاء و $5$ كرات سوداء
الصندوق $B$ : $7$ كرات بيضاء و $3$ كرات سوداء
نسحب عشوائيا كرة واحدة من الصندوق $A$ و نسجل لونها و نعيدها الى الصندوق $B$ ثم نسحب من الصندوق $B$ كرة اخرى و نسجل لونها

1) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

2) ما هو احتمال الحصول على كرتين من نفس اللون

3) نرفق بكل كرة بيضاء العدد الحقيقي $\alpha$ وكل كرة سوداء العدد $(-\alpha)$ وليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتين مجموع الاعداد المرقمة بها.

   ا) عرف قانون احتمال المتغير $X$ ثم احسب $E(X)$ (أمله الرياضياتي).

   ب) عين $\alpha$ حتى يكون $E(X)=1$

4) نضيف الى الصندوق $B$ $(n-3)$ كرة سوداء حيث $n$ عدد طبيعي اكبر من $3$ نعيد عملية السحب كما في السؤال $(1)$.

   ا) ماهو احتمال الحصول على كرتين بيضاوين

   ب) عين قيمة $n$ حتى يكون احتمال سحب كرتين بيضاوين يساوي $0.25$

## تمرين رقم 58:

لدينا وعائين $U_1$ و $U_2$ يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس. الوعاء $U_1$ يحتوي على $n$ كرية بيضاء و $3$ كرات سوداء (n عدد طبيعي اكبر من او يساوي 1)
الوعاء $U_2$ يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء
نقوم بالتجربة $E$ : "نسحب عشوائيا كرة من $U_1$ ونضعها في $U_2$ ، ثم نسحب كرة من $U_2$ ونضعها في $U_1$ "

1) نعتبر الحادثة $A$ : "بعد التجربة $E$ يبقى الوعاءان على ماكانا عليه "

ا) بين ان الاحتمال $P(A)$ للحادثة $A$ يكتب : $P(A)=\frac{3}{4}\left(\frac{n+2}{n+3}\right)$

ب) عين نهاية $P(A)$ لما $n$ يؤول الى $+\infty$

2) نعتبر الحادث $B$ : "بعد التجربة $E$ الوعاء $U_2$ يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط "

تحقق من ان : $P(B)=\frac{6}{4(n+3)}$

3) لاعب يدفع 20 دينارا و يقوم بالتجربة $E$ :

ا) اذا كان بعد التجربة، الوعاء $U_2$ يحتوي على كرة واحدة بيضاء، اللاعب يكسب $2n$ دينار

ب) اذا كان الوعاء $U_2$ يحتوي على كرتين بيضاوين، فان اللاعب يكسب $n$ دينار.

ج) اذا كان الوعاء $U_2$ يحتوي على 3 كرات بيضاء، فان اللاعب لا يكسب شيئا.

د) اشرح لماذا لا يكون للاعب اي ربح اذا كان $n$ لا يفوق 10؟

## تمرين رقم 59:

لتكن في مجموعة الاعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة $z^3-4z^2+z-4=0$ (1)

1) اوجد $z_1$ ، $z_2$ ، $z_3$ حلول المعادلة (1) ثم اكتبها على شكلها المثلثي

2) عين الجذور التربيعية لكل من $z_1$ ، $z_2$ ، $z_3$.

- زهرة نرد متجانسة الاوجه كل وجه منها يحمل جذرا تربيعيا من الجذور المحصل عليها في السؤال (2) نرمي هذه الزهرة مرتين متتابعتين

3) ماهو احتمال الحصول على جذرين مربعاهما متساويان؟

ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عمليتي رمي بطويلة جداء العددين المركبين المحصل عليهما

4) عرف قانون الاحتمال للمتغير $X$

5) احسب $E(X)$ الامل الرياضياتي للمتغير $X$

## تمرين رقم 60:

يحتوي كيس على 4 كرات تحمل الارقام 1 ، 2 ، 3 ، $a$ حيث $a\in\mathbb{N}$

نسحب كرة واحدة من الكيس. نضع $P_k$ احتمال سحب الكرة ذات الرقم $k$ (السحب ليس متساوي الاحتمال)

1) احسب $P_1$ ، $P_2$ ، $P_3$ ، $P_a$ علما انها بهذا الترتيب تشكل حدودا متتابعة من متتالية حسابية اساها $\frac{1}{18}$

2) ليكن $F$ المتغير العشوائي الذي يرفق كل كرة مسحوبة بالرقم الذي تحمل. اوجد قيمة العدد الطبيعي $a$ حتى يكون الامل الرياضياتي للمتغير $F$ هو $E(F)=\frac{43}{9}$

## تمرين رقم 61:

**1)** $(u_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5} \end{cases} \quad \text{من اجل كل } n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$$

**ا)** برهن ان من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم $n$ فان $u_n \in [0;1]$

**ب)** $(v_n)$ متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $v_n = u_n - \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$
عين العدد الحقيقي $\alpha$ حتى تكون $(v_n)$ متتالية هندسية.

**ج)** احسب $u_n$ بدلالة $n$ ثم استنتج ان $u_n$ متقاربة و عين نهايتها

**2)** $A$ و $B$ كيسان يحتويان على كرات موزعة كمايلي :
الكيس A : 6 كرات بيضاء و 4 كرات سوداء
الكيس B : 8 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء
نختار عشوائيا كيسا واحدا و نسحب منه كرة واحد ثم نعيدها الى نفس الكيس
اذا كانت هذه الكرة بيضاء نسحب مرة اخرى من نفس الكيس اما اذا كانت سوداء فنسحب من الكيس الاخر و نعيد هذه التجربة $n$ مرة.
ليكن $u_n$ احتمال ان تكون السحبة رقم $n$ من الكيس $A$

**ا)** احسب $u_1$ ، $u_2$ ، $u_3$

**ب)** برهن ان من اجل كل $n \in \mathbb{N} - \{0;1\}$: $u_n = \frac{2}{5}u_{n-1} + \frac{1}{5}$

**ج)** احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

## تمرين رقم 62:

$A$، $B$ ، $C$ ثلاث صناديق تحتوي على كرات موزعة كمايلي :
في الصندوق $A$ : 5 كرات بيضاء و كرة سوداء
في الصندوق $B$ : 3 كرات بيضاء و 2 كرات سوداء
في الصندوق $C$ : كرة بيضاء و 4 كرات سوداء
يقوم لاعب برمي زهرة نرد ذات 6 اوجه مرقمة و متساوية الاحتمال.
اذا كان الرقم الظاهر هو 1 يسحب من الصندوق $A$
اذا كان الرقم الظاهر 2 او 3 يسحب من الصندوق $B$
اذا كان الرقم الظاهر 4 او 5 او 6 يسحب من الصندوق $C$

**1)** اذا كان اللاعب يسحب كرة واحدة فقط، احسب احتمال ان تكون بيضاء.

**2)** اذا كان اللاعب يسحب كرتان في ان واحد. احسب احتمال الحوادث التالية :
$X$ : كرتين بيضاوين.
$Y$ : كرتين سوداوين من الصندوق $B$

## تمرين رقم 63:

يحتوي كيس على عشر كريات بحيث : خمس كريات حمراء تحمل على الترتيب الارقام $-2$ ، $-1$ ، $0$ ، $1$ ، $2$ و ثلاث كريات خضراء تحمل على الترتيب الارقام $-1$ ، $0$ ، $1$ وكرتان سودوان تحملان على الترتيب الرقمين $-1$ ، $0$

1) نسحب عشوائيا و في ان واحد كريتين من هذا الكيس ونفترض ان كل الكريات لها نفس احتمال السحب.
ليكن $X$ المتغير العشوائي الذي يرافق كل سحبة ممكنة بالعدد الحقيقي $|x-y|$ حيث $x$ و $y$ هما الرقمان اللذان تحملاهما الكريتان المسحوبتان من الكيس.

ا) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي $X$

ب) اكتب قانون احتمال $X$ ثم احسب امله الرياضياتي

2) نعيد كل الكريات المسحوبة الى الكيس و نسحب منه كريتين دون ارجاع

ا) احسب عدد الحالات الممكنة للسحب

ب) احسب $P(A)$ و $P(B)$ ، حيث الحدثان $A$ و $B$ معرفان كمايلي :

$A$ : " الكرتان المسحوبتان لوناما مختلفان "

" الكرتان المسحوبتان تحمل كل منهما عددا موجبا تماما "

## تمرين رقم 64:

كيس يحتوي على كرتين بيضاء مرقمة بـ: $2$ ، $3$ و ثلاث كرات حمراء مرقمة بـ: $1$ ، $3$ ، $3$ واربع كرات سوداء مرقمة بـ: $2$ ، $2$ ، $3$ ، $3$.

1) نسحب في ان واحد كرتين من الكيس.

ا) احسب احتمال وقوع الحوادث التالية :

$A$ : ظهور كرتين من لونين مختلفين.

$B$ : ظهور رقمين فرديين على الاكثر.

$C$ : ظهور عددين مجموع رقميهما عدد اولي.

ب) نعتبر المتغير العشوائي $X$ الذي يرفق بكل عملية سحب مجموع الرقمين الظاهرين.

- عين قانون الاحتمال لهذا المتغير العشوائي و الامل الرياضياتي ثم الانحراف المعياري.

2) نعتبر الكيس الاول و كيس اخر يحوي كرتين بيضاوين مرقمة بـ: $1$ ، $1$ وكرتين حمراوين مرقمة بـ: $1$ ، $3$ وكرتين سوداوين مرقمة بـ: $2$ ، $2$.

نرمي حجر نرد مرقم من 1 الى 6 مرة واحدة فعند ظهور عدد فردي نسحب كرة من الكيس الاول و عند ظهور عدد زوجي نسحب كرة من الكيس الثاني.

- بين ان احتمال ظهور كرة بيضاء هو : $P(B)=\frac{5}{18}$.

- علما ان الكرة المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال ان تكون من الكيس الثاني؟