الخليل
للرياضيات

التحضير الجيد للبكالوريا

الشعب:

علوم تجريبية | رياضيات | تقني رياضي | تسيير وإقتصاد

مسائل شاملة

مرفقة بالحلول

في الدوال:

- العددية x
- الأسية e^x
- اللوغارتمية $\ln x$

◄ الإصدار الأول ►

إعداد الأستاذ:

قويسم إبراهيم الخليل

آخر تحديث:

2021 / 01 / 01

فهرس المحتويات

① أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

② قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

③ الدوال العددية:

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 10

الدوال الأسية:

④

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 01
- المسألة الشاملة رقم 02
- حل المسألة الشاملة رقم 02
- المسألة الشاملة رقم 03
- حل المسألة الشاملة رقم 03
- المسألة الشاملة رقم 04
- حل المسألة الشاملة رقم 04
- المسألة الشاملة رقم 05
- حل المسألة الشاملة رقم 05
- المسألة الشاملة رقم 06
- حل المسألة الشاملة رقم 06
- المسألة الشاملة رقم 07
- حل المسألة الشاملة رقم 07
- المسألة الشاملة رقم 08
- حل المسألة الشاملة رقم 08
- المسألة الشاملة رقم 09
- حل المسألة الشاملة رقم 09
- المسألة الشاملة رقم 10
- حل المسألة الشاملة رقم 10
- المسألة الشاملة رقم 11
- حل المسألة الشاملة رقم 11
- المسألة الشاملة رقم 12
- حل المسألة الشاملة رقم 12

الدوال اللوغارتمية:

⑤

المسائل الشاملة والحلول

انقر على المسألة أو الحل

- المسألة الشاملة رقم 01
- حل المسألة الشاملة رقم 01

◄ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ►

أسئلة متنوعة شائعة

في دراسة الدوال والإجابات عليها

①

① السلوك التقاربي \ المقاربات \ الوضعية النسبية

الإجابة	السؤال
(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب، معادلته: $x = a$	فسر بيانيا: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$
(C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا محور الفواصل معادلته: $y = b$	فسر بيانيا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$
(C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا معادلته: $y = ax + b$ عند $\pm\infty$	فسر بيانيا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$
نبرهن: $\lim\limits_{x\to\infty} [f(x) - (ax+b)] = 0$	بين أن المستقيم $(\Delta): y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f)
• إذا كان: $f(x) = ax + b + g(x)$ نبرهن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ ومعادلة المستقيم: $y = ax + b$ • إذا لم يكن ذلك(*): نحسب العددين a وb من $\mathbb{R}$ كما يلي: $a = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ $b = \lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - ax]$	بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا يطلب تعيين معادلته ملاحظة: (*) خاص بشعبتي: رياضيات + تقني رياضي
ندرس إشارة الفرق: $d(x) = f(x) - y$ • $d(x) > 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع فوق (Δ) • $d(x) = 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقطع (Δ) • $d(x) < 0 \Leftrightarrow (C_f)$ يقع تحت (Δ)	ادرس الوضع النسبي بين (C_f) والمستقيم (Δ) ذو المعادلة: $(\Delta): y = ax + b$ نطبق نفس الإجابة على السؤال: ادرس وضعية المنحنيين (C_f) و(C_g)، بوضع: $d(x) = f(x) - g(x)$
المنحنيين (C_f) و(C_g) متقاربان عند $\pm\infty$	فسر بيانيا: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} [f(x) - g(x)] = 0$

② عناصر تناظر منحنى \ شفعية دالة

D_f هي مجموعة تعريف الدالة f

الإجابة	السؤال
نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$	بيّن أنّ النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f)
نستنج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$	بيّن أنّ $f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta$ ماذا تستنتج؟
نبين أنّ: $\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) = f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ المستقيم $d: x = \alpha$ محور تناظر (C_f)
نستنج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم $(d): x = \alpha$	بيّن أنّ $f(\alpha + x) = f(\alpha - x)$ ماذا تستنتج؟
نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ الدالة f فردية
نبين أنّ: $\begin{cases} -x \in D_f \\ f(-x) = f(x) \end{cases}$	بيّن أنّ الدالة f زوجية
نستنتج أنّ: f فردية، ومبدا المعلم مركز تناظر (C_f)	بين أنّ: $f(-x) + f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: f زوجية، و(C_f) متناظر بالنسبة إلى حامل محور التراتيب (yy')	بين أنّ: $f(-x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى النقطة $\Omega\left(\frac{\alpha}{2};\frac{\beta}{2}\right)$	بين أنّ: $f(\alpha - x) + f(x) = \beta$ ماذا تستنتج؟
نستنتج أنّ: (C_f) متناظر بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة: $x = \frac{\alpha}{2}$	بين أنّ: $f(\alpha - x) - f(x) = 0$ ماذا تستنتج؟

③ إشارة دالة \ مبرهنة القيم المتوسطة

السؤال	الإجابة
يعطى لك المنحنى (C_f) مرسوما في معلم م م، • عين فواصل نقط تقاطع (C_f) مع محور الفواصل. • استنتج إشارة $f(x)$	• نحل بيانيا المعادلة: $f(x) = 0$ • ثم نحدد المجالات التي يكون عليها (C_f) إما فوق محور الفواصل وإما أسفله وأخيرا نحدد إشارة $f(x)$
• أحسب $f(\alpha)$ واستنتج إشارة $f(x)$	نجد $f(\alpha) = 0$ ثم نحدد المجالات حيث: $f(x)$ إما موجبة أو سالبة
• بين أن المعادلة $f(x) = k$ تقبل حل وحيد α حيث: $a < \alpha < b$ أو بصيغة أخرى: بين أنّ (C_f) يقطع المستقيم (Δ) الذي معادلته: $y = k$ في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أنّ: f مستمرة ورتيبة تماما على $[a; b]$ • ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ ونبين أنّ k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$ فينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = k$
• بين أنّ المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $a < \alpha < b$ أو بصيغة أخرى: بين أنّ (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α	• نبين أنّ f مستمرة و رتيبة تماما على $[a; b]$ • ونحسب: $f(a)$ وَ $f(b)$ ونجد: $f(a) \times f(b) < 0$ وينتج وجود α وحيد من $[a; b]$ حيث: $f(\alpha) = 0$

④ العدد المشتق وتفسيره الهندسي

الإجابة	السؤال
• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = l$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا معامل توجيهه l	فسّر: $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l$ أو: $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$
• f تقبل الاشتقاق عند a و $f'(x) = 0$ • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا يوازي حامل محور الفواصل معادلته $y = f(a)$	فسّر: $\lim_{h \to 0} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = 0$
• f لا تقبل الاشتقاق عند a و (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ مماسا (أو نصف مماس) يوازي حامل محور التراتيب معادلته $x = a$	فسّر: $\lim_{\substack{h \to 0 \\ <>}} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = \pm\infty$
• f لا تقبل الاشتقاق عند a. • (C_f) يقبل عند النقطة $A(a; f(a))$ نصفي مماسين معاملي توجيههما على الترتيب l_1 و l_2 وتسمى النقطة $A(a; f(a))$ نقطة زاوية.	فسّر: $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_1$ وَ $\lim_{\substack{h \to 0 \\ >}} \frac{f(h+a) - f(a)}{h} = l_2$ حيث: $l_1 \neq l_2$

⑤ المماســـــات

السؤال	الإجابة
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الفاصلة x_0	نكتب المعادلة $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ ثم نحسب $f(x_0)$ و $f'(x_0)$ و نعوض في المعادلة أعلاه
عين معادلة المماس لـ (C_f) في النقطة ذات الترتيبة y_0	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f(x_0) = y_0$ ثم نكتب معادلة المماس عند x_0
عين بيانيا العدد المشتق $f'(x_0)$ **ملاحظة:** معامل توجيه المماس= $f'(x_0)$	معامل التوجيه = $f'(x) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B}$ حيث A وB من المماس
هل توجد مماسات لـ (C_f) معامل توجيهها يساوي a ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) توازي المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = a$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تشمل النقطة $A(a; b)$ ؟	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $b = f'(x_0)(a - x_0) + f(x_0)$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات
هل توجد مماسات لـ (C_f) تعامد المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ ؟ (في معلم متعامد ومتجانس)	نبحث عن x_0 بحل المعادلة $f'(x_0) = -\dfrac{1}{a}$ عدد الحلول يمثل عدد المماسات

⑥ إيجاد عبارة $f(x)$ بثوابت مجهولة a, b

المعطيات	ترجمتها إلى معادلات لتعيين الثوابت: a, b, c
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_0; y_0)$ مماسا يوازي محور الفواصل. أو: (C_f) يقبل ذروة في النقطة $A(x_0; y_0)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = y_0 \\ f'(x_0) = 0 \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة ذات الفاصلة x_0 مماسا يوازي المستقيم ذو المعادلة: $y = mx + k$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_0) = mx_0 + k \\ f'(x_0) = m \end{cases}$
(C_f) يقبل في النقطة $A(x_A; y_A)$ مماسا يشمل النقطة $B(x_B; y_B)$	نحل الجملة: $\begin{cases} f(x_A) = y_A \\ f'(x_0) = \dfrac{y_A - y_B}{x_A - x_B} \end{cases}$

⑦ رسم منحنى (C_g) إنطلاقا من المنحنى (C_f)

الدوال	شرط الوجود	التحويل
$g(x) = f(x) + b$	$x \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(b\vec{j})$
$g(x) = f(x + a)$	$x + b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i})$
$g(x) = f(x + a) + b$	$x + b \in D$	(C_g) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $(-a\vec{i} + b\vec{j})$
$g(x) = -f(x)$	$x \in D$	(C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = \|f(x)\|$	$x \in D$	لما $f(x) \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx')
$g(x) = f(\|x\|)$	$\|x\| \in D$	لما $x \geq 0$: (C_g) ينطبق على (C_f) إذا $x \leq 0$: (C_g) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')

2

قواعد أساسية في دراسة الدوال العددية

النهايات

بعض نهايات الدوال المرجعية

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}=+\infty \qquad \lim_{x\to+\infty}x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}x^3=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty}x^3=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}x^2=+\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}\frac{1}{x}=+\infty \qquad \lim_{\substack{x\to0\\<}}\frac{1}{x}=-\infty \qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}=0$$

نهاية دالة كثير حدود أو دالة ناطقة عند $\pm\infty$:

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال: $\lim_{x\to-\infty}(2x^2+x+3)=\lim_{x\to-\infty}(2x^3)=+\infty$

- النهاية عند $\pm\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $\pm\infty$.

مثال:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{3x^2}{x^2}\right)=3$$

حالات عدم التعيـــين:

④ $\frac{0}{0}$ ③ $\frac{\infty}{\infty}$ ② $0\times\infty$ ① $\infty-\infty$

طرق إزالة حالات عدم التعيـــين:

1) التحليل والإختزال:

نستعمل هذه الطريقة عند حساب $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ حيث: $f(x_0)=g(x_0)=0$

في هذه الحالة نقوم بتحليل العبارتين f و g وكتابتهما على الشكل: $(x-x_0)Q(x)$ ثم نختزل الكسر ونحسب النهاية من جديد:

مثال 1: $$\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x^2+3x-7}{x^2+2x-3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(x-1)(4x+7)}{(x-1)(x+3)}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{4x+7}{x+3}\right)=\frac{11}{4}$$

مثال 2: $$\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^3+8}{x^2-4}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{(x+2)(x^2-2x+4)}{(x+2)(x-2)}\right)=\lim_{x\to -2}\left(\frac{x^2-2x+4}{x-2}\right)=-3$$

ملاحظة: توجد ثلاث طرق لإيجاد عبارة $Q(x)$:

ط1: المطابقة:

مثال: كتابة العبارة $4x^2+3x-7$ على الشكل: $(x-1)Q(x)$:

بما أن $Q(x)$ من الدرجة الأولى فهو يكتب على شكل $ax+b$ ومنه:

$$(x-1)Q(x)=(x-1)(ax+b)=ax^1+(b-x)x-b$$

$$\begin{cases} a=4 \\ b-a=3 \\ -b=-4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=4 \\ b=7 \end{cases} \Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

ط2: القسمة الإقليدية:

مثال:

$$\begin{array}{l|l} x^3+8 & x+2 \\ \hline \underline{-x^3-2x^2} & x^2-2x+4 \\ \quad -2x^2+8 & \\ \quad \underline{+2x^2+4x} & \\ \quad +4x+8 & \\ \quad \underline{-4x-8} & \\ \qquad 0 & \end{array}$$

ط3: خوارزمية هورنر:

وهي أسهل الطرق، خاصة لما يكون كثير الحدود من الدرجة الثالثة فما فوق:

مثال: $p(x)=4x^2+3x-7$، $x_0=1$

معاملات $p(x)$	$c=-7$	$b=3$	$a=4$	
الجذر x_0			$\downarrow$	$x_0=1$
معاملات $Q(x)$	$c'=0$	$b'=7$	$a'=4$	

$$\begin{cases} a'=a=4 \\ b'=aa'+b=1(4)+3=7 \\ c'=x_0b'+c=1(7)-7=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 4x^2+3x-7=(x-1)(4x+7)$$

2) استعمال المرافق (خاصة بالجذور التربيعية):

مثال1

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\sqrt{x-1}-1}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{(\sqrt{x-1}-1)(\sqrt{x-1}+1)}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x-1}+1)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{\sqrt{x-1}+1}\right)=\frac{1}{2}$$

مثال2:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sqrt{5-x}-2}{\sqrt{x+8}-3}\right)=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(\sqrt{5-x}-2)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{x+8}+3)}{(\sqrt{x+8}-3)(\sqrt{5-x}+2)(\sqrt{x+8}+3)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(\frac{(1-x)(\sqrt{x+8}+3)}{(x-1)(\sqrt{x+8}+3)}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\left(-\frac{\sqrt{x+8}+3}{\sqrt{x+8}+3}\right)=-\frac{3}{2}$$

ملاحظة: لما يؤول x إلى $\pm\infty$، إما نستعمل المرافق في حالة تساوي معاملات x داخل الجذر وخارجه (المثال3)

أو نستعمل التحليل في حالة عدم تساوي المعاملات (المثال4)

مثال3:

$$\lim_{x\to +\infty}\left(x+1-\sqrt{x^2+x-2}\right)=\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{(x+1-\sqrt{x^2+x-2})(x+1+\sqrt{x^2+x-2})}{(x+1+\sqrt{x^2+x-2})}\right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{(x+1)^2 - (x^2+x-2)}{x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x+3}{x+1+|x|\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{x\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)} \right) \quad (x \to +\infty \Rightarrow |x| = x)$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1+\frac{3}{x}}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}} \right) = \frac{1}{2}$$

مثال4:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2x+1+\sqrt{x^2+x-2}\right) = \lim_{x \to -\infty} \left(2x+1+\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(2x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(2x+1-x\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}\right) \Rightarrow (x \to -\infty \Rightarrow |x| = -x)$$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left(x \left(\underbrace{2+\frac{1}{x}-\sqrt{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}}_{\to 1} \right) \right) = -\infty$$

2) استعمال العدد المشتق:

لاستعمال هذه الطريقة لا بد أن تكون النهاية من الشكل:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \right)$$

وهذه النهاية تساوي العدد المشتق $f'(x_0)$

مثال 1:

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=\lim_{x\to 2}\left(\frac{f(x)-f(2)}{x-2}\right)=f'(2)=\frac{1}{2}$$

$$f(x)=\sqrt{x-1}; f(2)=1; f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

مثال 2:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right)=f'(0)=1$$

$$f(x)=\sin(x)\,; f(0)=0; f'(x)=\cos(x)$$

نهاية دالة مركبة:

$$f=v\circ u:\begin{cases}\lim\limits_{x\to a} u(x)=b\\ \lim\limits_{x\to v} v(x)=c\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to a} f(x)=c$$

مثال:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\underbrace{\sqrt{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}}_{f(x)}\right);\begin{cases}\lim\limits_{x\to 2}\left(\underbrace{\frac{4x^2-2x-1}{x^2-5x+3}}_{u(x)}\right)=4\\ \lim\limits_{x\to 4}\left(\underbrace{\sqrt{x}}_{u(x)}\right)=2\end{cases}\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x)=2$$

النهايات بالمقارنة:

الحالة ①:

$$\begin{cases} g(x) \leq f(x) \leq h(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} h(x) = l \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = l$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+\cos(x)}{x+1}\right)$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$
$$\Rightarrow 2x-1 \leq 2x+\cos(x) \leq 2x+1$$
$$\Rightarrow \frac{2x+1}{x+1} \leq \frac{2x+\cos(x)}{x+1} \leq \frac{2x+1}{x+1}$$

ملاحظة: المتراجحة لم تتغير لأنه لما $(x \to +\infty)$ فإن: $(x+1>0)$

أما إذا كان $(x \to -\infty)$ فإن: $(x+1<0)$، منه تتغير المتراجحة عند القسمة على $(x+1)$

$$\begin{cases} \dfrac{2x-1}{x+1} \leq \dfrac{2x+\cos(x)}{x+1} \leq \dfrac{2x+1}{x+1} \\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x-1}{x+1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+1}{x+1}\right) = 2 \end{cases} \Rightarrow \frac{2x+\cos(x)}{x+1} = 2$$

الحالة ②:

$$\begin{cases} f(x) \geq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x}{2-\sin(x)}\right)$

$$-1 \leq \sin(x) \leq 1$$
$$\Rightarrow -1 \leq -\sin(x) \leq 1$$
$$\Rightarrow 1 \leq 2-\sin(x) \leq 3$$
$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\sin(x)} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{x}{3} \leq \frac{1}{2-\sin(x)} \leq x$$

$$\begin{cases} \dfrac{x}{2-\sin(x) \geq \dfrac{x}{3}} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\dfrac{x}{3}\right) = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{x}{2-\sin(x)}\right) = +\infty$$

الحالة ③:

$$\begin{cases} f(x) \leq g(x) \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$$

مثال:

احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2 + x\cos(x))$

$$-1 \leq \cos(x) \leq 1$$

$$\Rightarrow x \leq x\cos(x) \leq -x$$

$$\Rightarrow -2x^2 + x \leq -2x^2 + \cos(x) \leq -2x^2 - x$$

$$\begin{cases} -2x^2 + \cos(x) - 2x^2 - x \\ \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x^2 - x) = -\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} (-2x^2 + \cos(x)) = -\infty$$

ملاحظة:

غالبا ما نستعمل المقارنة لحساب نهايات الدوال المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ لما x يؤول $\pm\infty$.

حيث أن هذه الدوال لا تقبل نهاية عند $\pm\infty$.

ولحصر $f(x)$ دائما ننطلق من حصر الدالة المثلثية $(\sin(x)\,;\cos(x))$ بين (-1) و $(+1)$.

المستقيمات المقاربة:

① $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty \Rightarrow$ المستقيم $x = a$ مستقيم مقارب عمودي

(يوازي محور التراتيب)

② $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b \Rightarrow$ المستقيم $y = b$ مستقيم مقارب أفقي

(يوازي محور الفواصل)

③ $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \big(f(x) - (ax + b)\big) = 0 \Rightarrow$ المستقيم $y = ax + b$ مستقيم مقارب مائل

③

الدوال العددية

المسائل الشاملة

المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب-ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ-عين الأعداد الحقيقة a, b, c بحيث يكون من أجل كل عدد حقيقي $x\neq 1$:

$$f(x)=ax+b+\frac{cx+b}{(x-1)^2}$$

ب-ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) والمستقيم (d) الذي معادلته $y=x-2$؟ برر.

ج-حدد وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d)، ولتكن A نقطة تقاطعهما.

3) بين انه يوجد مماس (T) لـ (C_f) مواز للمستقيم (d).

4) بين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$، استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α.

5) مثل بيانيا المستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f).

6) استنتج بيانيا حلول المعادلة $f(x)=x+m$ حيث m وسيط حقيقي.

7) أ-نريد إيجاد نتيجة السؤال (5) باستعمال الحساب، بين أن فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=x+m$ هي حلول المعادلة (E) حيث:

$$(E):(m+2)x^2-(2m+7)x+m+4=0$$

ب-جد حسب قيم m حلول المعادلة (E).

الخليل للرياضيات

02 المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x^3 + 6x + 12$$

1) ادرس اتجاه تغير الدالة g.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $\alpha \in]-1.48; 1.47[$

ثم استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 6}{x^2 + 2}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

3) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x أن:

$$f'(x) = \frac{xg(x)}{(x^2 + 2)^2}$$

ثم ادرس اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.

4) أ- بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f).

ب- ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة لـ (Δ).

5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{3}{2}\alpha$$

ثم استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6) مثل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f).

المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $]-\infty; 2[\cup]2; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = \frac{3x-7}{2-x}$$

ونسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ- احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

ب- ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن النقطة $A(2; -3)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

3) بين أنه توجد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$، يطلب تعيين معادلة كل منهما.

4) اوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) مثل بيانيا المنحنى (C_f).

المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{1;3\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها، ثم فسر ذلك هندسيا.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أوجد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

4) أ- بين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$.

ب- بين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) مثل بيانيا المنحنى (C_f).

المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{3\}$ بـ:

$$f(x)=\frac{x^2-8x+16}{x-3}$$

ونسمي (C_f) المنحنى الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أوجد ثلاثة أعداد حقيقية: c,b,a بحيث كل x من D_f:

$$f(x)=ax+b+\frac{c}{x-3}$$

2) استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) عند $\pm\infty$ يطلب تعيين معادلة له.

-حدد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

3) أدرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

4) جد إحداثي النقطة ω تقاطع المستقيمين المقاربين، وأثبت أنها مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5) أنشئ المنحنى (C_f).

6) استنتج رسم المنحنى (C_h) الممثل للدالة h المعرفة بـ:

$$h(x)=\frac{(x-4)^2}{|x-3|}$$

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x) = 2x^3 - 6x^2 + 6x + 3$

1) ادرس تغيرات الدالة g.

2) أ- بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $-0.4 < \alpha < -0.3$

ب- حدد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + x - 4}{x - 1}$$

ونسمي (C_f) المنحني الممثل للدالة f في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}; \vec{\jmath})$.

1) بين من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن :

$$f(x) = x^2 - 2x - 1 - \frac{5}{x - 1}$$

2) أ- احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف.

ب- ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) احسب: $\lim\limits_{x \to \pm\infty} [f(x) - (x^2 - 2x - 1)]$

وماتفسيرك الهندسي للنتيجة.

4) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) و المنحني (C_p) الممثل للدالة:

$$p(x) = x^2 - 2x - 1$$

5) بين أن:

$$f(\alpha) = \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2$$

واستنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

6) أنشئ بيانيا كل من (C_p) و (C_f).

07 المسألة الشاملة رقم:

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

1) عين D_f مجموعة تعريف الدالة f، ثم بين أنه من أجل كل x من D_f فإن:

$$f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$$

حيث c, b, a أعداد حقيقية يُطلب تعيينها.

2) أ/ ادرس تغيرات الدالة f.

ب/ أوجد المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f) الممثل للدالة f.

ج/ ادرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

3) عين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

4) أنشئ بيانيا المنحنى (C_f).

(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$

1) عين مجموعة تعريف الدالة h.

2) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

3) أدرس استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 .

4) ادرس شفعية الدالة h.

5) استنتج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f)

6) ناقشا بيانيا حسب الوسيط الحقيقي m وجود وعدد حلول المعادلة:

$$(m-1)x^2-(3m+2)x+2m-1=0$$

المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهدة الحل

لتكن F دالة معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، حيث: $F(0)=0$، ومن أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$F'(x)=\frac{1}{x^2+1}$$

نقبل أن الدالة F موجودة ولا نريد إيجاد عبارتها $F(x)$.

(I) G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$G(x)=F(x)+F(-x)$$

1) برر أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$ واحسب $G'(x)$ من أجل كل x حقيقي.

2) احسب $G(0)$ واستنتج أن الدالة F فردية.

(II) H الدالة المعرفة على المجال $I=]0;+\infty[$ بـ:

$$H(x)=F(x)+F\left(\frac{1}{x}\right)$$

1) برر أنّ H تقبل الاشتقاق على I وأحسب $H'(x)$ من كل x من I.

2) برهن أنه من أجل كل $x\in I$ ، $H(x)=2F(1)$

3) استنتج أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[F(x)]=2F(1)$ ، ماذا ينتج عن المنحني (C) ؟

(III) T الدالة المعرفة على $]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[$ بِـ:

$$T(x)=F(\tan x)-x$$

1) أحسب $T'(x)$، ماذا ينتج عن الدالة T ؟

2) أحسب $F(1)$.

(IV)

1) انجز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$.

2) أرسم المنحني (C) ، ومستقيماته المقاربة ومماساته عند النقط ذات الفواصل -1، 0 و1.

المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهدة الحل

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 5$$

1) أ/ احسب $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g على $\mathbb{R}$ ، ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ أعط حصرا سعته 0.1 للعدد α.

جـ/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R} - \{1\}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 1}{(x-1)^2}$$

(C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) عيّن نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها واعط تفسيرا هندسيا للنتائج.

2) أكتب $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2}$ ، مع تحديد الأعداد الحقيقية a, b, c.

3) أ- بين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d) يطلب إعطاء معادلة ديكارتية له.

ب- ادرس الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f).

4) أ- شكل جدول تغيرات الدالة f.

ب- بين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β حيث $-1 < \beta < 0$.

ج- بين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$ ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

5) أحسب $f(0)$ ثم ارسم المستقيمين المقاربين و المنحني (C_f).

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1,1\}$ بـ:

$$h(x) = f(|x|)$$

أ- بين أن h زوجية .

ب- أشرح كيف تنشئ (C_h) ثم أنشئه.

ج- ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلتين:

$$f(x) = m \quad \text{و} \quad f(x) = x + m$$

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x - \sqrt{1+x^2}$$

1) ادرس تجاه تغير الدالة g على مجال تعريفها.

2) بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α يطلب تعيينه.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 2\sqrt{1+x^2} - x$$

1) أ- احسب نهاية الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب- برهن أنه من أجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

ج- شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+3x]$ وفسر النتيجة هندسيا.

3) أ- ليكن (d') المستقيم ذو المعادلة $y = x$ ، بين أن (d') مستقيم مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

ب- ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيمين (d) و (d').

4) انشئ بيانيا كلا من المستقيمين (d) و (d') و المنحني (C_f).

③

الدوال العددية

حُلول المسائل الشاملة

حل المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{1\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

-حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}[x]$$
$$=-\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x]$$
$$=+\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{<>\\ x\to1}}[f(x)]=\lim_{\substack{<>\\ x\to1}}\left[\frac{x^3-4x^2+8x-4}{(x-1)^2}\right]$$
$$=\frac{1}{0^+}$$
$$=+\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $x=1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $+\infty$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)^2-2(x-1)(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^4}$$
$$=\frac{(3x^2-8x+8)(x-1)-2(x^3-4x^2+8x-4)}{(x-1)^3}$$
$$=\frac{x^3-3x^2}{(x-1)^3}$$

$$= \frac{x^2(x-3)}{(x-1)^3}$$

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		0		1		3		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↗	$f(0)$	↗ $+\infty$	‖	$+\infty$ ↘	$f(3)$	↗	$+\infty$

2) أ- تعيين الأعداد a, b, c: من أجل كل $x \neq 0$ لدينا:

$$f(x) = ax + b + \frac{cx+b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{(ax+b)(x-1)^2 + cx + b}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{ax^3 + (2a+b)x^2 + (a-2b)x + 2b}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = -4 \\ a - 2b + c = 8 \\ 2b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$$

ب- استنتاج المستقيم المقارب المائل:

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - [x-2]) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(x - 2 + \frac{3x-2}{(x-1)^2} - [x-2]\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x-2}{(x-1)^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3}{x}\right) = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$ مستقيم مقارب مائل بجوار $\pm\infty$.

ج- وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (d):

<u>دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:</u>

$$f(x)-y=x-2+\frac{3x-2}{(x-1)^2}-x+2$$
$$=\frac{3x-2}{(x-1)^2}$$

لدينا: $(x-1)^2>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

x	$-\infty$ $\frac{2}{3}$ 1 $+\infty$
$3x-2$	$-$ 0 $+$ ‖ $+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (d) لما: $x\in\left]-\infty;\frac{2}{3}\right[$.
- (C_f) يقطع (d) في النقطة $A\left(\frac{2}{3};\frac{-4}{3}\right)$
- (C_f) فوق (d) لما: $x\in\left]\frac{2}{3};1\right[\cup\left]1;+\infty\right[$

3) إيجاد معادلة المماس (T):

المماس (T) يوازي المستقيم (d) معناه: يوجد a حيث: $f'(a)=1$

$$f'(a)=1\Rightarrow\frac{a^2(a-3)}{(a-1)^3}=1$$
$$\Rightarrow a^2(a-3)=(a-1)^3$$
$$\Rightarrow 3a-1=0$$
$$\Rightarrow a=\frac{1}{3}$$

ومنه معادلة المماس (T) هي: $(T): f'(a)(x-a)+f(a)$

$$\boxed{(T): y=x-\frac{1}{3}-\frac{47}{12}}$$

1) تبيين أن المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على المجال $]-\infty;1[$

ولدينا: $\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to1}f(x)=+\infty$

ولدينا: $\left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty\right)\times\left(\lim_{x\to1}f(x)=+\infty\right)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة: $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]-\infty;1[$:

- استنتج قيمة مقربة إلى 10^{-2} للعدد α:

α	$-\infty$	$\cdots$	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	$\cdots$	0.98	0.99	1
$f(\alpha)$	$+\infty$	$\cdots$	-0.92	-0.58	-0.18	0.25	0.76	$\cdots$	2348.97	9698.98	$+\infty$

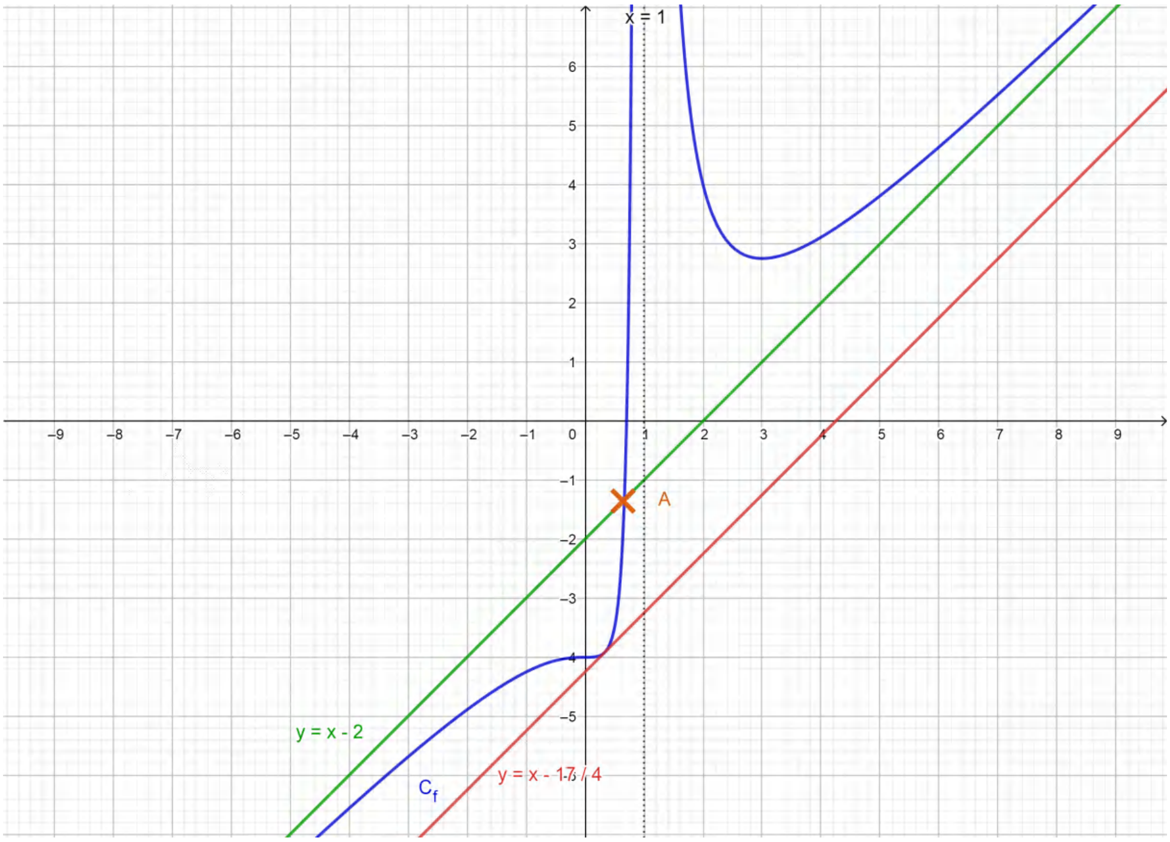
من الجدول نلاحظ أن: $0.70<\alpha<0.71$

1) التمثيل البياني للمستقيم (d) والمماس (T) والمنحنى (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 2$
- نرسم معادلة المماس (T) ذو المعادلة $y = x - \frac{17}{4}$
- نعين نقطة A تقاطع المنحنى (C_f) مع (d)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



2) استنتاج بيانيا حلول المعادلة $f(x) = x + m$:

لما	$m < \frac{-17}{4}$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$m = \frac{-17}{4}$	المعادلة تقبل حلا مضاعفا
لما	$\frac{-17}{4} < m < -2$	المعادلة تقبل حلان
لما	$m = -2$	المعادلة تقبل حل وحيد $x = \frac{2}{3}$
لما	$m > -2$	المعادلة تقبل حلان

حل المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة اتجاه تغير الدالة g:

الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ومنه: $g'(x) = 3x^2 + 6$

ولدينا $3x^2 + 6 > 0$

ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α :

بما أن الدالة g مستمرة ومتزادية تماما على $\mathbb{R}$ ولدينا: $g(-1.48) = -0.12$ و $g(-1.47) = 0.0035$

ولدينا $g(-1.48) \times g(-1.47) < 0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيد α.

- استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(3x^2)(x^2+2)-(2x)(x^3-6)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{x(x^3+6x+12)}{(x^2+2)^2} \\ &= \frac{xg(x)}{(x^2+2)^2} \end{aligned}$$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	-3	$\nearrow$	$+\infty$

2) أ- تبيين أن المستقيم (Δ) مقارب مائل:

لدينا:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-y] &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6}{x^2+2}-x\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{x^3-6-x^3-2x}{x^2+2}\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-6-2x}{x^2+2}\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2x}{x^2}\right] \\ &= \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{-2}{x}\right] = 0 \end{aligned}$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

ب- دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة لـ (Δ):

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$ على $\mathbb{R}$:

$$f(x)-y=\frac{-2x-6}{x^2+2}$$

لدينا: $(x^2+2)>0$ ومنه الإشارة من $(-2x-6)$:

$$\begin{aligned} -2x-6=0 &\Rightarrow -2x=6 \\ &\Rightarrow x=-3 \end{aligned}$$

ومنه إشارة $f(x)-y$:

x	$-\infty$ $\quad$ -3 $\quad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$ $\quad$ 0 $\quad$ $-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) على المجال: $]-\infty;-3[$
- (C_f) يقطع (Δ) عند النقطة $A(-3;-3)$
- (C_f) تحت (Δ) على المجال: $]-3;+\infty[$

3) تبين أن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$:

يكفي أن نبرهن أن $f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=0$:

$$\begin{aligned} f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha &= \frac{\alpha^3-6}{\alpha^2+2}-\frac{3}{2}\alpha \\ &= \frac{2\alpha^3-12-3\alpha^3-6\alpha}{\alpha^2+2} \\ &= \frac{-(\alpha^3+6\alpha+12)}{\alpha^2+2} \\ &= -\frac{g(\alpha)}{\alpha^2+2} \end{aligned}$$

ولدينا سابقا: $g(\alpha)=0$ ومنه:

$$f(\alpha)-\frac{3}{2}\alpha=-\frac{0}{\alpha^2+2}=0$$

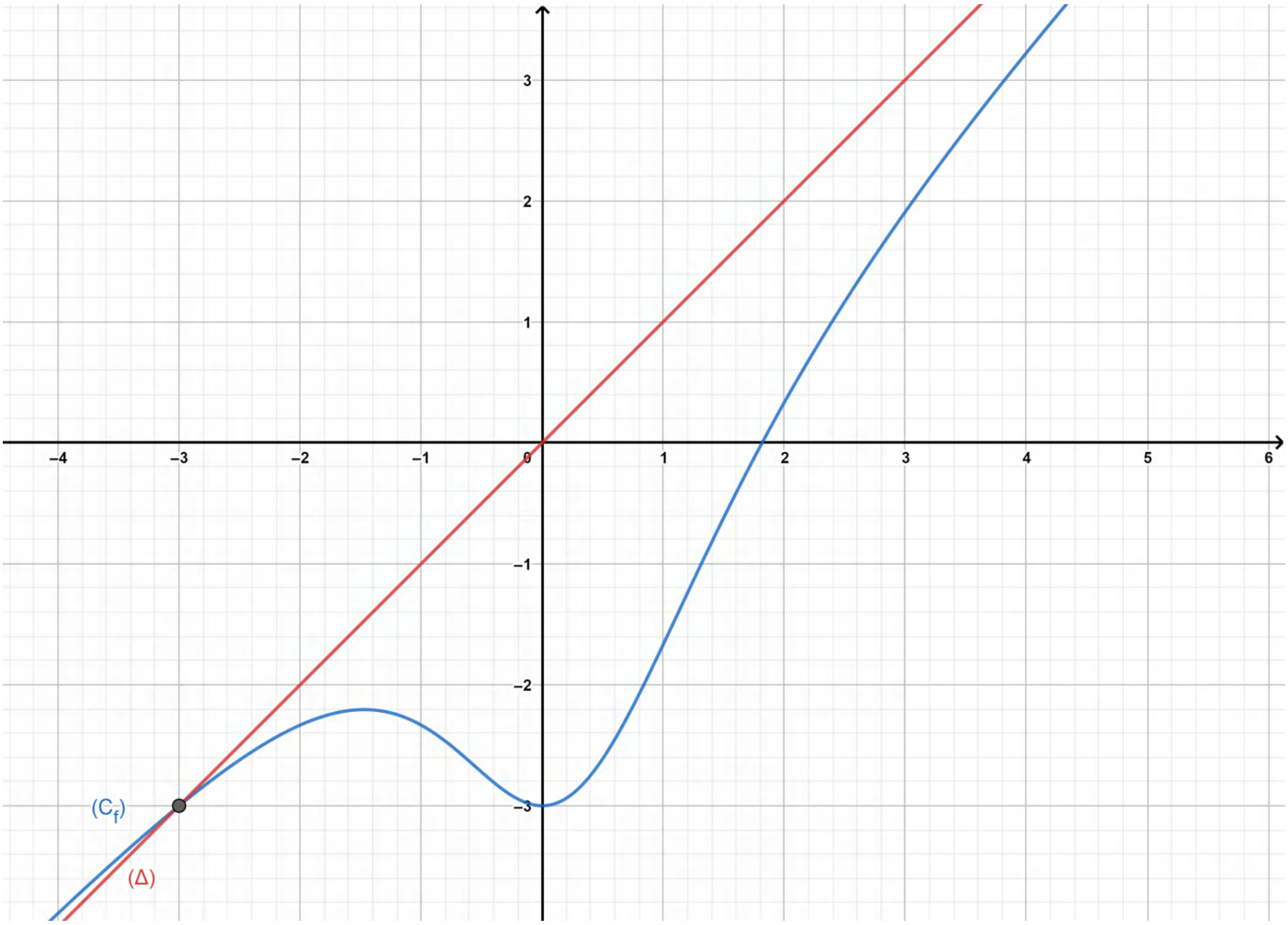
إذن: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا: $-1.48<\alpha<-1.47$ ولدينا: $f(\alpha)=\frac{3}{2}\alpha$

$$\frac{3}{2}(-1.48)<\frac{3}{2}\alpha<\frac{3}{2}(-1.47)$$
$$-2.22<f(\alpha)<-2.21$$

4) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحني (C_f):



3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
1
2
3
4
5
6
(C_f)
(Δ)

حل المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهــدة المسألة

4) أ- حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x-7}{2-x}\right] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{3x}{-x}\right] = -3$$

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x-7}{2-x}\right] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{3x}{-x}\right] = -3$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 2 \\ <}} \left[\frac{3x-7}{2-x}\right] = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 2 \\ >}} \left[\frac{3x-7}{2-x}\right] = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = -3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 2$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للإشتقاق على مجال تعريفها

أولا نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3(2-x)-(3x-7)}{(2-x)^2} = \frac{-1}{(2-x)^2} < 0$$

لدينا $f'(x) < 0$ ومنه الدالة f متناقصة تماما:

جدول التغيرات:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$\|\|$	$-$
$f'(x)$	$-3 \searrow -\infty$	$\|\|$	$+\infty \searrow -3$

5) تبيين أن النقطة A هي مركز تناظر لـ (C_f):

تذكير

نقول أن النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر (C_f) إذا تحقق ما يلي:

$$\begin{cases} 2\alpha - x \in D_f \\ f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta \end{cases}$$

أو

$$\begin{cases} (\alpha + x) \in D_f \\ (\alpha - x) \in D_f \\ f(\alpha + x) + f(\alpha - x) = 2\beta \end{cases}$$

- نثبت أنّ $(2(2) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

$\Leftarrow$ $x \in]-\infty;2[$ أو $x \in]2;+\infty[$ $\Leftarrow$ $x < 2$ أو $x > 2$ $\Leftarrow$ $-x > -2$ أو $-x < -2$

$\Leftarrow$ $(4-x) < 2$ أو $(4-x) > 2$ $\Leftarrow$ $(4-x) \in]-\infty;2[$ أو $(4-x) \in]2;+\infty[$

إذن: $(4-x) \in]-\infty;2[\cup]2;+\infty[$

- نثبت أنّ $f(2(4)-x) + f(x) = 2(-3)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} f(4-x) + f(x) &= \frac{3(4-x)-7}{2-(4-x)} + \frac{3x-7}{2-x} \\ &= \frac{5-3x}{-2+x} + \frac{7-3x}{x-2} \\ &= \frac{12-6x}{-2+x} \\ &= \frac{-6(-2+x)}{-2+x} \\ &= -6 \end{aligned}$$

إذن النقطة $A(2;-3)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

6) إيجاد نقطتان من (C_f) يكون المماس عند كل منهما موازيا للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$:

◄ المماس لـ (C_f) عن النقطة ذات الفاصلة a يعطى بالمعادلة التالية: $y = f'(a)(x-a) + f(a)$ ►

لدينا المماس مواز للمستقيم ذو المعادلة $y = -x + 4$ $\Leftarrow$ $f'(a) = -1$

$\Leftarrow$ $-\frac{1}{(2-a)^2} = -1$ $\Leftarrow$ $a^2 - 4a + 3 = 0$

لدينا: $\Delta = (-4)^2 - 4(1)(3) = 4 > 0$ إذن:

$$\begin{cases} a_1 = \dfrac{4-2}{2} = 1 \\ a_2 = \dfrac{4+2}{2} = 3 \end{cases}$$

إذن يوجد مماسان لـ (C_f) موازيان للمستقيم ذو المعادلة: $y = -x + 4$، معادلتيهما:

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(a_1)(x-a_1) + f(a_1) \\ &= f'(1)(x-1) + f(1) \\ &= -1(x-1) + (-4) \\ &= -x - 3 \\ y_2 &= f'(a_2)(x-a_2) + f(a_2) \\ &= -1(x-3) + (-2) \\ &= -x + 1 \end{aligned}$$

إذن:

$$\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$$

7) إيجاد نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

- مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0) = \frac{3(0) - 7}{2 - (0)} = -\frac{7}{2}$$

ومنه:

$$(C_f) \cap (yy') = \left\{\left(0; -\frac{7}{2}\right)\right\}$$

- مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x) = 0$ ►

$$f(x) = 0 \Rightarrow \frac{3x-7}{2-x} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 7 = 0 \\ \text{و} \\ 2 - x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{7}{3} \\ \text{و} \\ x \neq 2 \end{cases}$$

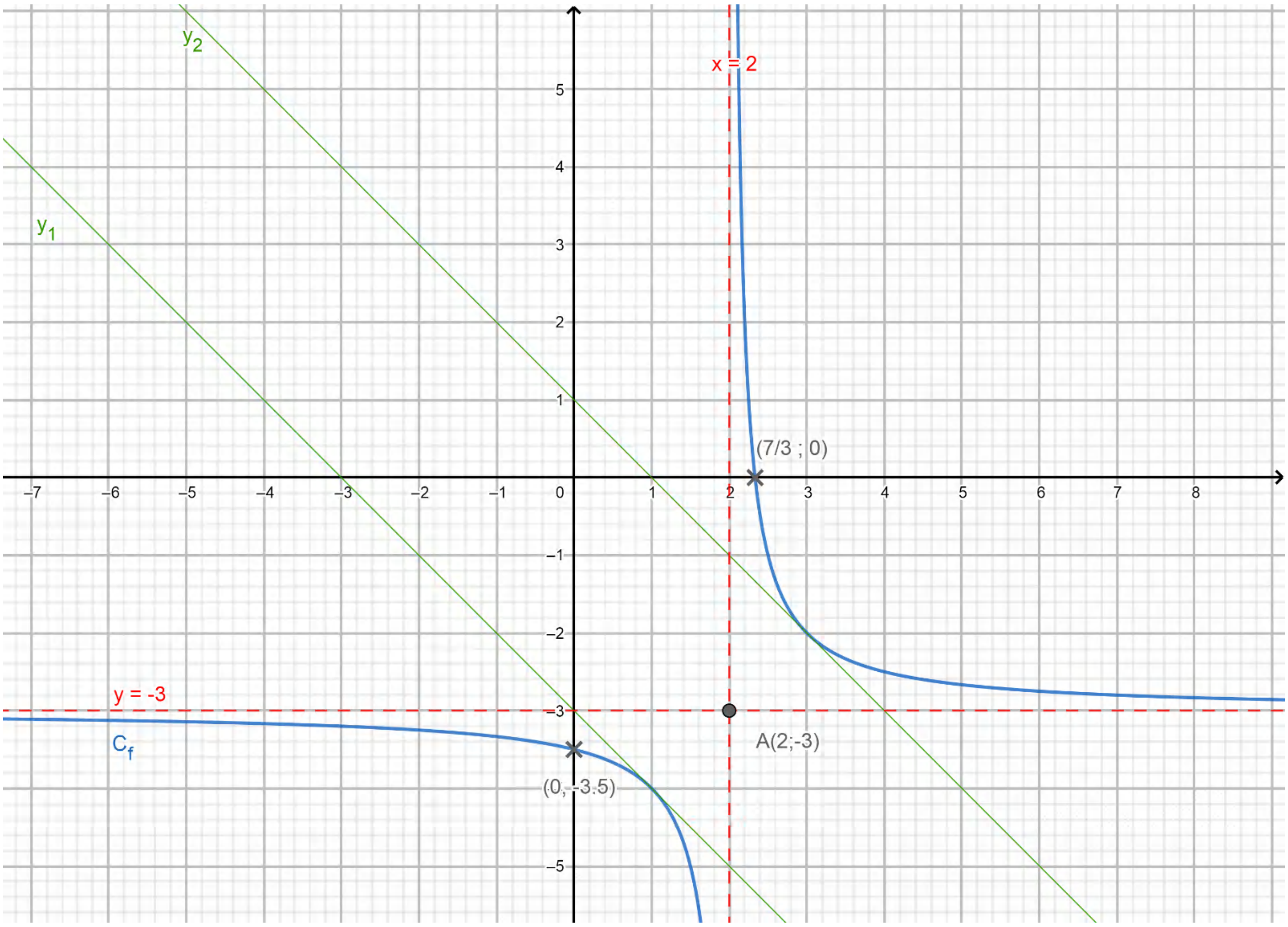
ومنه:

$$(C_f) \cap (xx') = \left\{\left(\frac{7}{3}; 0\right)\right\}$$

8) التمثيل البياني لـ المنحنى (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = -3$ و $x = 2$
- نرسم معادلات المماس: $\begin{cases} y_1 = -x - 3 \\ y_2 = -x + 1 \end{cases}$
- نعين النقطة $A(2; -3)$ مركز تناظر لـ (C_f).
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



حل المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهــدة المسألة

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R} - \{1;3\}$ معناه الدالة f معرفة على المجال: $]-\infty;1[\cup]1;3[\cup]3;+\infty[$

لدينا إشارة المقام كالآتي:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
(x^2-4x+3)		$+$	0	$-$	0	$+$	

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{3x^2}{x^2}\right] = 3$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{3x^2}{x^2}\right] = 3$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to1}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to1}}[f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to 3}}[f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x\to 3}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 3}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 3}}\left[\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}$$
$$= +\infty$$

- تفسير النتائج هندسيا:

- $y = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور الفواصل بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$
- $x = 3$ معادلة مستقيم مقارب لـ (C_f) مواز لحامل محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

2) دراسة إتجاه تغير الدالة f:

لدينا الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها

أولا: نحسب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{(3x-12)(x^2-4x+3)-(2x-4)(3x^2-12x+10)}{(x^2-4x+3)^2}$$
$$= \frac{-2x+4}{(x^2-4x+3)^2}$$

ثانيا: ندرس إشارة $f'(x)$

لدينا $(x^2-4x+3)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+4)$

لدينا: $-2x+4=0$ ومنه $-2x=-4$ ومنه $x=2$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		2		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	3	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	2	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	3

3) إيجاد نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

مع محور التراتيب:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور التراتيب نحسب $f(0)$ ►

$$f(0)=\frac{3(0)^2-12(0)+10}{(0)^2-4(0)+3}$$
$$=\frac{10}{3}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(yy')=\left\{\left(0;\frac{10}{3}\right)\right\}$$

مع محور الفواصل:

◄ لإيجاد نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل نحل المعادلة $f(x)=0$ ►

$$f(x)=0\Rightarrow\frac{3x^2-12x+10}{x^2-4x+3}=0\Rightarrow\begin{cases}3x^2-12x+10\ldots(1)\\ \text{و}\\ x^2-4x+3\neq 0\end{cases}$$

نحل (1) نجد:

$$\Delta=(-12)^2-4(3)(10)=24$$
$$\begin{cases}x_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12-\sqrt{24}}{6}\\ x_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{12+\sqrt{24}}{6}\end{cases}$$

ومنه:

$$(C_f)\cap(xx')=\left\{\left(\frac{12-\sqrt{24}}{6};0\right),\left(\frac{12+\sqrt{24}}{6};0\right)\right\}$$

4) أ- تبيين أنه إذا كان $x\in D_f$ فإن $(4-x)\in D_f$:

لدينا $x\in D_f$ ومنه: $x\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;3[\,\cup\,]3;+\infty[$

ومنه: $x\in\,]3;+\infty[$ أو $x\in\,]1;3[$ أو $x\in\,]-\infty;1[$

ومنه: $x>3$ أو $1<x<3$ أو $x<1$

ومنه: $-x<-3$ أو $-3<-x<-1$ أو $-x>-1$

ومنه: $4-x<1$ أو $1<4-x<3$ أو $4-x>3$

ومنه: $(4-x)\in\,]-\infty;1[$ أو $(4-x)\in\,]1;3[$ أو $(4-x)\in\,]3;+\infty[$

إذن: $(4-x)\in\,]-\infty;1[\,\cup\,]1;3[\,\cup\,]3;+\infty[$

ب- تبين أن المستقيم ذو المعادلة $x=2$ محور تناظر لـ (C_f):

تذكير

لإثبات أن المستقيم ذو المعادلة $x = a$ محور تناظر لـ (C_f) نبين ما يلي:

$$\begin{cases} 2a - x \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$$

أولا نثبت أنّ $(2(2) - x) \in D_f$

من السؤال السابق لدينا: $(4 - x) \in D_f$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(4) - x) = f(x)$:

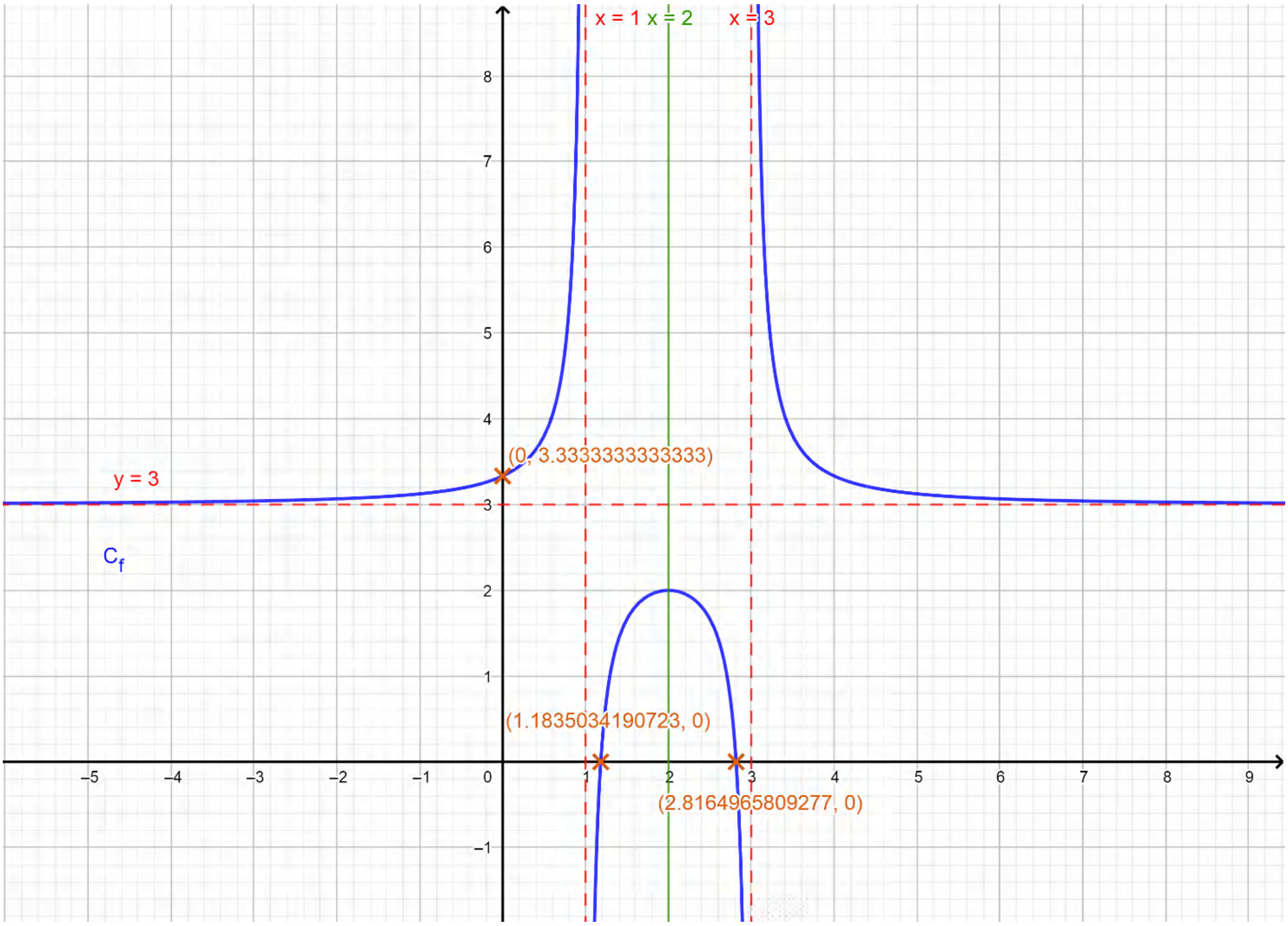
$$\begin{aligned} f(4 - x) &= \frac{3(4 - x)^2 - 12(4 - x) + 10}{(4 - x)^2 - 4(4 - x) + 3} \\ &= \frac{3(4^2 - 2(4)(x) + x^2) - 48 + 12x + 10}{4^2 - 2(4)(x) + x^2 - 16 + 4x + 3} \\ &= \frac{3(16 - 8x + x^2) - 38 + 12x}{x^2 - 4x + 3} \\ &= \frac{3x^2 - 12x + 10}{x^2 - 4x + 3} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

اذن المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f).

5) التمثيل البياني للمنحني (C_f):

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $y = 3$ و $x = 1$ و $x = 3$
- نرسم المستقيم ذو المعادلة $x = 2$ محور تناظر لـ (C_f)
- نعين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات (xx') و (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)


x = 1
x = 2
x = 3
y = 3
C_f
(0, 3.3333333333333)
(1.1835034190723, 0)
(2.8164965809277, 0)

حل المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

1) إيجاد الأعداد c, b, a:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{x-3} = \frac{ax^2 - 3ax + bx - 3b + c}{x-3} = \frac{ax^2 + (b-3a)x - 3b + c}{x-3}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -8 \\ -3b + c = 16 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -5 \\ c = 1 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 5 + \frac{1}{x-3}$$

2) استنتاج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ):

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}[f(x) - (x-5)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[x - 5 + \frac{1}{x-3} - (x-5)\right] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[\frac{1}{x-3}\right] = 0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة $y = x - 5$ مقارب مائل بجوار $\pm\infty$

- تحديد وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

<u>ندرس إشارة الفرق: $f(x) - y$:</u>

$$f(x) - y = \frac{1}{x-3}$$

لدينا: $1 > 0$ ، إذن الإشارة من إشارة المقام: $(x-3)$:

x	$-\infty$ 3	$+\infty$
$\frac{1}{x-3}$	$-$	$+$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) فوق (Δ)

3) دراسة تغيرات الدالة f:

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to 3}}[f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x\to 3}}\left[x-5+\frac{1}{x-3}\right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to 3}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 3}}\left[x-5+\frac{1}{x-3}\right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2-8x+16}{x-3}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^2}{x}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

التفسير الهندسي:

- المستقيم $x = 3$ مستقيم مقارب عمودي لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$.

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^2}$$

لدينا: $(x-3)^2 > 0$ ومنه الإشارة من (x^2-6x+8):

$$\Delta = 36 - 4(1)(8) = 4 > 0$$

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6-2}{2} = 2 \\ x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{6+2}{2} = 4 \end{cases}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ 2 3 4 $+\infty$

$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	-4	$\searrow -\infty$	$+\infty \searrow$	0	$\nearrow +\infty$

4) إيجاد إحداثي النقطة ω:

$$\begin{cases} y = x - 5 \dots (1) \\ x = 3 \dots (2) \end{cases}$$

نعوض (2) في (1) نجد: $y = 3 - 5 = -2$ ومنه : $\omega(3; -2)$

- اثبات أنّ ω مركز تناظر للمنحني (C_f):

أولا نثبت أنّ $(2(3) - x) \in D_f$

لدينا $x \in D_f$ معناه: $x \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

$\Leftarrow$ $x \in]3; +\infty[$ أو $x \in]-\infty; 3[$ $\Leftarrow$ $x > 3$ أو $x < 3$ $\Leftarrow$ $-x < -3$ أو $-x > -3$

$\Leftarrow$ $6 - x < 3$ أو $(6 - x) > 3$ $\Leftarrow$ $(6 - x) \in]3; +\infty[$ أو $(6 - x) \in]-\infty; 3[$

إذن: $(6 - x) \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$

ثانيا نثبت أنّ $f(2(3) - x) + f(x) = 2(-2)$:

لدينا:

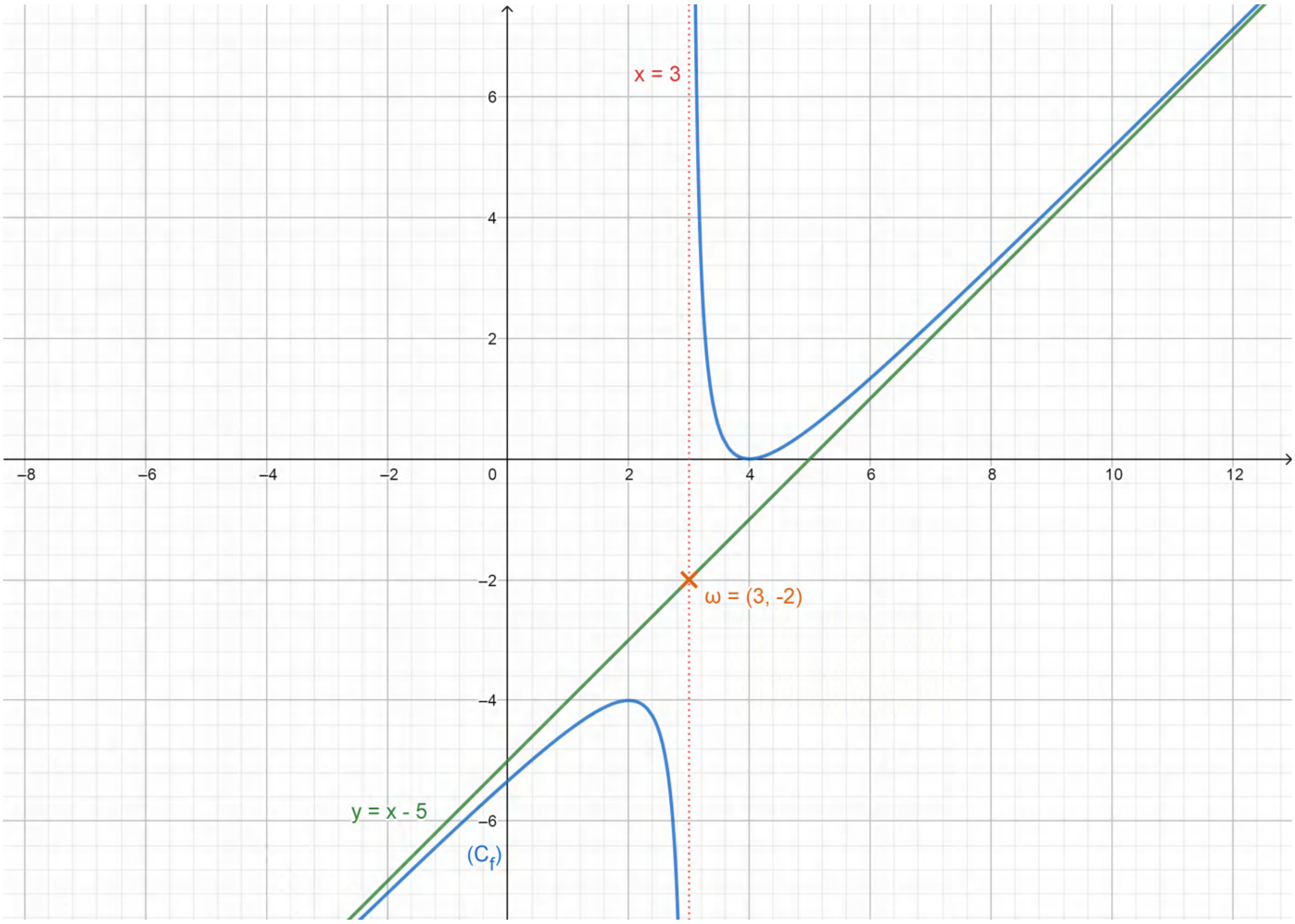
$$\begin{aligned} f(6 - x) + f(x) &= 6 - x - 5 + \frac{1}{6 - x - 3} + x - 5 + \frac{1}{x - 3} \\ &= \frac{1}{3 - x} + \frac{1}{x - 3} - 4 \\ &= \frac{1}{3 - x} - \frac{1}{3 - x} - 4 \\ &= -4 \end{aligned}$$

إذن النقطة $\omega(3; -2)$ هي مركز تناظر لـ (C_f).

5) التمثيل البياني:

خطوات إنشاء المنحنى (C_f) على معلم متعامد ومتجانس:

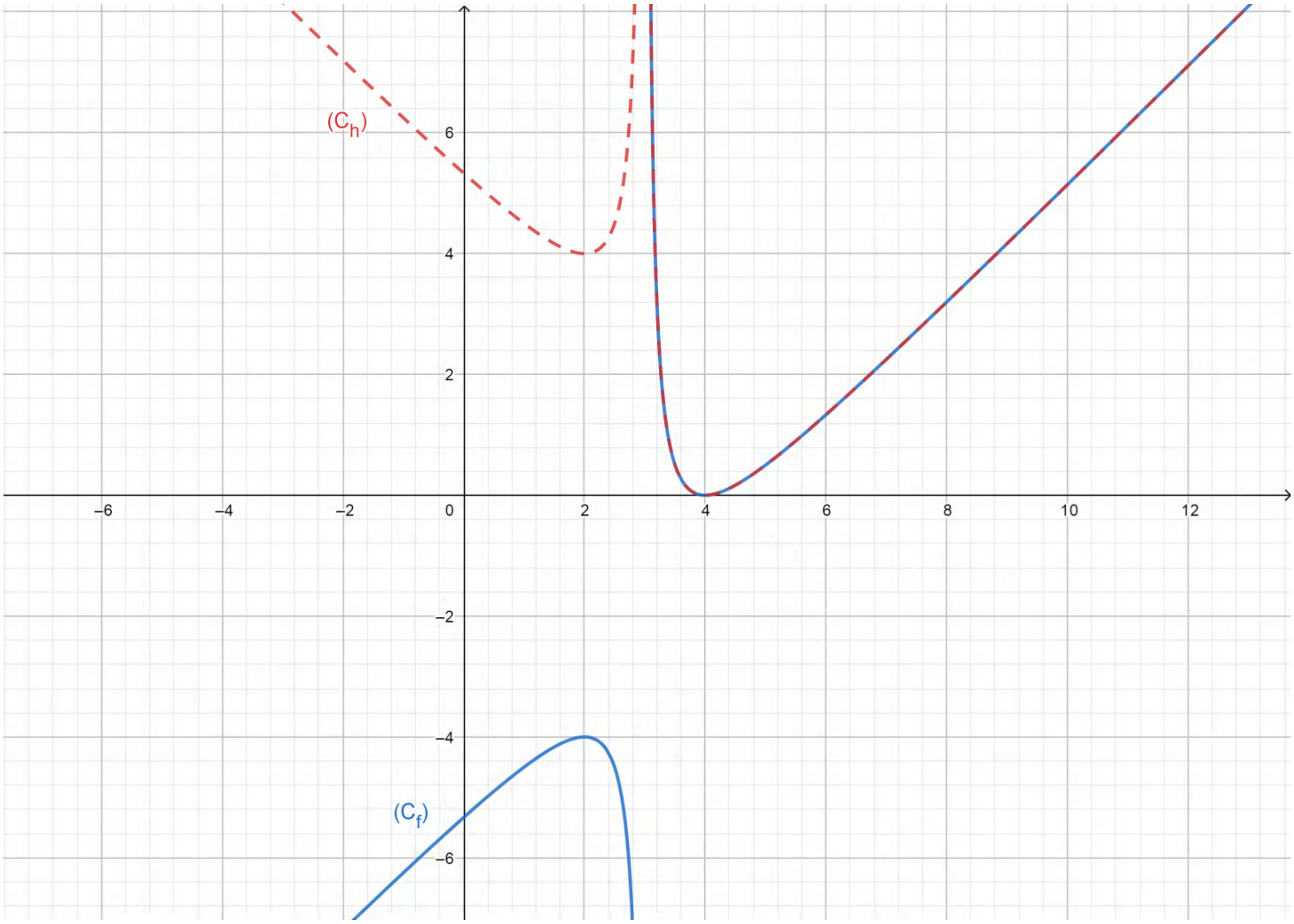
- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$
- نرسم المستقيم المقارب المائل ذو المعادلة $y = x - 5$.
- نعين ω مركز تناظر المنحنى (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) استنتاج رسم المنحني (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) إذا كان $f(x) \geq 0$

(C_h) يناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$.



(C_h)
(C_f)
-6
-4
-2
0
2
4
6
8
10
12

حل المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^1}+\frac{3}{x^3}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x^3-6x^2+6x+3]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(2-\frac{6}{x}+\frac{6}{x^1}+\frac{3}{x^3}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 6x^2-12x+6$$
$$= 6(x-1)^2 \geq 0$$

- تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	3	↗	$+\infty$

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

لدينا الدلة g رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(-0.3)=0.606$ و $g(-0.4)=-4.88$

ولدينا: $g(-0.3)\times g(-0.4)<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

ب- تحديد حسب قيم x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x يختلف عن 1 أن $f(x)=x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}$:

$$x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}=\frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$=\frac{(x^2-2x-1)(x-1)-5}{x-1}$$
$$=\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}$$
$$=f(x)$$

2) أ- حساب النهايات عند حدود مجموعة التعريف:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}[x^2]$$
$$=+\infty$$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+x-4}{x-1}\right]$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}[x^2]$$
$$=+\infty$$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to1}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{< \\ x\to x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$
$$=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^-}\right]$$
$$=+\infty$$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}[f(x)]=\lim\limits_{\substack{> \\ x\to1}}\left[x^2-2x-1-\frac{5}{x-1}\right]$
$$=\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left[-2-\frac{5}{0^+}\right]$$
$$=-\infty$$

نلاحظ أن المستقيم $(x=1)$ مقارب لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=2x-2+\frac{5}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2(x-1)^3+5}{(x-1)^2}$$
$$=\frac{2x^3-6x^2+6x+3}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{g(x)}{(x-1)^2}$$

لدينا $(x-1)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة $g(x)$.

<u>ثانيا: جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$	α		1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	||	$+$
$f(x)$	$+\infty \searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow +\infty$	|| $-\infty$	$\nearrow +\infty$

3) حساب: $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)]$:

- $\lim_{x\to\pm\infty}[f(x)-(x^2-2x-1)] = \lim_{x\to\pm\infty}\left[-\frac{5}{x-1}\right] = 0$

المنحني (C_p) الممثل للدالة: (x^2-2x-1) هو منحني تقارب للدالة f بجوار $\pm\infty$

4) دراسة الوضع النسبي بين (C_p) والمنحني (C_f):

<u>دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-p(x)]$</u>

لدينا:

$$f(x)-p(x) = -\frac{5}{x-1}$$
$$= \frac{5}{1-x}$$

لدينا: $5 > 0$ إذن الإشارة من المقام

$$1-x=0 \Rightarrow x=1$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-p(x)$	$+$	||	$-$
الوضعية	(C_f) فوق (C_p)	||	(C_f) تحت (C_p)

5) تبيين أن $\left[f(\alpha) = \frac{15}{2(1-\alpha)} - 2\right]$:

يكفي أن نثبت أن: $\left(f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = 0\right)$

لدينا: $g(\alpha) = 0$ ، ولدينا:

$$f(\alpha) - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2 = \alpha^2 - 2\alpha - 1 - \frac{5}{\alpha-1} - \frac{15}{2(1-\alpha)} + 2$$
$$= \frac{2(\alpha-1)(\alpha^2-2\alpha-1) - 2(5) + 15 + 2\big(2(\alpha-1)\big)}{2(\alpha-1)}$$

$$= \frac{2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 6\alpha + 3}{2(\alpha - 1)}$$
$$= \frac{g(\alpha)}{2(\alpha - 1)} = \frac{0}{2(\alpha - 1)}$$
$$= 0$$

-حصرا $f(\alpha)$:

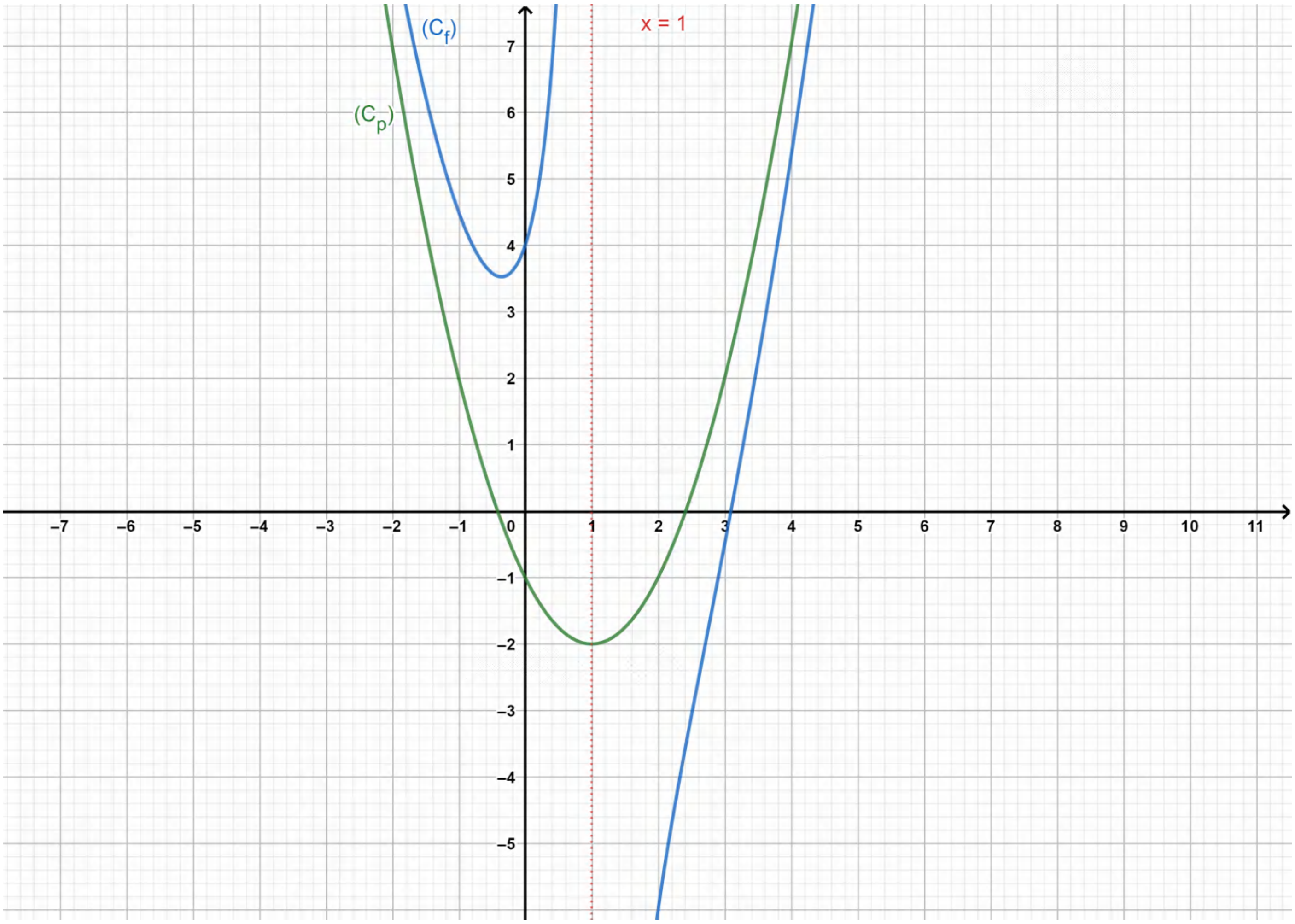
لدينا:

$$0.4 < \alpha < -0.3$$
$$0.3 < -\alpha < 0.4$$
$$1.3 < 1 - \alpha < 1.4$$
$$2.6 < 2(1 - \alpha) < 2.8$$
$$\frac{1}{2.8} < \frac{1}{2(1 - \alpha)} < \frac{1}{2.6}$$
$$\frac{15}{2.8} - 2 < \frac{15}{2(1 - \alpha)} - 2 < \frac{15}{2.6} - 2$$
$$3.36 < f(\alpha) < 3.77$$

7) التمثيل البياني لكل من (C_p) و (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 1$
- نرسم المنحني المقارب ذو المعادلة $(x^2 - 2x - 1)$.
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(C_f)
(C_p)
x = 1

07 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I) لتكن الدالة f المعرفة بالعبارة:

$$f(x)=\frac{(x+1)^2}{x^2-3x+2}$$

1) تعيين D_f مجموعة تعريف الدالة f:

لكي تكون الدالة f معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3x+2\neq 0$$
$$(x-1)(x-2)\neq 0$$
$$\Rightarrow\begin{cases}x-1\neq 0\\ \text{و}\\ x-2\neq 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ \text{و}\\ x\neq 2\end{cases}$$

ومنه: $D_f=\mathbb{R}-\{1;2\}$

- تبين أنه من أجل كل x من D_f فإن: $f(x)=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}$:

$$\begin{aligned}f(x)&=a+\frac{b}{x-1}+\frac{c}{x-2}\\&=\frac{a(x-1)(x-2)+b(x-2)+c(x-1)}{(x-1)(x-2)}\\&=\frac{ax^3+(-3a+b+c)x+(2a-2b-c)}{x^2-3x+2}\end{aligned}$$

بالمطابقة نجد:

$$\begin{cases}a=1\\-3a+b+c=2\\2a-2b-c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b+c=5\\2b+c=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=5-c\\c=9\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=1\\b=-4\\c=9\end{cases}$$

ومنه:

$$f(x)=1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}$$

2) أ/ دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب النهايات:

- $\lim\limits_{x\to\pm\infty}[f(x)]=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]=1$
- $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)]=\lim\limits_{x\to 1}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]=\lim\limits_{x\to 1}\left[-8-\frac{4}{0}\right]$

$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to 2}[f(x)] = \lim_{x\to 2}\left[1-\frac{4}{x-1}+\frac{9}{x-2}\right]$$
$$= \lim_{x\to 2}\left[-3+\frac{9}{0}\right]$$
$$= +\infty$$

ثانيا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{4}{(x-1)^2} - \frac{9}{(x-2)^2}$$
$$= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{4(x-2)^2 - 9(x-1)^2}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{-5x^2+2x+7}{(x^2-3x+2)^2}$$
$$= \frac{(x+1)\left(x-\frac{7}{5}\right)}{(x^2-3x+2)^2}$$

لدينا: المقام $(x^2-3x+2)^2 \geq 0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$(x+1)\left(x-\frac{7}{5}\right) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ \text{و} \\ x-\frac{7}{5}=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ \text{و} \\ x=\frac{7}{5} \end{cases}$$

ثالثا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		1		$\frac{7}{5}$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	
$f(x)$	1	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-24	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1

ب/ المستقيمات المقاربة للمنحني (C_f):

- $y = 1$ مستقيم مقارب أفقي بجوار $\pm\infty$
- $x = 1$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$
- $x = 2$ مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$

ج/ دراسة الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمقارب الأفقي (Δ):

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x) - y = 1 - \frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2} - 1$$

$$= -\frac{4}{x-1} + \frac{9}{x-2}$$
$$= \frac{-4(x-2) + 9(x-1)}{(x-1)(x-2)}$$
$$= \frac{5x-1}{(x-1)(x-2)}$$

إشارة الكسر من إشارة البسط × إشارة المقام

دراسة إشارة البسط:

$$5x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{5}$$

دراسة إشارة المقام:

$$(x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x - 1 = 0 \\ \text{و} \\ x - 2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ \text{و} \\ x = 2 \end{cases}$$

x	$-\infty$		$\frac{1}{5}$		1		2		$+\infty$
$5x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x^2-3x+2		$+$		$+$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$-$	0	$-$		$-$		$+$	
الوضعية		(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $x = \frac{1}{5}$	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) تحت (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	

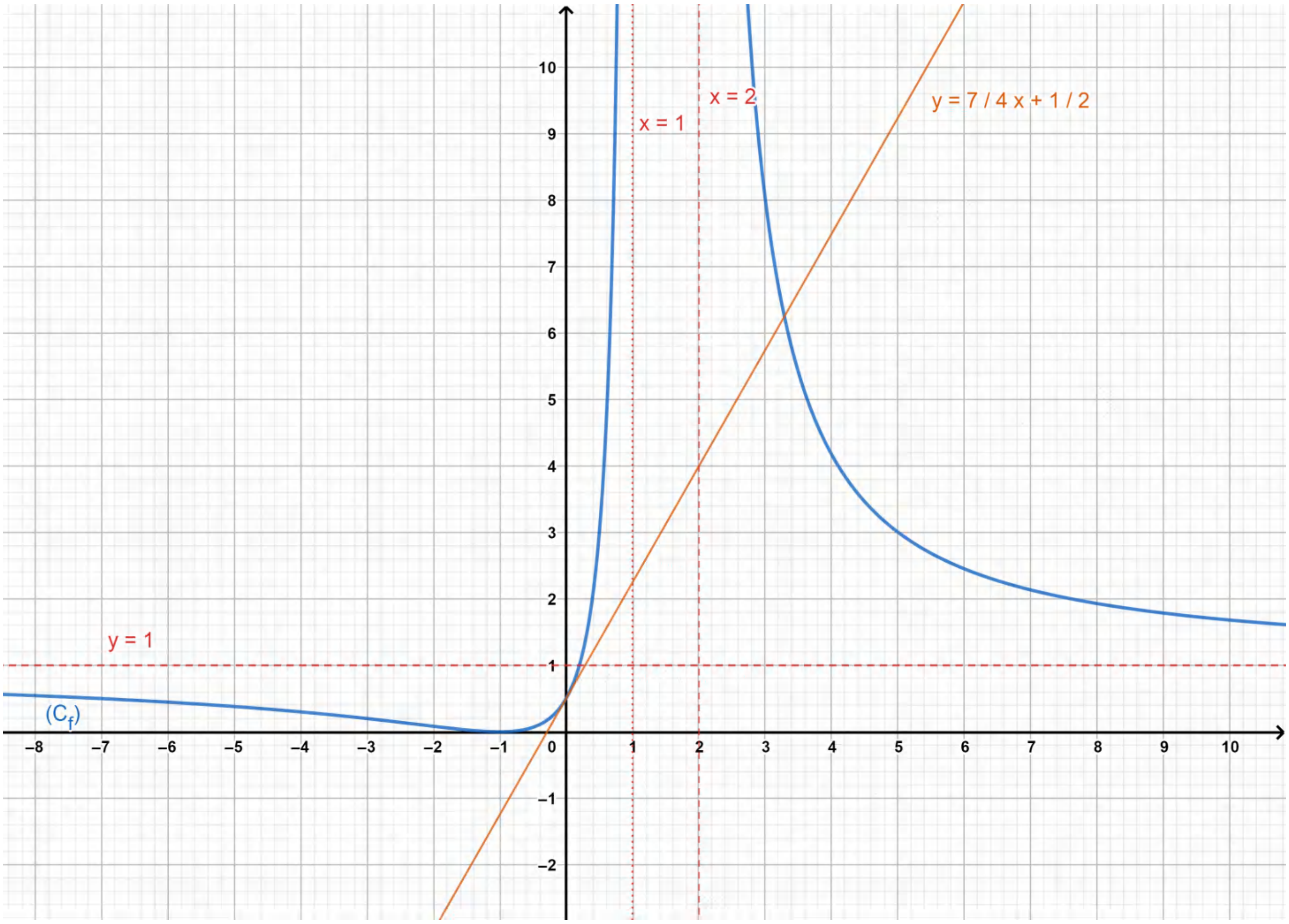
3) تعيين تقريب تآلفي للدالة f عند 0.

$$y = f'(0)(x-0) + f(0)$$
$$y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$$

4) التمثيل البياني:

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 3$
- نعين المماس ذو المعادلة $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II) نعرف الدالة h كما يلي:

$$h(x)=\frac{x^2+2|x|+1}{x^2-3|x|+2}$$

1) تعيين مجموعة تعريف الدالة h:

لتكون الدالة h معرفة يجب أن يكون:

$$x^2-3|x|+2\neq 0 \Rightarrow \begin{cases} x^2-3x+2\neq 0, x\geq 0 \\ x^2+3x+2\neq 0, x<0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x-2)(x-1)\neq 0 \\ (x+2)(x+1)\neq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x\neq 2 \\ x\neq 1 \\ x\neq -2 \\ x\neq -1 \end{cases}$$

ومنه: $D_h=\mathbb{R}-\{-2;-1;1;2\}$

2) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}, x\geq 0 \\ \dfrac{x^2-2x+1}{x^2+3x+2}, x<0 \end{cases}$$

لاحظ أنه لما $x \geq 0$ فإنه $h(x) = f(x)$

3) دراسة استمرارية وقابلية اشتقاق الدالة h عند 0 :

◄ عندما تتساوى النهايتان من اليمين واليسار عند a وكلا النهايتان تساوي $f(a)$، نقول أن الدالة مستمرة عند ذلك العدد ►

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}\right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2}\right] = \frac{1}{2}$
- $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}\right] = \left[\frac{0^2 - 2(0) + 1}{0^2 + 3(0) + 2}\right] = \frac{1}{2}$

بما أن : $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 0}}[h(x)] = \lim\limits_{\substack{< \\ x \to 0}}[h(x)] = \frac{1}{2}$ فإن: الدالة h مستمرة عند 0.

- قابلية الاشتقاق:

- $$\lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{2x^2 + 4|x| + 2 - x^2 + 3|x| - 2}{2x(x^2 - 3|x| + 2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{x^2 + 7x}{2x(x^2 - 3|x| + 2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{x + 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)}\right]$$
$$= \frac{7}{4}$$

- $$\lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{h(x) - h(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{\frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2} - \frac{1}{2}}{x}\right]$$
$$= \lim_{\substack{< \\ x \to 0}} \left[\frac{x^2 + 7|x|}{2x(x^2 - 3|x| + 2)}\right]$$
$$= \lim_{\substack{> \\ x \to 0}} \left[\frac{x - 7}{2(x^2 - 3|x| + 2)}\right]$$
$$= -\frac{7}{4}$$

بما أن النهايتين غير متساويتين نقول أن: الدالة h غير قابلة للاشتقاق عند 0.

ومنه المنحنى (C_h) يقبل نصفي مماسيين معامل توجيه كل منهما: $\frac{7}{4}$ و $-\frac{7}{4}$

4) دراسة شفعية الدالة h:

◄ شاهد هذا التذكير ►

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية)

الخليل للرياضيات

$$h(-x) = \frac{(-x)^2 + 2|-x| + 1}{(-x)^2 - 3|-x| + 2}$$
$$= \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 3|x| + 2}$$
$$= h(x)$$

5) استنتاج التمثيل البياني (C_h) للدالة h انطلاقا من (C_f):

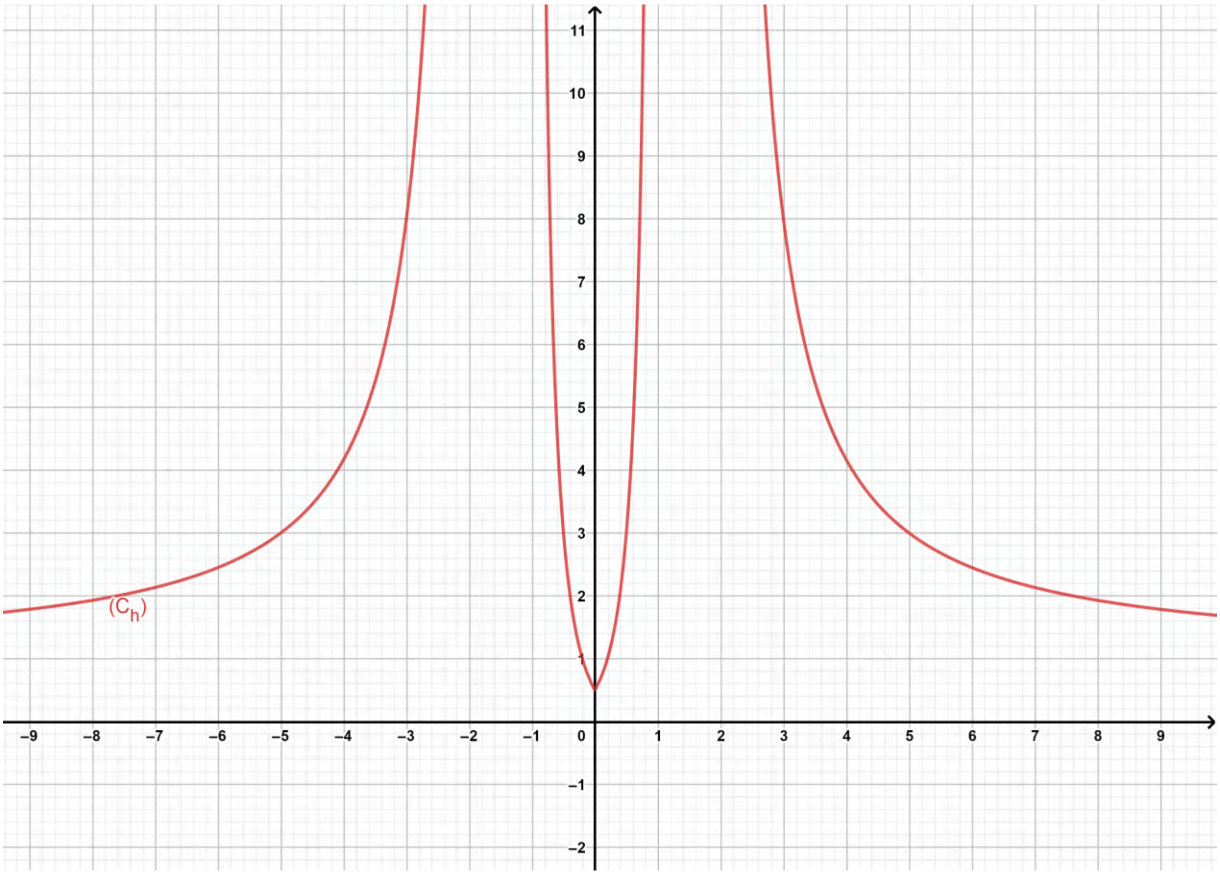
لدينا:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}, x \geq 0 \\ \dfrac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3x + 2}, x < 0 \end{cases}$$

ومنه منحني الدالة h ينطبق على منحني الدالة f لما $x \geq 0$

ولدينا: $h(-x) = h(x)$

ومنه الدالة h زوجية ومنحاها البياني متناظر بالنسبة لمحور التراتيب



6) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$(m-1)x^2 - (3m+2)x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow mx^2 - x^2 - 3mx - 2x + 2m - 1 = 0$$
$$\Rightarrow m(x^2 - 3x + 2) = x^2 + 2x + 1$$
$$\Rightarrow m = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\Rightarrow m = \frac{x^2+2x+1}{x^2-3x+2}$$

ومنه: $m = h(x)$ **لما:** $x \geq 0$

إذن المناقشة كالآتـي:

لما: $m < \frac{1}{5}$ **المعادلة لا تقبل حلول**

لما: $m = \frac{1}{5}$ **المعادلة تقبل حلا مضاعفا**

لما: $1 \geq m > \frac{1}{5}$ **المعادلة تقبل حلا وحيدا**

لما: $m > 1$ **المعادلة تقبل حلان**

حل المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

1) برهان أن G تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$:

G مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}$ إذن G قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- حساب $G'(x)$:

$$\begin{aligned} G'(x) &= F'(x) - F'(-x) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{(-x)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة G ثابتة.

2)

- حساب $G(0)$:

$$G(0) = F(0) - F(-0) = 0$$

- استنتاج أن G فردية:

بما أن الدالة G ثابتة، اذن من كل $x \in \mathbb{R}$ لدينا:

$$F(x) + F(-x) = 0 \Leftrightarrow F(-x) = -F(x)$$

ومنه الدالة F فردية

(III)

1)

تبرير أنّ H تقبل الاشتقاق على I وحساب $H'(x)$:

H مجموع دالتين قابلتين للاتشقاق على $\mathbb{R}_+^*$ إذن H قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} H'(x) &= F'(x) + \left[F\left(\frac{1}{x}\right)\right]' \\ &= F'(x) - \frac{1}{x^2}F'(x) \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1} = 0 \end{aligned}$$

ومنه الدالة H ثابتة.

2) برهان أنه من أجل كل $x \in I$ ، $H(x) = 2F(1)$:

$$H(1) = F(1) + F\left(\frac{1}{1}\right) = 2F(1)$$

وبما أن الدالة H ثابتة فإنه من أجل كل $x \in \mathbb{R}_+^*$ فإنه:

$$H(x) = 2F(1)$$

3) استنتاج أن $\lim_{x\to+\infty} [F(x)] = 2F(1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} [H(x)] &= \lim_{x\to+\infty} \left[F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right)\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty} [F(x)] + F(0) \\ &= \lim_{x\to+\infty} [F(x)]\end{aligned}$$

ومنه:

$$2F(1) = \lim_{x\to+\infty} [F(x)]$$

الاستنتاج: (C_f) يقبل مقارب بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

وبما أن F فردية فإن (C_f) يقبل مقارب بجوار $-\infty$ معادلته: $y = 2F(1)$

(IV) T الدالة المعرفة على $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بِـ: $T(x) = F(\tan x) - x$

1) حساب $T'(x)$:

$$\begin{aligned}T'(x) &= [F(\tan x) - x]' \\ &= (\tan x)'F'(\tan x) - 1 \\ &= (1 + \tan^2 x)\left(\frac{1}{\tan^2 x + 1}\right) - 1 \\ &= 1 - 1 = 0\end{aligned}$$

ومنه T دالة ثابتة.

2) حساب $F(1)$:

لدينا: $0 \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ ومنه $0 \in D_T$ أي:

$$\begin{aligned}T(0) &= F(\tan 0) - 0 \\ &= F(0) - 0 \\ &= 0 - 0 = 0\end{aligned}$$

وبما أن T ثابتة فإنه من أجل كل $x \in D_T$ فإنه $T(x) = 0$

إذن

$$\begin{aligned}F(\tan x) &= T(x) + x \\ &= 0 + x \\ &= x\end{aligned}$$

ولدينا من جهة أخرى: $F(\tan x) = F(1)$ أي $\tan x = 1$

وهذا يكافئ: $x = \frac{\pi}{4}$ لأن: $x \in \left]\frac{-\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

إذن :

$$F(1) = F\left(\tan\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4}$$

(V)

1) انجاز جدول تغيرات الدالة F على $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة F' موجبة تماما ومنه الدالة F متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2F(1)$ و $F(1) = \frac{\pi}{4}$ ومنه

$$\lim_{x\to+\infty}[F(x)] = 2\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

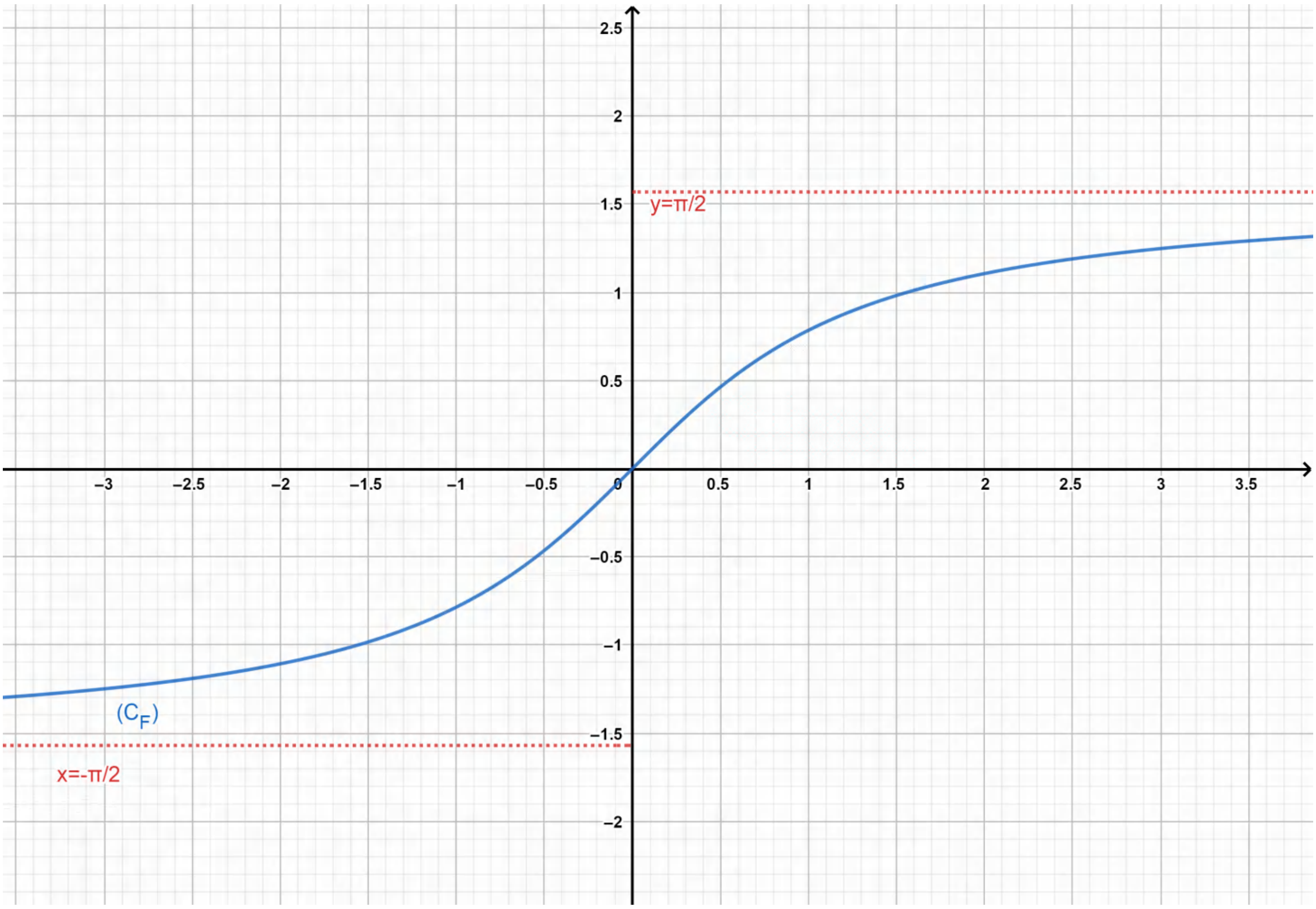
وبما أن الدالة F فردية فإن:

$$\lim_{x\to-\infty}[F(x)] = -\frac{\pi}{2}$$

ومنه:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$F'(x)$		$+$	
$F(x)$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$

2) رسم المنحنى (C_f) والمستقيمات المقاربة:



2.5
2
1.5
1
0.5
−0.5
−1
−1.5
−2
−3
−2.5
−2
−1.5
−1
−0.5
0
0.5
1
1.5
2
2.5
3
3.5
y=π/2
x=-π/2
(C_F)

حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x^3-3x^2+3x-5]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x^3\left(1-\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}-\frac{5}{x^3}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

ب/ دراسة تغيرات الدالة g:

أولا: حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$

معادلة من الدرجة الثانية لحلها نستعمل المميز Δ

$$\Delta = (-6)^2-4(3)(3)$$
$$= 0$$

ومنه المعادلة لها حل مضاعف هو:

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{6}{6} = 1$$

ومنه:

$$g'(x) = 3x^2-6x+3$$
$$= 3(x-1)^2$$

لدينا $g'(x) \geq 0$ ومنه الدالة g متزادية تماما.

ولدينا $g'(1) = 0$ ، ومنه الدالة g تنعدم ولا تغير اشارتها.

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$		0		$+\infty$

2) أ/ تبيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها ،

الخليل للرياضيات

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$ و $g(2) = -3$

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times g(2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α من المجال $]2; +\infty[$.

ب/ حصر العدد α:

α	2	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	2.7	2.8	...	$+\infty$
$g(\alpha)$	-3	-2.6	-2.2	-1.8	-1.2	-0.6	0.1	1.8	...	$+\infty$

من الجدول نلاحظ أن: $2.5 < \alpha < 2.7$

ج/ استنتج حسب قيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) تعيين نهايات الدالة f:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to-\infty}[x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x^3}{x^2}\right] = \lim_{x\to+\infty}[x] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to1}[f(x)] = \lim_{x\to1}\left[\frac{x^3-3x^2+3x+1}{(x-1)^2}\right] = \lim_{x\to1}\left[\frac{2}{0^+}\right] = +\infty$$

2) تحديد الأعداد الحقيقية c, b, a:

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-1)^2} = \frac{(ax+b)(x-1)^2 + c}{(x-1)^2} = \frac{ax^3 + x^2(-2a+b) + x(a-2b) + b + c}{(x-1)^2}$$

بالمطابقة مع عبارة $f(x)$ نجد:

$$\begin{cases} a = 1 \\ -2a + b = -3 \\ a - 2b = 3 \\ b + c = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 2 \end{cases}$$

ومنه:

$$f(x) = x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2}$$

3) أ- تبيين أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (d):

ليكن: $y = x - 1$

لدينا:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - y] = \lim_{x\to\pm\infty} \left[x - 1 + \frac{2}{(x-1)^2} - (x-1)\right]$$
$$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[\frac{2}{(x-1)^2}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $\pm\infty$

ب- دراسة الوضع النسبي للمستقيم (d) والمنحني (C_f):

دراسة إشارة الفرق: $f(x) - y$:

$$f(x) - y = \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

ومنه:

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x) - y$	$+$	‖	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (d)	‖	(C_f) فوق (d)

4) أ- دراسة تغيرات الدالة f:

أولا: حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{(x-1)^3 - 4}{(x-1)^3}$$
$$= \frac{g(x)}{(x-1)^3}$$

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط في المقام

ثانيا: جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		α		$-\infty$
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-1)^3$		$-$	‖	$+$		$+$	

$f'(x)$	$+$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	$+\infty \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

ب- تبيين أنّ (C_f) يقطع مرة وحيدة محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة β :

لدينا: $f(-1) = -1.5$ و $f(0) = 1$

ولدينا $f(-1) \times f(0) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا β حيث: $-1 \leq \beta \leq 0$

ج- تبيين أن $f(\alpha) = \frac{6}{(\alpha-1)^2}$:

يكفي أن نثبت أن: $f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} = 0$:

لدينا سابقا: $g(\alpha) = 0$ ، إذن:

$$\begin{aligned} f(\alpha) - \frac{6}{(\alpha-1)^2} &= \alpha - 1 + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-1)^2}{(\alpha-1)^2} + \frac{2}{(\alpha-1)^2} - \frac{6}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{\alpha^3 - 3\alpha^2 + 3\alpha - 5}{(\alpha-1)^2} \\ &= \frac{g(\alpha)}{(\alpha-1)^2} = \frac{0}{(\alpha-1)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{gathered} 2.5 < \alpha < 2.7 \\ 1.5 < \alpha - 1 < 1.7 \\ 2.25 < (\alpha-1)^2 < 2.89 \\ \frac{1}{2.89} < \frac{1}{(\alpha-1)^2} < \frac{1}{2.25} \\ \frac{6}{2.89} < \frac{6}{(\alpha-1)^2} < \frac{6}{2.25} \\ 2.07 < f(\alpha) < 2.66 \end{gathered}$$

5) إنشاء (C_f):

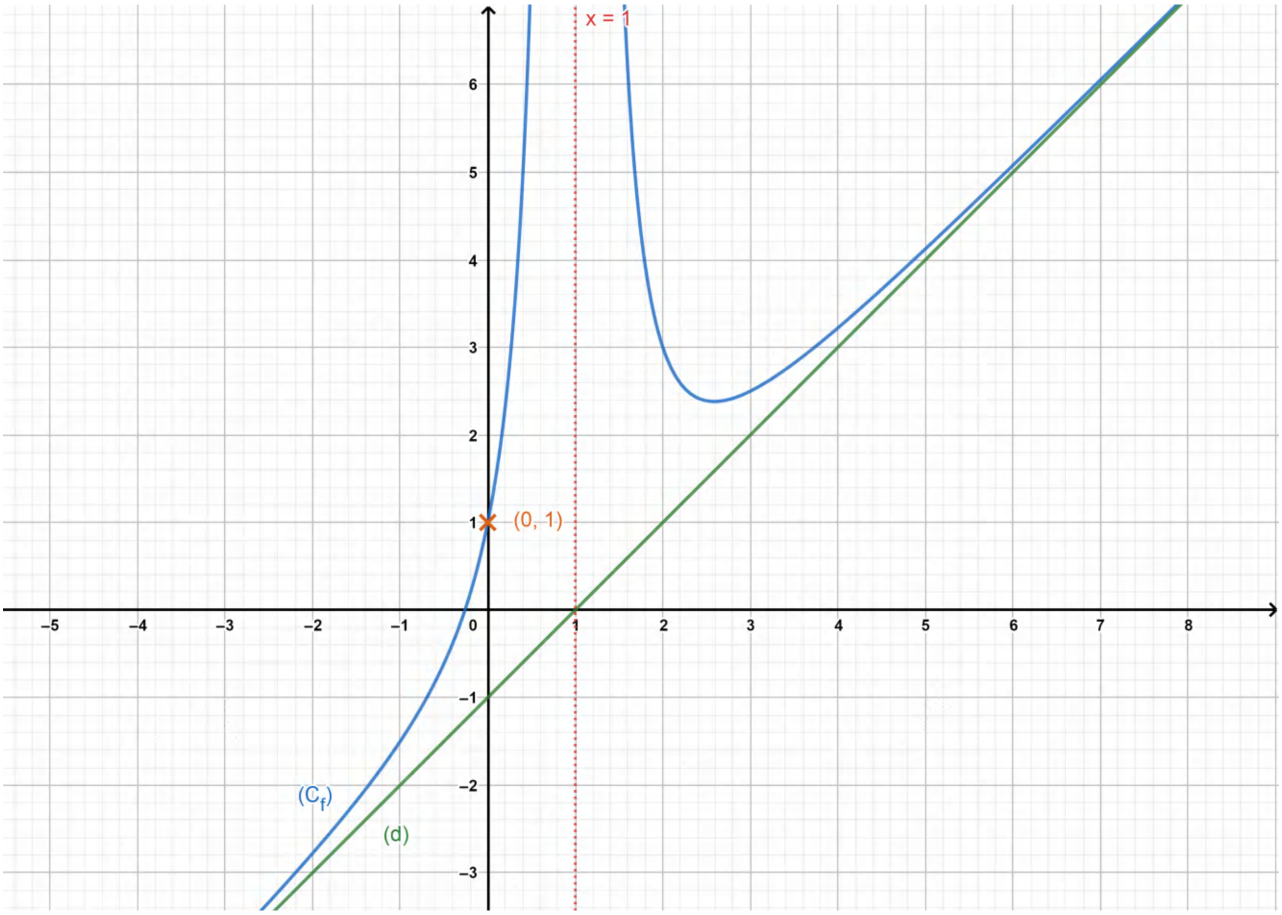
حساب $f(0)$:

$$f(0) = 0 - 1 + \frac{2}{(0-1)^2} = 1$$

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$

- نرسم المستقيم المقارب المائل (d) ذو المعادلة $y = x - 1$
- نعين نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع (yy')
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) أ- تبين أن h زوجية:

$$\begin{aligned} h(-x) &= f(|-x|) \\ &= f(|x|) \\ &= h(x) \end{aligned}$$

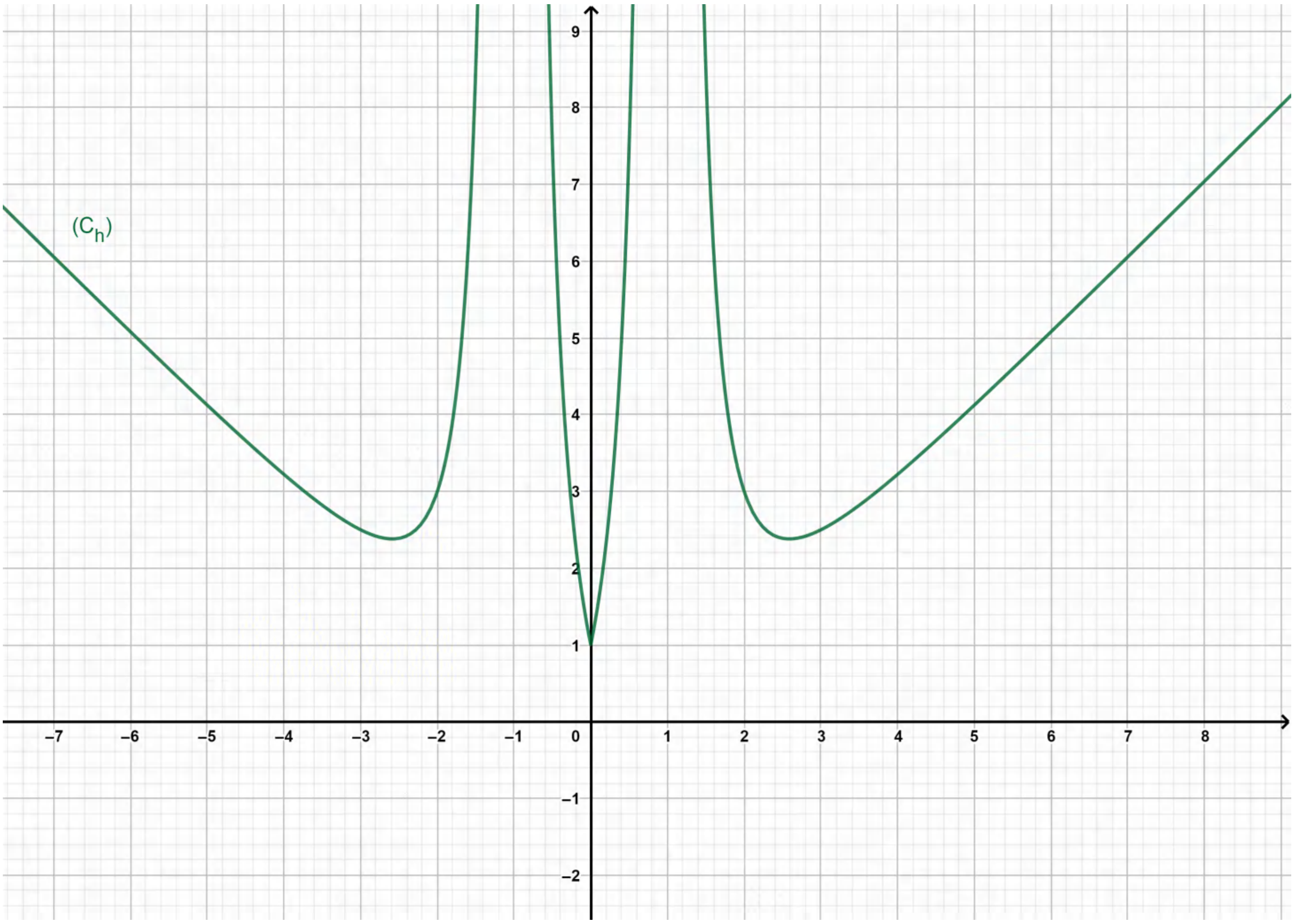
ومنه الدالة h زوجية.

ب/ انشاء (C_h):

لدينا: $f(|x|) = h(x)$

ومنه لما $x \geq 0$، يكون (C_h) منطبقا على (C_f)

ولما: $x \leq 0$، يكون (C_h) متناظر مع (C_f) بالنسبة إلى محور التراتيب (yy')



ج- المناقشة البيانية:

أولا: $f(x) = m$:

لما $m < 1$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $1 < m < f(\alpha)$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $m = f(\alpha)$ المعادلة تقبل حلين موجبين أحدهما: $x = \alpha$

لما $m > f(\alpha)$ المعادلة تقبل ثلاث حلول موجبة

ثانيا: $f(x) = x + m$:

لما $m \leq -1$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلان مختلفان في الإشارة

لما $m = 1$ المعادلة تقبل حلان هما: $x = 2$ ،$x = 0$

لما $m > 1$ المعادلة تقبل حلان موجبان متمايزان

حل المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g:

- أولا: حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{1+x^2}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x-\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2x+x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[x\left(2+\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\right)\right]$$
$$= -\infty$$

بنفس الطريقة نجد أن:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2-\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}$$
$$= \frac{2\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2} \geq 0$ ومنه الإشارة من إشارة البسط:

لما: $x \geq 0$: لدينا:

$$2\sqrt{1+x^2}-x = \frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{4(1+x^2)-x^2}{2\sqrt{1+x^2}+x}$$
$$= \frac{3x^2+1}{2\sqrt{1+x^2}+x} > 0$$

لما: $x \leq 0$: واضح أن $2\sqrt{1+x^2}-x > 0$

ومنه $g'(x)>0$ أي أن الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

2) تبيين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α:

بما أن الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على $\mathbb{R}$

ولدينا: $\lim_{x\to+\infty}[g(x)]=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}[g(x)]=-\infty$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[g(x)]\times\lim_{x\to-\infty}[g(x)]<0$

فإنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

- تعيين α:

لدينا: $g(x)=0$ أي:

$$\begin{aligned}2x-\sqrt{1+x^2}=0 &\Rightarrow 2x=\sqrt{1+x^2}\\ &\Rightarrow 4x^2=1+x^2\\ &\Rightarrow 3x^2=1\\ &\Rightarrow x^2=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{cases} x_1=\sqrt{\dfrac{1}{3}} \\ x_2=-\sqrt{\dfrac{1}{3}}\ldots\left(\text{مرفوض}\right)\end{cases}$$

x_2 مرفوض لأن $x\geq 0$.

ومنه $\alpha=\sqrt{\frac{1}{3}}$

3) استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب نهايات الدالة f:

- $$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[g(x)] &= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x\right]\\ &=\lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]\\ &=\lim_{x\to-\infty}\left[-2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]\end{aligned}$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+1\right)\right]=+\infty$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2x\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[x\left(2\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-1\right)\right]=+\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=2\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}-1$$

$$=\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-1$$

$$=\frac{2x-\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$f'(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{1+x^2}}$$

لدينا: $\sqrt{1+x^2}\geq 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $g(x)$.

ج- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة الدالة $g(x)$ ومنه:

x	$-\infty$	$\sqrt{\frac{1}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$+\infty$ ↘	$f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}\right)$	↗ $+\infty$

2) حساب: $\lim_{x\to-\infty}[f(x)+3x]$:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)+3x]=\lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x+3x\right]$$

$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}+2x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}-2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{|x|\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{-x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}-x}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right]=0$$

ومنه المستقيم (d) ذو المعادلة $y=-3x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

3) أ- تبيين أن (d') مستقيم مقارب لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-x-x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[2\sqrt{1+x^2}-2x\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\left(2\sqrt{1+x^2}-2x\right)\left(2\sqrt{1+x^2}+2x\right)}{2\sqrt{1+x^2}+2x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4(x^2+1)-4x^2}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{2\sqrt{1+x^2}+x}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+x}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}\right] = 0$$

ومنه المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$

ب- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d) :

بما أن المستقيم (d) ذو المعادلة $y = -3x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - (-3x)$ لما $x < 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x + 3x$$
$$= \frac{2}{-x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}$$

لما $x < 0$:

لدينا: $\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right) > 0$ و $(-x) > 0$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

اذن: المنحني (C_f) فوق (d).

- دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (d') :

بما أن المستقيم (d') ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$

ندرس إشارة الفرق $f(x) - x$ لما $x > 0$

$$f(x) - (-3x) = 2\sqrt{1+x^2} - x - x$$
$$= \frac{2}{x\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right)}$$

لما $x > 0$:

لدينا: $\left(\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}+1\right) > 0$ و $x > 0$

ومنه: إشارة الفرق موجبة

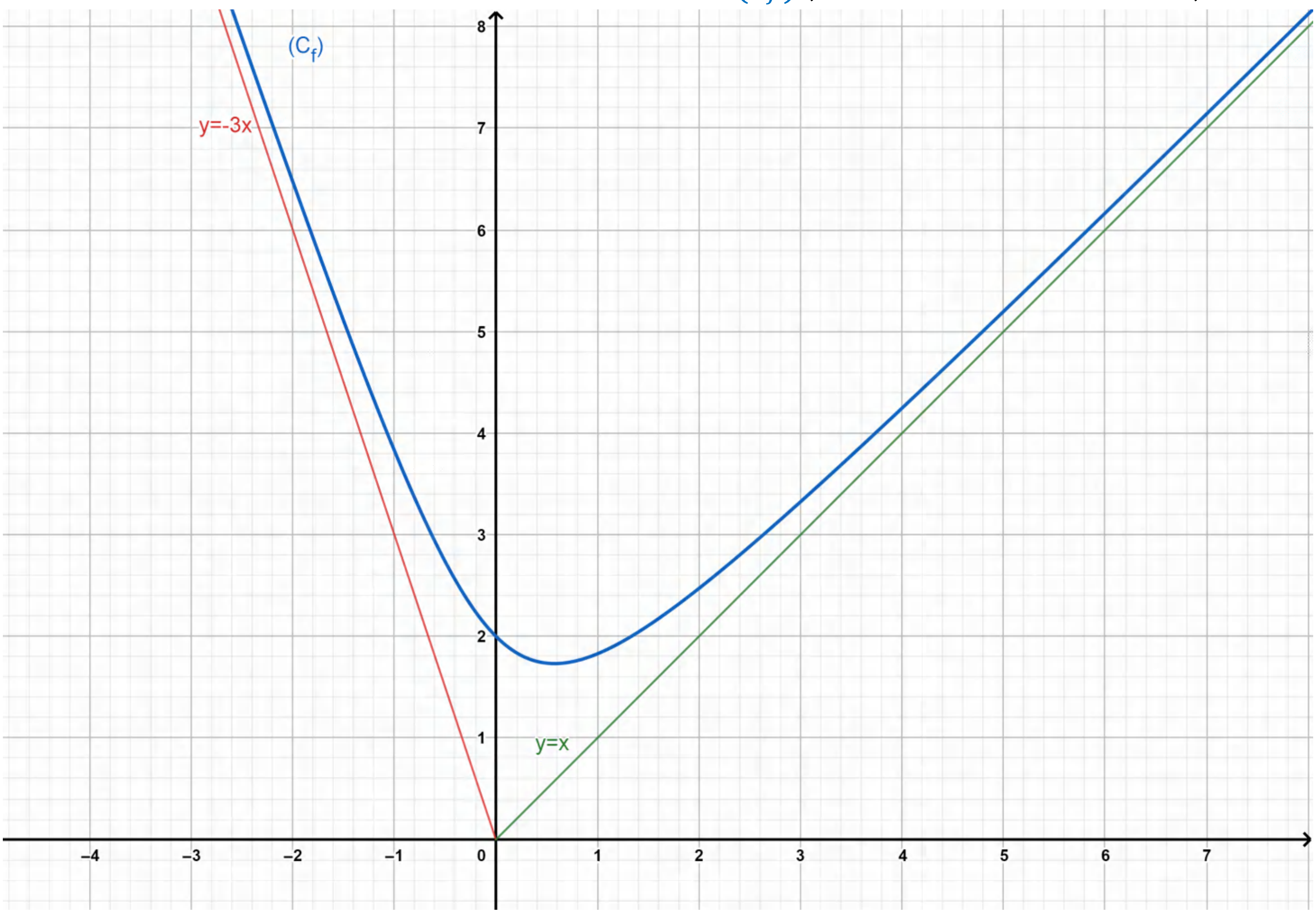
اذن: المنحني (C_f) فوق (d').

4) إنشاء المنحني (C_f):

خطوات الرسم على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة: (d) و (d')

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



④

الدوال الأسية

المسائل الشاملة

المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = x - e^{-x}$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ/ بيّن أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x+1}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ عيّن دون حساب: $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ فسر النتيجة هندسيا.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) بين أن $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$ ، ثم استنتج قيمة $f(\alpha)$.

5) مثل بيانيا (C_f) .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = |f(x)|$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1) اكتب $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة.

2) انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o;\vec{\imath};\vec{\jmath})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 3}{e^x + 3}\right)^2$$

3) أ/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

ب/ عيّن $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$ – برر اجابتك.

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$.

ب/ بيّن أنّ المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) .

6) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7) بيّن أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) .

8) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$ ، ثم عين حصرا للعدد α سعته 10^{-2} .

9) مثّل بيانيا كلا من: (Δ_1) ، (Δ_1) ،

10) ناقش بيانيا حسب القيم الوسيط الحقيقي غير المعدوم m المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(3x - 2)$$

(عبارة $g(x)$ غير مطلوبة).

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha + 2}{3}\right) = 0$$

الخليل للرياضيات

ثم بيّن أنّ:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)=3f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (d) لمنحني الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$.

4) تحقق من أن معادلة المستقيم (d) تعطى بـ:

$$y=\frac{3\alpha^2}{4}x-\frac{\alpha^2(\alpha+2)}{4}$$

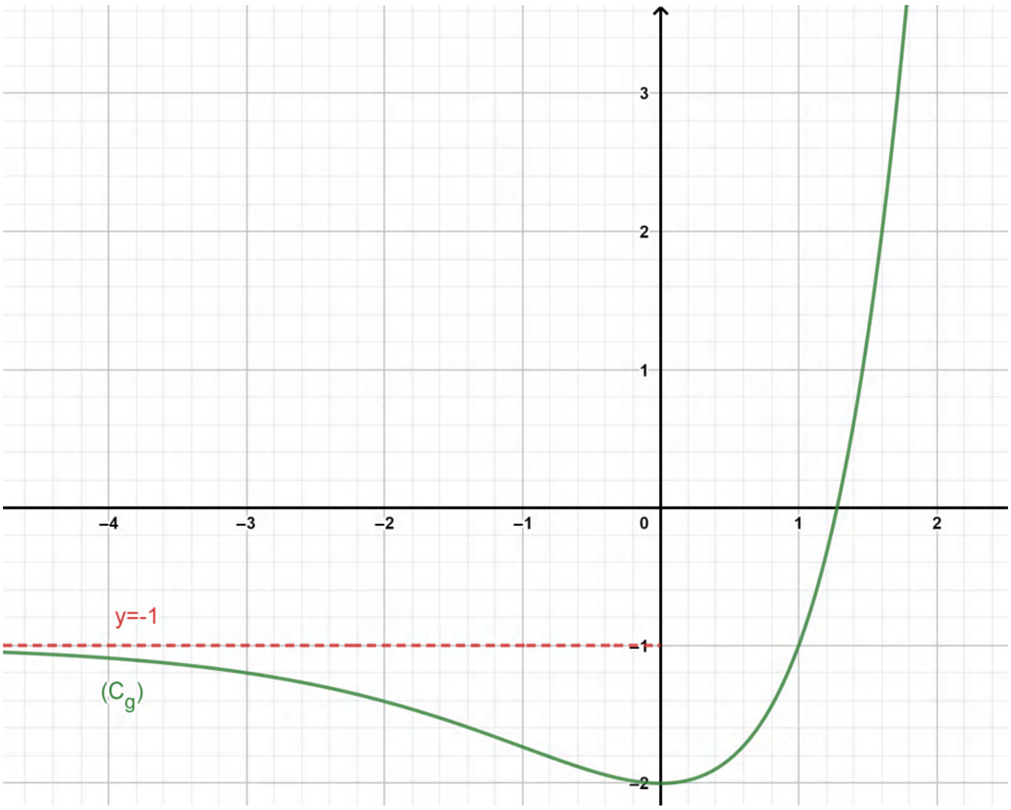
المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهـــدة الحــــل

(I) a ، b و c أعداد حقيقة، نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = (ax + b)e^x + c$$

ونسمي (C_g) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$. كما في الشكل أدناه:



1) بقراءة بيانية، أوجد ما يلي:

أ/ $\lim_{x\to-\infty} [g(x)]$ و $\lim_{x\to+\infty} [g(x)]$.

ب/ $g(0)$ و $g'(0)$.

2) مما سبق أوجد a ، b و c.

3) نضع: $g(x) = (x-1)e^x - 1$.

أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α على $\mathbb{R}$ ، ثم تحقق من أن: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في المستو السابق.

1) أ/ احسب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$ ثم فسّر النتيجة هندسيا .

ب/ احسب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بيّن أنّه من اجل كل x حقيقي:

$$f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

3) عيّن دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$$

ثم فسّر النتيجة هندسيا.

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ، يُطلب كتابة معادلة له.

5) بيّن أنّ $f(\alpha) = \alpha - 1$ ، ثم اوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ بتقريب 10^{-2} .

6) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

7) مثّل بيانيا المماس (T) والمستقيم (Δ) ثم المنحني (C_f) .

8) m وسيط حقيقي. ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة $f(x) = m$

04 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ب/ ادرس إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

2) برهن أنّ النقطة $A(0; 1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - x]$ ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

4) بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α حيث:
$-2.77 < \alpha < -2.76$.

5) مثّل بيانيا (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = f(4x + 1)$$

(عبارة g غير مطلوبة).

1) ما هو اتجاه تغير الدالة g .

2) تحقق من أنّ:

$$g\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 0$$

ثم بيّن أن:

$$g'\left(\frac{\alpha - 1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$$

3) استنتج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$.

4) تحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ:

$$y = (1+\alpha)^2 x - \frac{(1+\alpha)(\alpha^2-1)}{4}$$

(III) نعتبر الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$k(x) = f(|x|)$$

ونسمي (C_k) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

1) بيّن أن الدالة k زوجية .

2) أ/ بيّن كيف تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) .

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_k) .

(IV) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$h(x) = x + \frac{4}{e^x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) تحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$.

2) أ/ استنتج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه.

ب/ انطلاقا من (C_f) ، مثل بيانيا (C_h)

المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β حيث: $1.14 < \alpha < 1.15$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x)]$. ثم فسر ذلك هندسيا.

2) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2}$$

3) ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) عيّن دون حساب كل من: $\lim\limits_{x\to\alpha} \left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ و $\lim\limits_{x\to\beta} \left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$

ثم فسّر النتيجتين هندسيا.

5) بيّن أن: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$ ، ثم أوجد حصرا لـ $f(\alpha)$ سعته 10^{-1} .

6) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = e^x - xe^x - 1$$

- بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$.

7) نضع من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$p(x) = (x^2 + 1)e^{2x} + xe^x - 2e^x + 1$$

- تحقق من أنّ: $p(0) = 0$.

8) أ/ بيّن أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$.

ب/ اكتب معادلة للمماس (T) .

ج/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

9) نأخذ: $f(\beta) \cong -1.195$.

مثّل بيانيا المستقيم (T) والمنحني (C_f) .

10) m وسيط حقيقي، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة ذات المجهول الحقيقي x التالية:

$$e^x(1 - mx^2) + mx - 1 = 0$$

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = 2x + 1 - xe^{x-1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$

1) ادرس تغيرات الدالة f' .

2) احسب $f'(1)$ ثم استنتج إشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) ادرس تغيرات الدالة f .

4) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x + 1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

ب/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيين إحداثييها.

ب/ بين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث:

$1.9 < \alpha < 2$ و $-0.5 < \beta < -0.6$.

6) مثل بيانيا: (Δ) ، (T) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول الحقيقي x والوسيط الحقيقي الموجب تماما m التالية:

$$f(x) = 2x + \ln m \dots (E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد وإشارة حلول المعادلة (E) .

المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x) = (2x+1)e^{x} - 1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g' :

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = x(e^{x}-1)^{2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحى (C_f) عند $-\infty$.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

3) أ/ بيّن أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$f'(x) = (e^{x}-1)g(x)$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

4) اكتب معادلة ديكارتية للمماس (T) للمنحني (C_f) عند المبدأ.

5) مثّل بيانيا كلا من (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول الحقيقي x :

$$(E): f(x) = mx$$

08 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعرف الدالة f على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ بين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^x + 1}$$

ب/ استنتج أن الدالة f فردية.

2) احسب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها.

3) أ/ بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

ثم ادرس إشارة $f'(x)$.

ب/ ماذا تستنتج بالنسبة لـ (C_f) ؟

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) أ/ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x - 1\right] 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا .

5) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$.

6) مثل بيانيا (C_f) .

09 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = -x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$.

2) أ/ بيّن أنّ المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x + \frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2} - 4 = 0$ ، ثم بيّن أنّ المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty; 2 + \ln 4]$ وتحته على المجال $[2 + \ln 4\,; +\infty[$

3) أ/ بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$$

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) احسب $f''(x)$ ، ثم بين أن $A(2;2)$ نقطة انعطاف للمنحني (C_f) .

5) اثبت أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$.

6) مثّل بيانيا (Δ) والمنحني (C_f) .

10 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحـــل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = e^x + x + 2$$

1) ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$.

2) أ/ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ـ ثم تحقق أن $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{1 - xe^x}{e^x + 1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim_{x \to -\infty} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{e^{-x} - x}{e^{-x} + 1}$$

ثم احسب $\lim_{x \to +\infty} [f(x)]$.

2) تحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$$f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x + 1)^2}$$

3) ادرس تغيرات الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

4) أ/ بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -x$ مقارب مائل لـ (C_f) .

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) .

5) أ/ بيّن أن: $f(\alpha) = -(\alpha + 1)$ ، ثم استنتج حصرا لـ $f(\alpha)$.

ب/ بيّن أنّ المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$.

6) مثّل بيانيا المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) .

7) ليكن m عدد حقيقي موجب تماما، ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة:

$$1 - (x + \ln x)e^x - \ln m = 0$$

المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهــــدة الحــــل

(I) لتكن g دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ وتحقق العلاقة:

$$g(x) - 2g(1-x) = e^x - 2e^{1-x} - 3x + 3$$

1) أوجد عبارة $g(x)$ بدلالة x . (ارشاد: ضع $t = x$ تارة و $t = 1 - x$ تارة أخرى)

2) نضع: $g(x) = e^x - x - 1$ حيث: $D_g = \mathbb{R}$

أ/ احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$h(x) = 1 - g(-x)$$

4) اثبت أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث:

$$-1.15 < \alpha < -1.14 \quad \text{وَ} \quad 1.84 < \beta < 1.85$$

5) استنتج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x .

(II) لتكن f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = \frac{x + g(x)}{1 + g(x)}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) أ/ اثبت أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وأن:

$$f'(x) = \frac{e^x h(x)}{\left(1 + g(x)\right)^2}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) مثل بيانيا (C_f) .

المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة الحـــل

لتكن الدالة f بـ:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) عين مجوعة تعريف الدالة f .

2) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب/ بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$$

ج/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[x]$. ثم فسر النتيجة هندسيا .

3) اثبت أن الدالة f متزايدة تماما على مجال تعريفها .

4) بين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f)

5) عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A .

6) نعتبر الدالة g المعرفة على D_f كما يلي:

$$g(x)=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)$$

أ/ حلل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$.

ب/ احسب $g'(x)$ و $g(0)$ ثم ادرس تغيرات الدالة g

ج/ استنتج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) .

7) مثل بيانيا (T) و (C_f) .

④

الدوال الأسية

حُلول المسائل الشاملة

حل المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x - e^{-x}] = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{-x}\left(\frac{x}{e^{-x}} - 1\right)\right] = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x - e^{-x}] = +\infty$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 + e^{-x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ- تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α حيث: $0.5 < \alpha < 0.6$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(0.6) = 0.05$ و $g(0.5) = -0.1$ ولدينا $g(0.6) \times g(0.5) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α

ب- استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب النهايات:

- $\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+1}{e^{x}+1}\right] = -\infty$
- $\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+1}{e^{x}+1}\right]$

$$= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}}{1 + \frac{1}{e^x}} \right]$$

$$= 0$$

لأن: $\lim_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{e^x} \right] = 0$

- التفسير الهندسي:

▪ (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 0$

2) أ- حساب $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{e^x + 1 - e^x(x+1)}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x + 1 - xe^x - e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{-e^x\,(-e^{-x} + x)}{(e^x+1)^2}$$

$$\frac{-e^x\,g(x)}{(e^x+1)^2}$$

ب- تعيين دون حساب قيمة $\lim_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right]$:

لدينا مما سبق $g(\alpha) = 0$ ومنه :

$$\lim_{x \to \alpha} \left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha} \right] = f'(\alpha)$$

$$= \frac{-e^\alpha g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2}$$

$$= 0$$

- تفسير الهندسي:

منحني الدالة f يقبل مماس في النقطة ذات الفاصلة α مواز لحامل محور الفواصل معادلته هي:

$y = f(\alpha)$

3) جدول تغيرات الدالة f :

لدينا:

$$f'(x) = \frac{-e^x g(x)}{(e^x+1)^2}$$

لدينا المقام موجب تماما ومنه الإشارة من إشارة البسط

- جدول التغيرات:

لدينا $f(-1) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$		-1		α		$+\infty$
$-e^x$		$-$		$-$		$-$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) تبيين أن المعادلة $f(x) = x$ إذا وفقط إذا كان $g(x) = 0$:

لتبيين أن $f(x) = x$

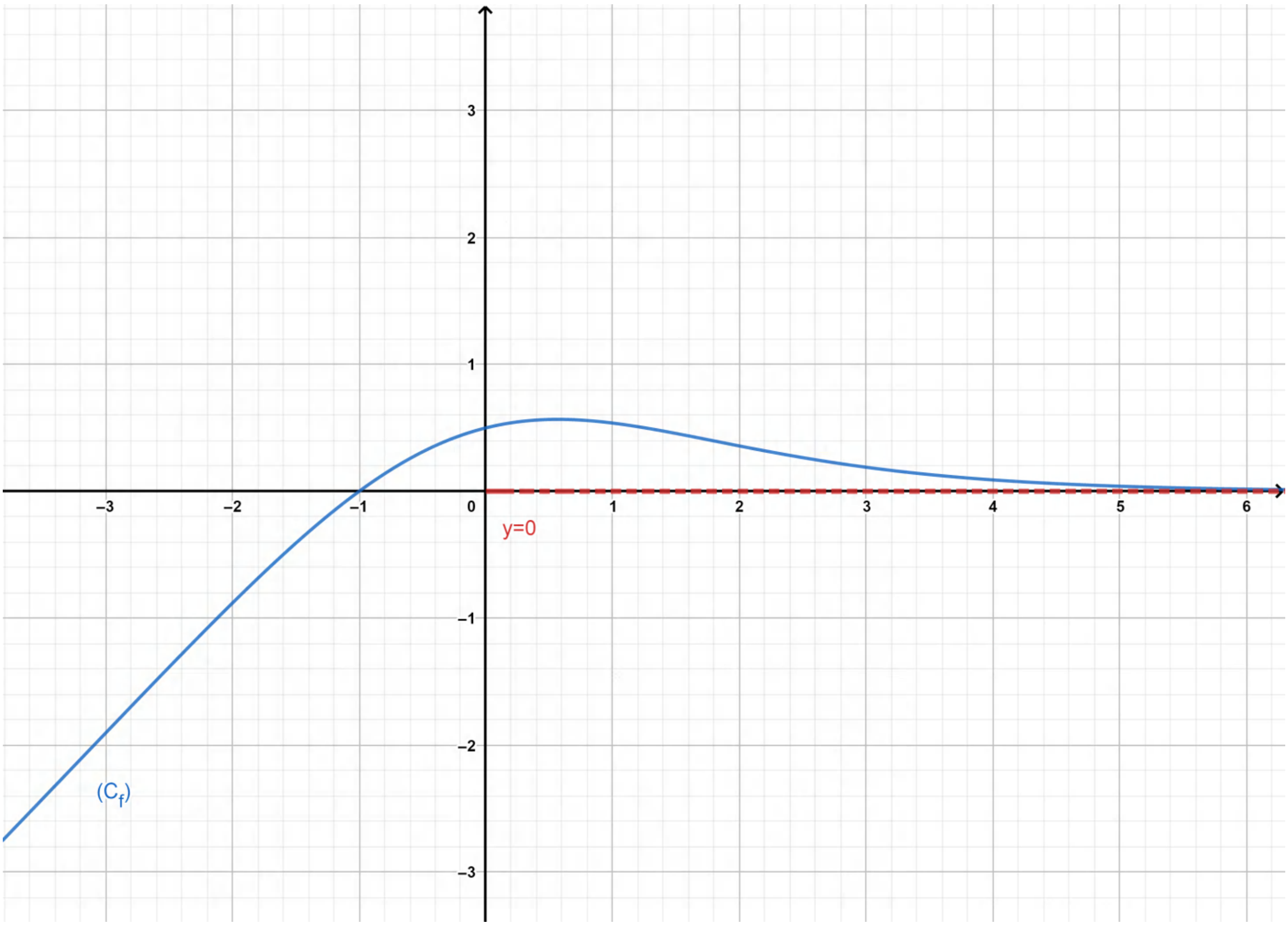
يكفي أن نثبت أن: $f(x) - x = 0$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x+1}{e^x+1} - x \\ &= \frac{x+1-xe^x-x}{e^x+1} \\ &= \frac{1-xe^x}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x(e^{-x}-x)}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x(x-e^{-x})}{e^x+1} \\ &= \frac{-e^x g(x)}{e^x+1} \\ &= \frac{0}{e^x+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

استنتاج قيمة $f(\alpha)$:

لدينا $f(x) = x$ ومنه $f(\alpha) = \alpha$

5) التمثيل البياني:



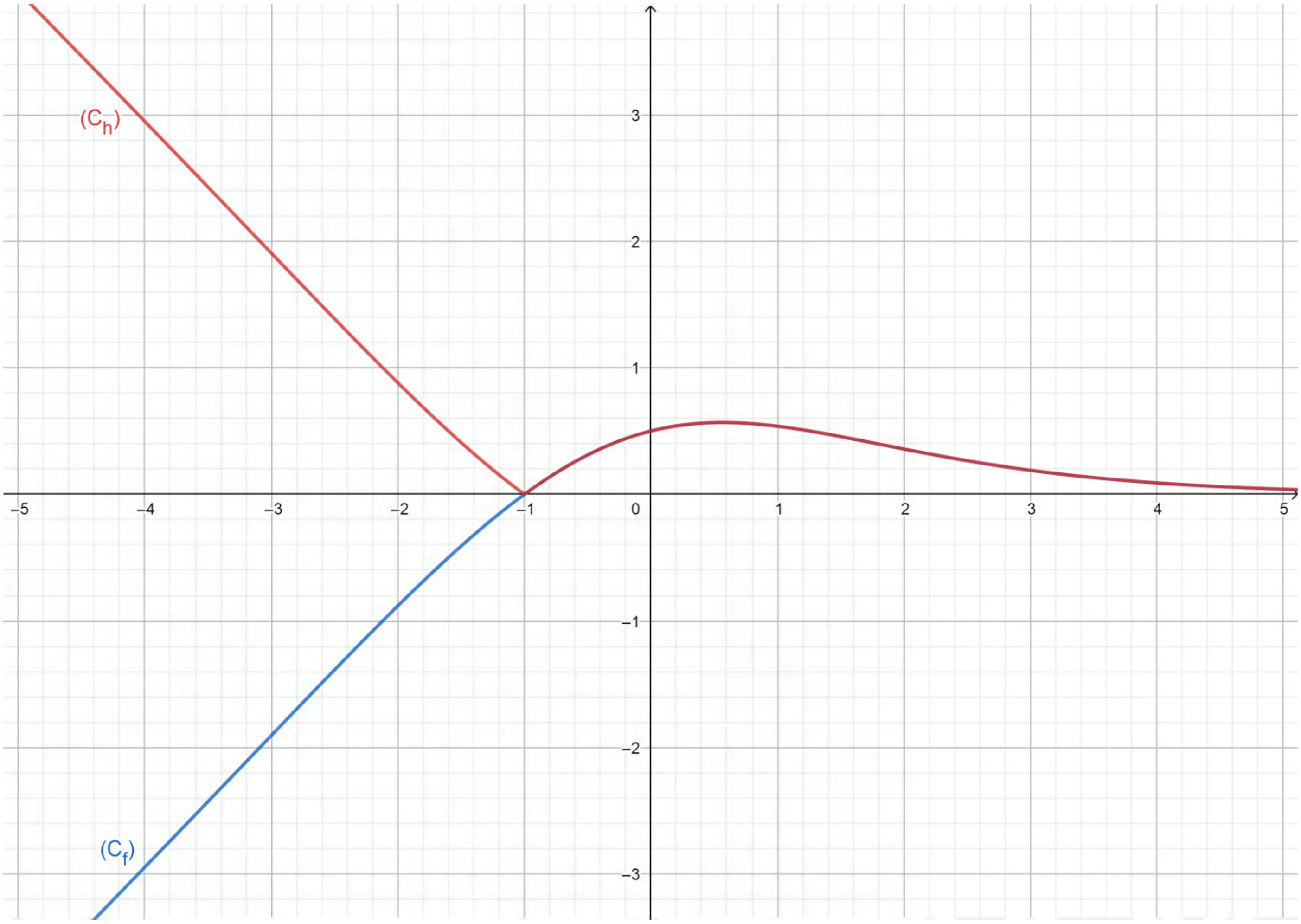
(III)

1) كتابة $h(x)$ دون رمز القيمة المطلقة:

$$\begin{aligned} h(x) &= |f(x)| \\ &= \left|\frac{x+1}{e^x+1}\right| \\ &= \frac{|x+1|}{e^x+1} \\ &= \begin{cases} \dfrac{x+1}{e^x+1}; x \geq -1 \\ \dfrac{-x-1}{e^x+1}; x \leq -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x); x \geq -1 \\ -f(x); x \leq -1 \end{cases} \end{aligned}$$

2) تمثيل (C_h) :

(C_h) ينطبق على (C_f) لما $f(x) \geq 0$ ويناظر (C_f) بالنسبة إلى محور الفواصل (xx') إذا كان $f(x) \leq 0$



(C_h)
(C_f)

02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) حساب النهايات :

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+2-\dfrac{4e^x}{e^x+3}\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{xe^x-2e^x+3x+6}{e^x+3}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x\left(x-2+\frac{3x+6}{e^x}\right)}{e^x\left(1+\frac{3}{e^x}\right)}\right]$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x-2+\frac{3x+6}{e^x}}{1+\frac{3}{e^x}}\right] = +\infty$$

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن : $f'(x) = \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$:

$$f'(x) = 1-\frac{4e^x(e^x+3)-e^x(4e^x)}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x+3)^2+12e^x}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{e^{2x}-6e^x+9}{(e^x+3)^2}$$

$$= \frac{(e^x-3)^2}{(e^x+3)^2}$$

$$= \left(\frac{e^x-3}{e^x+3}\right)^2$$

3) أ/ دراسة اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا $f'(x) \geq 0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما

ولدينا

$$e^x - 3 = 0 \Rightarrow e^x = 3$$
$$\Rightarrow x = \ln 3$$

ومنه $f'(x)$ تنعدم عند $\ln 3$ ولا تغير اشارتها

ومنه

x	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\ln 3$	$+\infty$

ب/ تعيين $f''(\ln 3)$ دون حساب عبارة $f''(x)$:

عندما تنعدم المشتقة الاولى ولا تغير من اشارتها فإنه توجد نقطة انعطاف وعندها تنعدم المشتقة الثانية

ومنه $f''(\ln 3) = 0$

4) أ/ تبين أن المستقيم (Δ_1) ذو المعادلة $y_1 = x + 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x) - y_1] = \lim_{x\to-\infty}\left[x - 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_1) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $-\infty$

ب/ تبين أن المستقيم (Δ_2) ذو المعادلة $y_2 = x - 2$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - y_2] = \lim_{x\to+\infty}\left[x + 2 - \frac{4e^x}{e^x + 3} - x + 2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[4 - \frac{4e^x}{e^x + 3}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{12}{e^x + 3}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ_2) مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيمين (Δ_1) و (Δ_2) :

- الوضع النسبي بين المنحنى (C_f) والمستقيم (Δ_1) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x) - y_1]$: لدينا:

$$f(x) - y_1 = \frac{-4e^x}{e^x + 3}$$

لدينا المقام موجب ومنه الإشارة من إشارة $(-4e^x)$

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y_1$	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)

- الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ_2) :

ندرس إشارة الفرق $[f(x)-y_2]$: لدينا:

$$f(x)-y_2=4-\frac{4e^x}{e^x+3}=\frac{12}{e^x+3}>0$$

ومنه

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f(x)-y$	$+$
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)

6) كتابة معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

$$(T): y=f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$=\left(\frac{e^0-3}{e^0+3}\right)^2(x)+0+2-\frac{4e^0}{e^0+3}$$
$$=\frac{1}{4}x+1$$

7) تبيين أن النقطة $A(\ln 3\,;\ln 3)$ مركز تناظر للمنحني (C_f) :

- نبين أن $(\ln 3+x)\in D_f$ و $(\ln 3-x)\in D_f$:

لدينا: $x\in D_f$ معناه $x\in]-\infty;+\infty[$

ومنه $(\ln 3+x)\in]-\infty;+\infty[$ و $(\ln 3-x)\in]-\infty;+\infty[$

- نبين أن $f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=2\ln 3$

$$f(\ln 3+x)+f(\ln 3-x)=\left(\ln 3+x+2-\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}\right)+\left(\ln 3-x+2-\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^{\ln 3+x}}{e^{\ln 3+x}+3}+\frac{4e^{\ln 3-x}}{e^{\ln 3-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{12e^x}{3e^x+3}+\frac{12e^{-x}}{3e^{-x}+3}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4e^x}{e^x+1}+\frac{4e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)$$
$$=2\ln 3+4-\left(\frac{4+4e^x+4+4e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}\right)$$

$$= 2\ln 3 + 4 - \left(\frac{8}{2}\right)$$
$$= 2\ln 3$$

8) تبين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(-1) = 0.56$ و $f(-2) = -0.17$ ولدينا $f(-1) \times f(-2) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-2;-1[$

- حصر α :

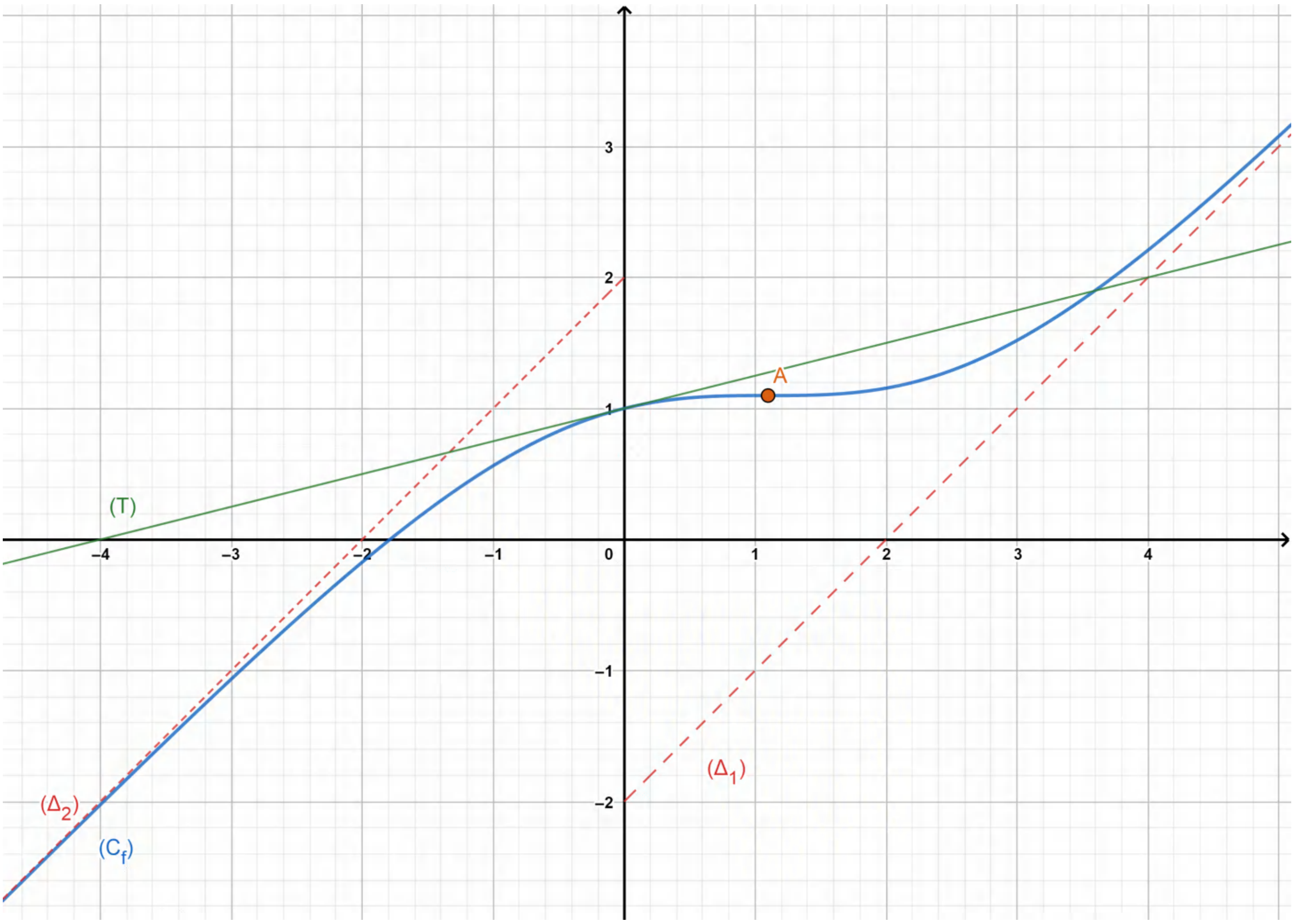
α	-2	-1.9	-1.8	-1.7	...	-1
$f(\alpha)$	-0.17	-0.09	-0.09	0.07	...	0.56

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $y = x + 2$ و $y = x - 2$
- نعين نقطة مركز تناظر المنحني (C_f)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات



10)المناقشة البيانية:

$$f(-|x|) = \ln(|m|)x + 2$$

نضع $h(x) = f(-|x|)$

ومنه:

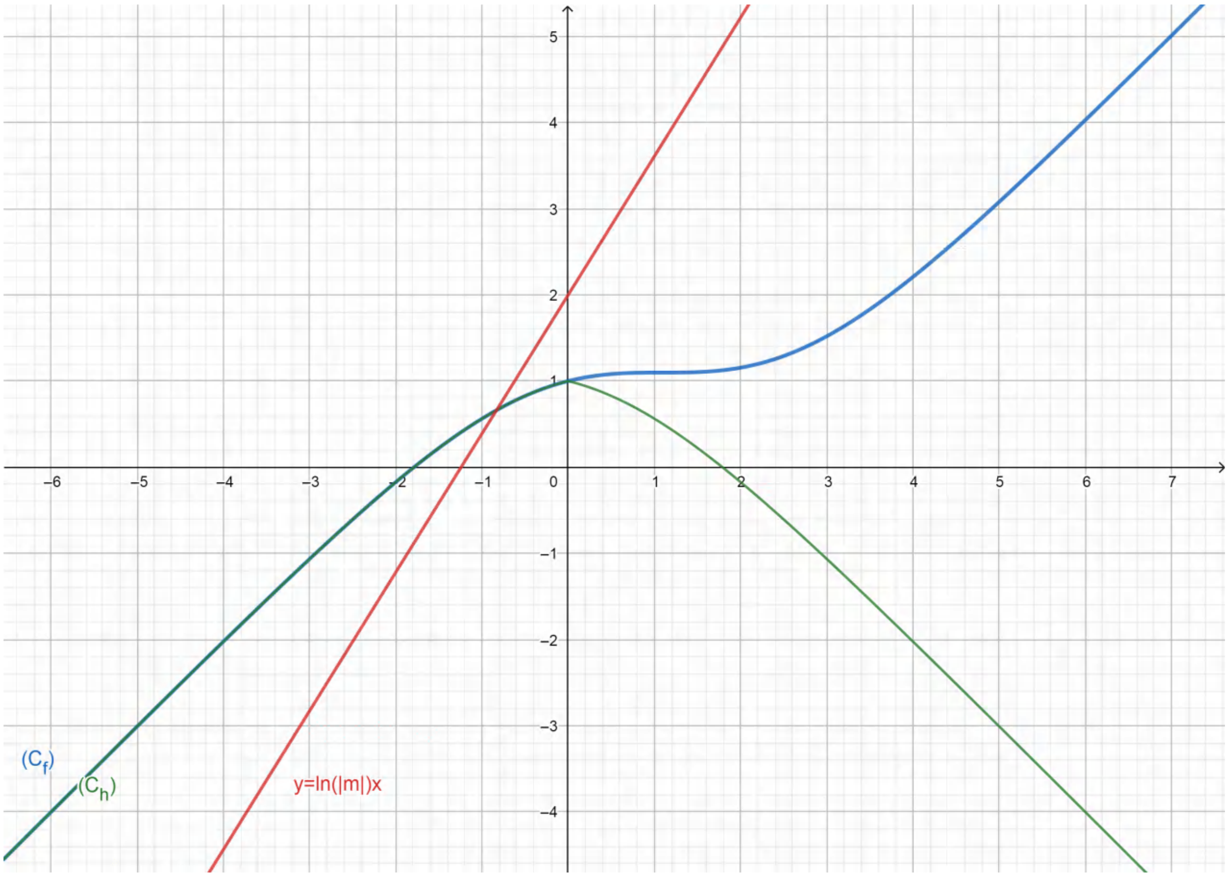
$$h(x) = \begin{cases} f\big(-(x)\big); x \geq 0 \\ f\big(-(-x)\big); x \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} f(-x); x \geq 0 \\ f(x); x \leq 0 \end{cases}$$

لما $x \leq 0$ المنحني (C_h) ينطبق على (C_f) .

لما $x \geq 0$ المنحني (C_h) يناظر المنحني العكسي لـ (C_f) بالنسبة لمحور التراتيب.

ومنه تمثيل (C_h) كالآتي:

المنحني (C_f) و المنحني (C_h) و المستقيم $y = \ln|m|\, x$



ومنه المناقشة كالآتي:

المعادلة لا تقبل حلولا لما:

$$-1 \le \ln|m| \le 1$$

أي:

$$\ln|m| \ge -1 \text{ و } \ln|m| \le 1$$

أي:

$$|m| \ge e^{-1} \text{ و } |m| \le e$$

أي:

$$m \in]-e; e[$$

و

$$m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[$$

أي:

$$m \in \begin{pmatrix}]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty[\\ \cap \\ ]-e; e[\end{pmatrix}$$

أي:

$$m \in]-e; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; e[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| < -1$$

أي:

$$|m| < e^{-1}$$

أي:

$$-e^{-1} < m < e^{-1}$$

أي:

$$m \in]-e^{-1}; e^{-1}[$$

المعادلة تقبل حلا وحيدا لما:

$$\ln|m| > -1$$

أي:

$$|m| > e$$

أي:

$$m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$$

لما: $< \ln|m| \le 1$ أي: $|m| \le e$ أي: $-e \le m \le e$ أي لما: $m \in [-e; e]$ المعادلة لا تقبل حلول

لما: $\ln|m| > 1$ أي: $|m| > e$ أي: $m \in]-\infty; -e[\cup]e; +\infty[$ المعادلة تقبل حل وحيدا

(II)

1) دراسة تغيرات الدالة g .

نلاحظ أنّ $g(x) = (f \circ k)(x)$ حيث $k(x) = 3x - 2$

2) التحقق من أن $g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 0$:

$$g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = f\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = f(\alpha) = 0$$

- تبيين أن $g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 3f'(3x-2)$ ومنه:

$$g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) = 3f'\left(3\left(\frac{\alpha+2}{3}\right) - 2\right) = 3f'(\alpha)$$

3) استنتاج معادلة المماس (d) لمنحنى الدالة g عند النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+2}{3}$:

$$\begin{aligned}(d): y &= g'\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + g\left(\frac{\alpha+2}{3}\right)\\ &= 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right) + 0\\ &= 3f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha+2)\end{aligned}$$

4) التحقق من معادلة المماس (d) :

لدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha) = 0 &\Rightarrow \alpha + 2 - \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3} = 0\\ &\Rightarrow \alpha + 2 = \frac{4e^{\alpha}}{e^{\alpha}+3}\\ &\Rightarrow (\alpha+2)(e^{\alpha}+3) - 4e^{\alpha} = 0\\ &\Rightarrow ae^{\alpha} + 3a + 2e^{\alpha} + 6 - 4e^{\alpha} = 0\\ &\Rightarrow e^{\alpha}(a-2) = -(3a+6)\\ &\Rightarrow e^{\alpha} = \frac{3a+6}{2-\alpha}\end{aligned}$$

ولدينا:

$$(d): y = 3f'(\alpha)\left(x - \frac{\alpha+2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{e^{\alpha} - 3}{e^{\alpha} + 3}\right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} - 3}{\frac{3\alpha + 6}{2 - \alpha} + 3}\right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 \left(x - \frac{\alpha + 2}{3}\right)$$

$$= \frac{3\alpha^2}{4} x - \frac{\alpha^2(\alpha + 2)}{4}$$

03 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) من البيان نجد:

أ/

- $\lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -1$
- $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = +\infty$

ب-

- $g(0) = -2$
- $g'(0) = 0$

2) ايجاد a ، b و c :

لدينا:

$$\begin{cases} g(0) = -2 \\ g'(0) = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (a(0)+b)e^0 + c = -2 \\ (a(0)+a+b)e^0 = 0 \\ \lim_{x\to-\infty}[(ax+b)e^x + c] = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b + c = -2 \\ a + b = 0 \\ c = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{cases}$$

3) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $\lim_{x\to+\infty}[g(x)] \times \lim_{x\to-\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

- التحقق من أن $1.2 < \alpha < 1.3$:

لدينا: $g(1.3) = 0.1$ و $g(1.2) = -0.3$

ولدينا: $g(1.3) \times g(1.2) < 0$

ومنه: $1.2 < \alpha < 1.3$.

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$:

الخليل للرياضيات

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{x}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ (نهاية شهيرة)

- <u>التفسير الهندسي</u>: المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}\right] = -\infty$$

2) أ/ تبيين أنه من اجل كل x حقيقي: $f'(x) = -\frac{g(x)}{(e^x+1)^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{e^x+1-xe^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(1-x)e^x+1}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-\left((x-1)e^x-1\right)}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $f(0) = 0$

ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{(e^x+1)^2} < 0$ ومنه إشارة المشتقة عكس إشارة $g(x)$.

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

3) تعيين $\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ دون حساب:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = \frac{-g(\alpha)}{(e^\alpha+1)^2} = 0$$

- <u>تفسير الهندسي</u>:

المنحني (C_f) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة α موازٍ لحامل محور الفواصل.

4) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) يمر من المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

يوجد مماس يمر من $O(0;0)$ معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)(0-a) + f(a) &= 0 \\ &\Rightarrow -af'(a)x + f(a) = 0 \\ &\Rightarrow a\frac{(a-1)e^a - 1}{(e^a+1)^2} + \frac{a}{e^a+1} = 0 \\ &\Rightarrow a(a-1)e^a - a + a(e^a+1) = 0 \\ &\Rightarrow a^2e^a = 0 \\ &\Rightarrow a = 0 \end{aligned}$$

ومنه معادلة المماس هي:

$$\begin{aligned} (T)\colon y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ y &= \frac{-g(0)}{(e^0+1)^2}x + \frac{0}{e^0+1} \\ y &= \frac{1}{2}x \end{aligned}$$

5) تبيين أن $f(\alpha) = \alpha - 1$:

مما سبق لدينا

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha - 1 = 0 \\ &\Rightarrow (\alpha-1)e^\alpha = 1 \\ &\Rightarrow e^\alpha = \frac{1}{\alpha-1} \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{\alpha}{e^\alpha+1} \\ &= \frac{\alpha}{\frac{1}{\alpha-1}+1} \\ &= \frac{\alpha(\alpha-1)}{\alpha} \\ &= \alpha - 1 \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$\begin{aligned} &1.2 < \alpha < 1.3 \\ &0.2 < \alpha - 1 < 0.3 \\ &0.2 < f(\alpha) < 0.3 \end{aligned}$$

6) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x-xe^x-x}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{-xe^x}{e^x+1}\right] = 0$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$ (نهاية شهيرة)

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق: $[f(x)-y]$:

$$f(x)-y = \frac{x}{e^x+1}-x$$
$$= \frac{x-xe^x-x}{e^x+1}$$
$$= \frac{-xe^x}{e^x+1}$$

لدينا $(e^x+1) > 0$ و $e^x > 0$ ومنه الإشارة من إشارة $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

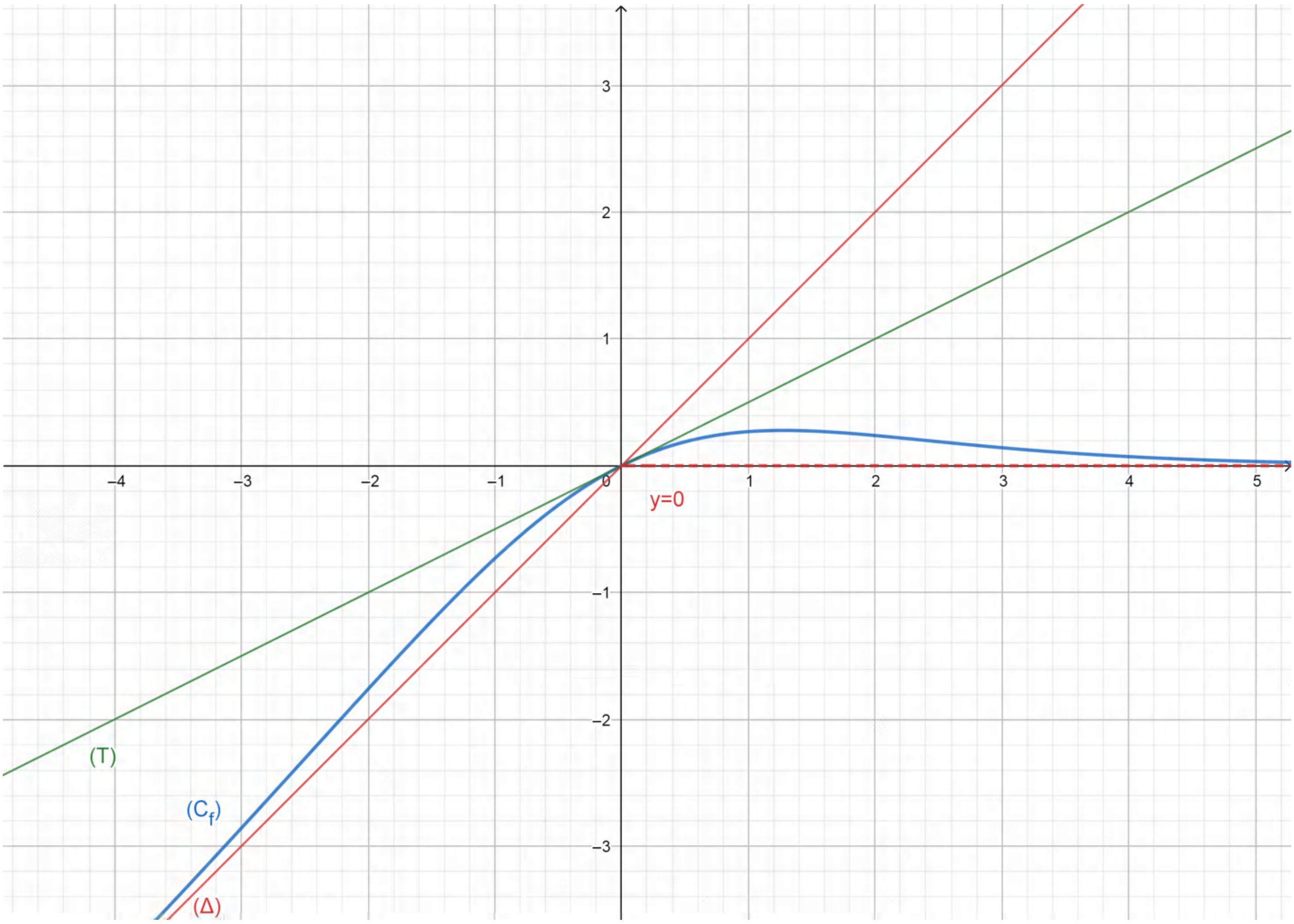
الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) في المجال: $]-\infty;0[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة 0
- (C_f) تحت (Δ) في المجال: $]0;+\infty[$

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب $y=0$ و المستقيم المقارب المائل (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $0 < m < \alpha$ المعادلة تقبل حلين موجبين

لما $m = \alpha$ المعادلة تقبل حل مضاعف موجب

لما $m > \alpha$ المعادلة لا تقبل حلولا

04

حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1-\frac{4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{e^{2x}+1-2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{(e^x-1)^2}{(e^x+1)^2} \\ &= \left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \end{aligned}$$

ب/ دراسة إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $f'(x)>0$ ومنه الدالة f متزايدة تماما.

لدينا $f'(0)=0$ أي المشتقة تنعدم ولا تغير اشارتها

ومنه نستنتج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف.

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right] = -\infty$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty}[f(x)] &= \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}\right] \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{\frac{4}{e^x}}{1+\frac{1}{e^x}}\right] \\ &= +\infty \end{aligned}$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	1	$+\infty$

2) برهان أن النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀شاهد هذا التذكير▶
(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نثبت أن: $(2(0)-x) \in D_f$:

لدينا $x \in \mathbb{R}$ ومنه $(-x) \in \mathbb{R}$

- نثبت أن : $f(2(0)-x)+f(x)=2(1)$:

لدينا:

$$
\begin{aligned}
f(2(0)-x)+f(x) &= -x-1+\frac{4}{e^{-x}+1}+x-1+\frac{4}{e^{x}+1} \\
&= -2+\frac{4}{e^{-x}+1}+\frac{4}{e^{x}+1} \\
&= \frac{-2(e^{-x}+1)(e^{x}+1)+4(e^{x}+1)+4(e^{-x}+1)}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+1)+2(e^{-x}+1)-(e^{-x}+1)(e^{x}+1)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[2(e^{x}+e^{-x}+2)-(e^{x}+e^{-x}+2)]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{(e^{-x}+1)(e^{x}+1)} \\
&= \frac{2[e^{x}+e^{-x}+2]}{e^{x}+e^{-x}+2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

ومنه النقطة $A(0;1)$ مركز تناظر المنحني (C_f) .

3) أ/ تبيين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x+1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\frac{4}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}\right] = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = x-1$.

ب/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}\left[x-1+\frac{4}{e^x+1}-x\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[-1+\frac{4}{e^x+1}\right]$$
$$= 3$$

الاستنتاج:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 3 \Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x]-3 = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-x-3] = 0$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty}[f(x)-(x+3)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x+3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$

◄ ملاحظة: أمكننا إدخال 3 داخل النهاية لانها لا تتعلق بالمتغير x ►

4) تبيين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $f(-2.76) = 0.001$ و $f(-2.77) = -0.3$

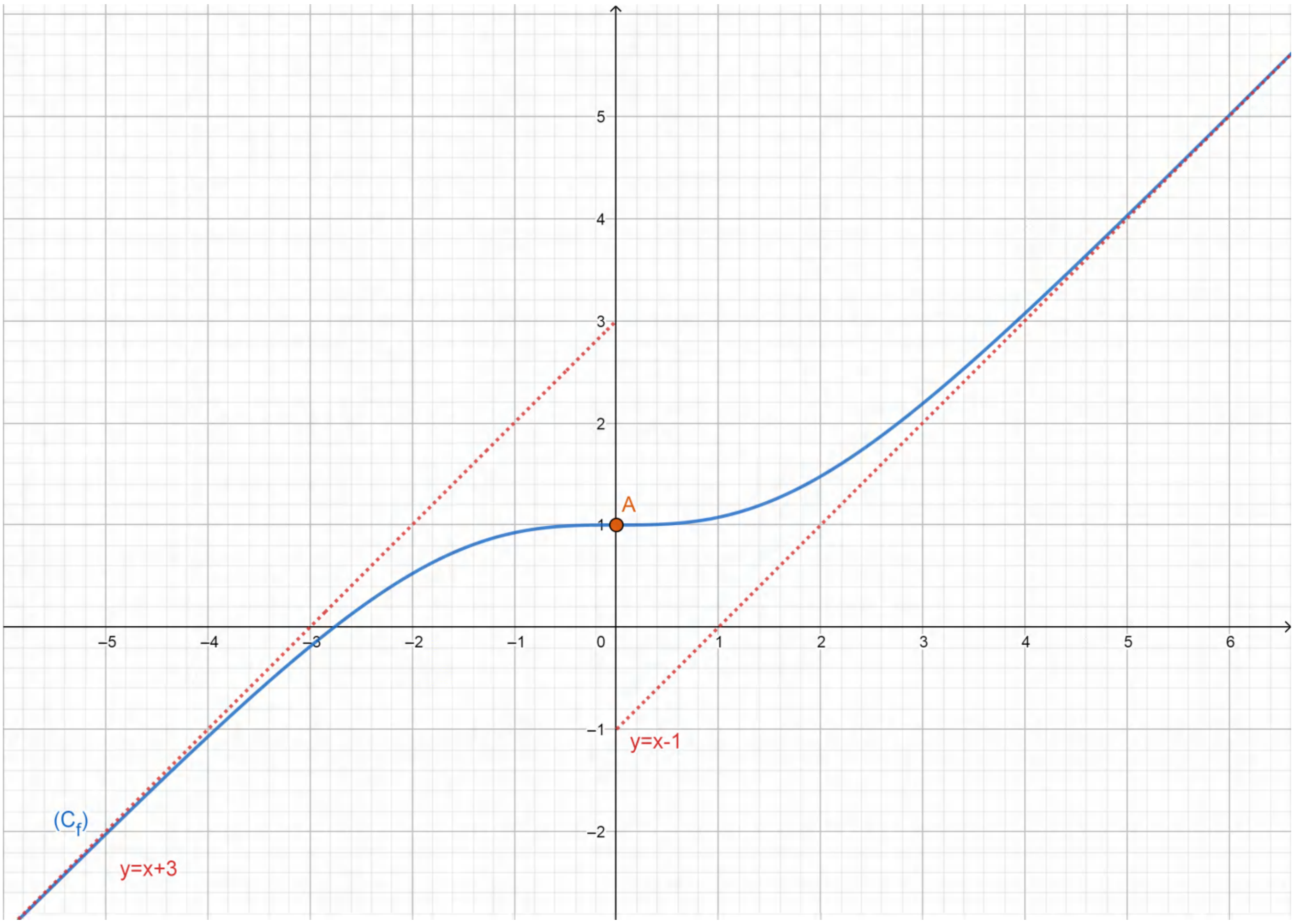
ولدينا: $f(-2.77)\times f(-2.76) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α .

5) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $(y = x-1)$ و $(y = x+3)$
- نعين نقطة A مركز تناظر المنحني (C_f)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(II)

1) اتجاه تغير الدالة g :

نلاحظ أن $g(x) = (f \circ \varphi)(x)$ حيث: $\varphi(x) = 4x + 1$

لدينا الدالة φ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

والدالة f متزايدة تماما أيضا على $\mathbb{R}$ (لهما نفس اتجاه التغير)

ومنه الدالة g متزادية تماما على $\mathbb{R}$

2) التحقق من أن: $g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 0$

$$\begin{aligned} g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= f\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right) \\ &= f(\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

تبيين أن: $g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) = 4f'(\alpha)$:

لدينا: $g'(x) = 4f'(4x+1)$ ومنه :

$$\begin{aligned} g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right) &= 4f'\left(4\frac{\alpha-1}{4}+1\right) \\ &= 4f'(\alpha) \end{aligned}$$

f دالة معرفة على مجال I
وg دالة معرفة على المجال (I)

• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I

• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

الخليل للرياضيات

3) استنتاج معادلة المماس (T) لمنحني الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha-1}{4}$:

$$(T): y = g'\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+g\left(\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= 4f'(\alpha)\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)+0$$
$$= 4f'(\alpha)x - f'(\alpha)(\alpha-1)$$

4) التحقق من أن معادلة المماس (T) تعطى بـ: $y=(\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$:

لدينا:

$$f(\alpha)=0 \Rightarrow \alpha-1+\frac{4}{e^{\alpha}+1}=0$$
$$\Rightarrow \frac{4}{e^{\alpha}+1}=1-\alpha$$
$$\Rightarrow e^{\alpha}=\frac{3+\alpha}{1-\alpha}$$

ومنه:

$$(T): y = 4\left(\frac{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}-1}{\frac{3+\alpha}{1-\alpha}+1}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= 4\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)^2\left(x-\frac{\alpha-1}{4}\right)$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)}{4}$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha+1)(\alpha-1)}{4}$$
$$= (\alpha+1)^2x-\frac{(\alpha+1)(\alpha^2-1)}{4}$$

(III)

1) تبيين أن الدالة k زوجية :

لدينا $(-x)\in\mathbb{R}$

ولدينا:

$$k(-x)=f(|-x|)=f(|x|)=h(x)$$

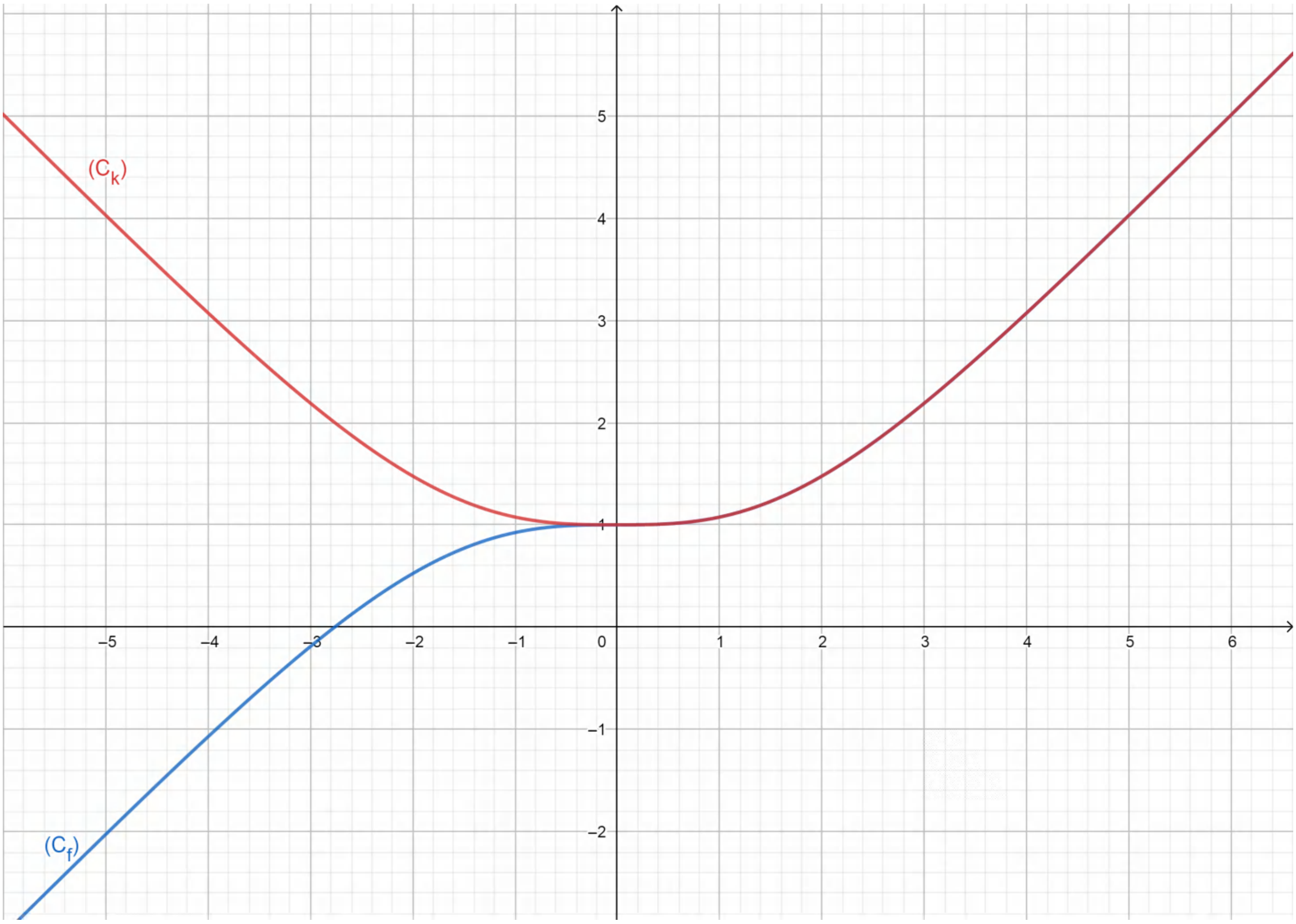
ومنه الدالة k زوجية.

2) أ/ تبيين كيفية تمثيل (C_k) انطلاقا من (C_f) :

لمّا $x\geq 0$: (C_k) ينطبق على (C_f)

ولما $x \leq$: (C_k) يناظر (C_f) بالنسبة لحامل محور التراتيب (yy')

ب/ التمثيل البياني لـ (C_k) :



(IV)

1) التحقق من أنه كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) = f(x) + 1$:

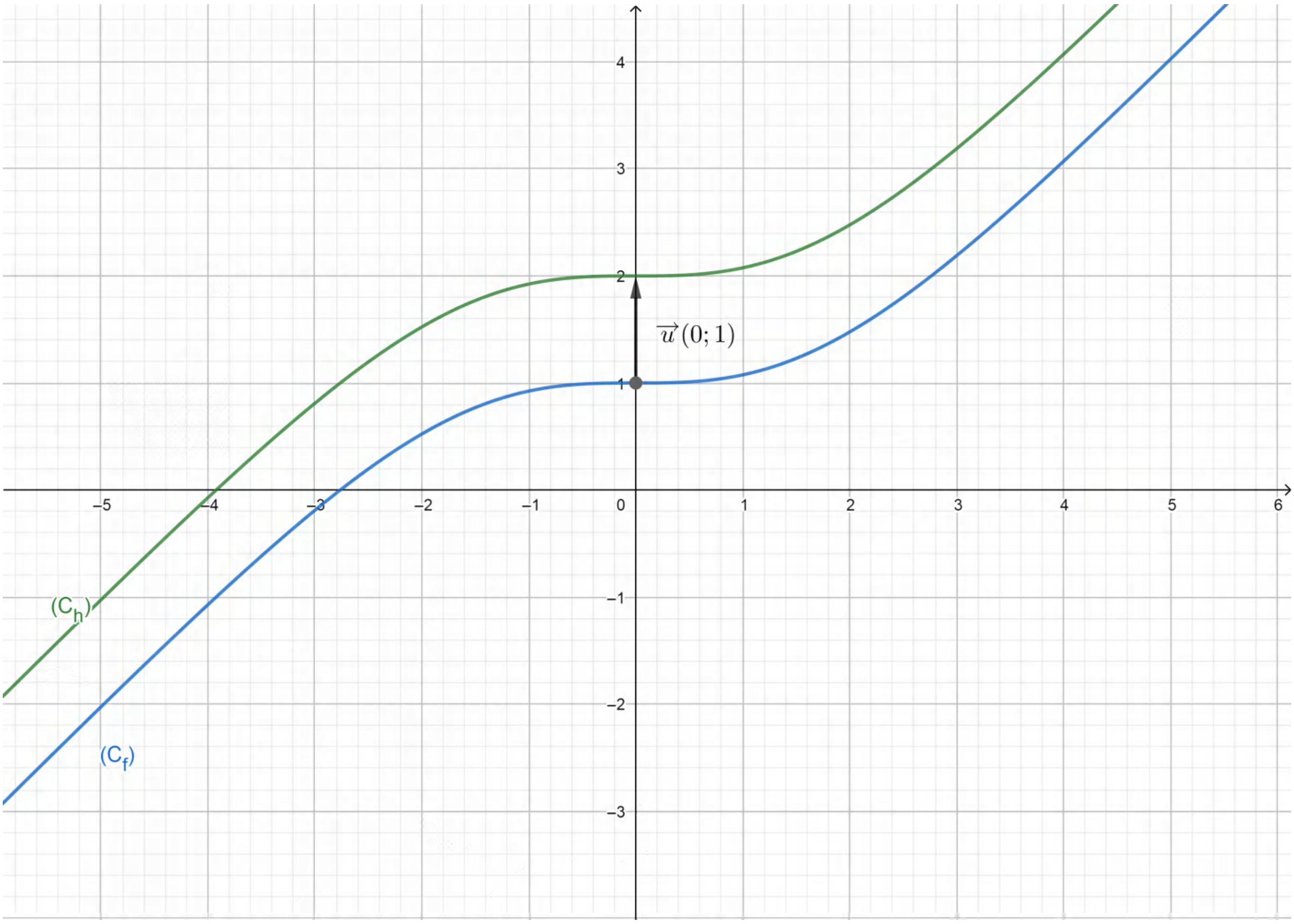
$$\begin{aligned} f(x) + 1 &= x - 1 + \frac{4}{e^x + 1} + 1 \\ &= x + \frac{4}{e^x + 1} \\ &= h(x) \end{aligned}$$

2) أ/ استنتاج أن (C_h) هو صورة (C_f) بتحويل نقطي بسيط يُطلب تعيينه:

لدينا: $h(x) = f(x) + 1$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بواسطة انسحاب شعاعه $\vec{u}$ حيث: $\vec{u}(0; 1)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :



(C_h)
(C_f)
$\vec{u}(0;1)$

حل المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim_{x\to-\infty}[x+2-e^x] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}[x+2-e\text{^}x\,] = \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(\frac{x}{e^x}+\frac{2}{e^x}-1\right)\right] = -\infty$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right] = 0$ نهاية شهيرة)

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 1 - e^x$$

لدينا:

$$g'(x) = 0 \Rightarrow 1 - e^x = 0 \Rightarrow e^x = 1 \Rightarrow x = \ln 1 \Rightarrow x = 0$$

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$-\infty \nearrow$	1	$\searrow -\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلان α و β :

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا: $g(1.15) = -0.008$ و $g(1.14) = 0.01$

ولدينا: $g(1.14) \times g(1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد α في المجال $]1.14;1.15[$:

ولدينا: $g(-1.8)=0.03$ و $g(-1.9)=-0.04$

ولدينا: $g(-1.9)\times g(-1.8)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حل وحيد β في المجال $]-1.9;-1.8[$:

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		β		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right]=-1$$

لأن: $\lim\limits_{x\to-\infty}[xe^x]=0$ (نهاية شهيرة)

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{xe^x+1}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{x+\frac{1}{e^x}}\right]=0$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته: $y=-1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y=0$.

2) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x)=\frac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}$:

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{e^x(xe^x+1)-(e^x+xe^x)(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}\\&=\frac{xe^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x-xe^{2x}+xe^x}{(xe^x+1)^2}\\&=\frac{-e^{2x}+2e^x+xe^x}{(xe^x+1)^2}\\&=\frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}\\&=\frac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}\end{aligned}$$

3) دراسة اتجاه تغير الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(xe^x + 1)^2 > 0$ و منه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

ولدينا : $f(0) = 0$ ومنه جدول التغيرات كالآتي:

x	$-\infty$		β		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$f(\beta)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

4) تعيين دون حساب كل من : $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$ و $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\frac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right]$:

- $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\dfrac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] = f'(\alpha) = 0$
- $\lim\limits_{x\to\beta}\left[\dfrac{f(x)-f(\beta)}{x-\beta}\right] = f'(\beta) = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مماسين موازيين لحامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و β .

5) تبيين أنّ: $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1}$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha + 2 - e^\alpha$$
$$\Rightarrow e^\alpha = \alpha + 2$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha + 2 - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} \\ &= \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} \\ &= \frac{1}{\alpha + 1} \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$1.14 < \alpha < 1.15$$
$$1.14 + 1 < \alpha + 1 < 1.15 + 1$$

$$\frac{1}{2.15} < \frac{1}{\alpha+1} < \frac{1}{2.14}$$

ومنه:

$$0.46 < f(\alpha) < 0.46$$

6) تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $h(x) \leq 0$:

لدينا $h(0) = 0$

ولدينا:

- $\lim_{x\to+\infty}[h(x)] = \lim_{x\to+\infty}[e^x - xe^x - 1]$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 - x - \frac{1}{e^x}\right)\right]$$
$$= -\infty$$
- $\lim_{x\to-\infty}[h(x)] = \lim_{x\to-\infty}[e^x - xe^x - 1]$
$$= -\infty$$

ولدينا:

$$h'(x) = -xe^x$$

جدول تغيرات الدالة h :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$+$	0	$-$
$h(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ $-\infty$

من جدول التغيرات نجد أعلى قيمة تأخذها الدالة h هي 0

ومنه $h(x) \leq 0$.

7) التحقق من ان: $p(0) = 0$:

$$p(0) = 1 - 2 + 1 = 0$$

8) أ- تبيين أن المنحنى $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$:

◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

ومنه:

$$f'(a) \times -1 = -1 \Rightarrow f'(a) = 1$$
$$\Rightarrow \frac{e^a(a + 2 - e^a)}{(ae^a + 1)^2} = 1$$
$$\Rightarrow e^a(a + 2 - e^a) = (ae^a + 1)^2$$
$$\Rightarrow (ae^a + 1)^2 - e^a(a + 2 - e^a) = 0$$

$$\Rightarrow a^2e^{2a} + 1 + 2ae^a + e^{2a} - 2e^a - ae^a = 0$$
$$\Rightarrow (a^2+1)e^{2a} + (a-2)e^a + 1 = 0$$
$$\Rightarrow p(a) = 0$$
$$\Rightarrow a = 0$$

المعادلة تقبل حل، ومنه المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) عمودي على المستقيم ذو المعادلة $y = -x + 5$

ب- كتابة معادلة للمماس (T) :

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$
$$= x + f(0)$$
$$= x$$

ج- دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمماس (T) :

ندرس إشارة الفرق : $f(x) - y$

$$f(x) - y = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x$$
$$= \frac{e^x - 1 - x^2e^x - x}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{e^x(1-x^2) - (1+x)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{e^x(1-x)(1+x) - (1+x)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{(1+x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1}$$
$$= \frac{(1+x)h(x)}{xe^x + 1}$$

لدينا: $h(x) \leq 0$

ولدينا:

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$1+x$	$-$	0	$+$

- ندرس إشارة $(xe^x + 1)$:

نضع $\varphi(x) = xe^x + 1$

$$\varphi'(x) = e^x + xe^x = e^x(1+x)$$

$e^x > 0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ من إشارة $(1+x)$

$$1 + x = 0 \Rightarrow x = -1$$

- جدول تغيرات $\varphi(x)$:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$-$	0	$+$
$\varphi(x)$	1 ↘	0.6	↗ $+\infty$

من جدول تغيرات $\varphi(x)$ نلاحظ أن $\varphi(x) > 0$ ومنه:

اذن إشارة الفرق $f(x) - y$ كالآتي

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$-$
$1 + x$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (T) لما $x \in]-\infty; -1[$
- (C_f) يقطع (T) في النقطة $A(-1; -1)$
- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-1; +\infty[$

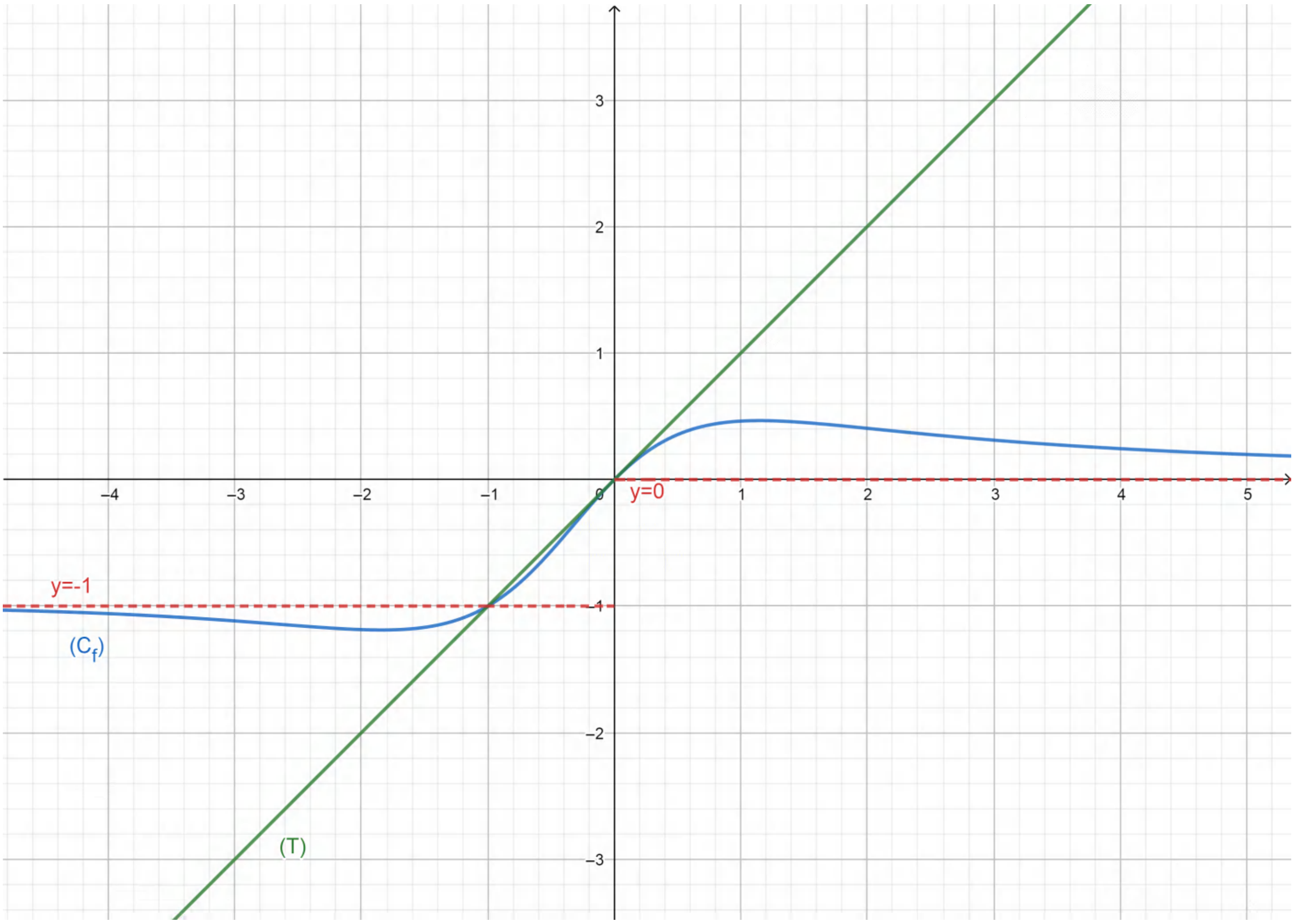
- الاستنتاج:

المماس (T) يقطع المنحني (C_f) في النقطة $A(-1; -1)$ معناه توجد نقطة انعطاف

9) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $(y = -1)$ و $(y = 0)$
- نرسم المماس (T).
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



10) المناقشة البيانية:

$$e^{x}(1-mx^{2})+mx-1=0 \Rightarrow e^{x}-mx^{2}e^{x}+mx-1=0$$
$$\Rightarrow mx(1-xe^{x})=1-e^{x}$$
$$\Rightarrow mx=\frac{1-e^{x}}{1-xe^{x}}$$
$$\Rightarrow \frac{e^{x}-1}{xe^{x}-1}=mx$$
$$\Rightarrow f(x)=mx$$

مجموعة حلول المعادلة هي نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة : $f(x)=mx$

ومنه:

لما $m=1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا $x=0$ وحلا سالبا

لما $0<m<1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m\leq 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

لما $m>1$ المعادلة تقبل حلا معدوما

06 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة المسألة

1) دراسة تغيرات الدالة f' :

لدينا:

$$f'(x) = 2 - e^{x-1} - xe^{x-1}$$
$$= 2 - (1+x)e^{x-1}$$

ومنه ندرس تغيرات الدالة f' :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= 2$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f'(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2-(1+x)e^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[f'(x)]$$
$$= -\infty$$

- حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -e^{x-1} - (1+x)e^{x-1}$$
$$= -(2+x)e^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $-(2+x)$:

$$-(2+x) = 0 \Rightarrow x = -2$$

ومنه:

- جدول تغيرات $f'(x)$:

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$	2	$\nearrow$	$f'(-2)$	$\searrow$	$-\infty$

2) حساب $f'(1)$:

$$f'(1) = 2 - (1+1) = 0$$

- إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3) دراسة تغيرات الدالة f :

- النهايات:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}]$$
$$= -\infty$$
لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^{x-1}] = 0$
- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[2x+1-xe^{x-1}]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^{x-1}\left(\frac{2x}{e^{x-1}}+\frac{1}{e^{x-1}}-x\right)\right]$$
$$= -\infty$$
لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x}{e^{x-1}}\right] = 0$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

4) أ/ تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = 2x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] = \lim_{x\to-\infty}[2x+1-xe^{x-1}-2x-1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[-xe^{x-1}]$$
$$= 0$$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$

ب/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق: $f(x)-y$:

$$f(x)-y = -xe^{x-1}$$

لدينا $e^{x-1} > 0$ ومنه الإشارة من $(-x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما : $x<0$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الاحداثيات: $(0;1)$
- (C_f) تحت (Δ) لما : $x>0$.

5) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ):

المستقيم (T) يوازي المستقيم (Δ) معناه:

$$\begin{aligned} f'(a)=2 &\Rightarrow 2-(1+a)e^{a-1}=2 \\ &\Rightarrow -(1+a)e^{a-1}=0 \\ &\Rightarrow -(1+a)=0 \\ &\Rightarrow a=-1 \end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} (T): y &= f'(-1)\big(x-(-1)\big)+f(-1) \\ &= 2x+2+2(-1)+1-(-1)e^{-1-1} \\ &= 2x+1+e^{-2} \end{aligned}$$

إذن معادلة المماس (T) هي :

$$y=2x+1+e^{-2}$$

ب/ تبيين أن المنحني (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β :

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(1.9)\times f(2)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1.9;2[$

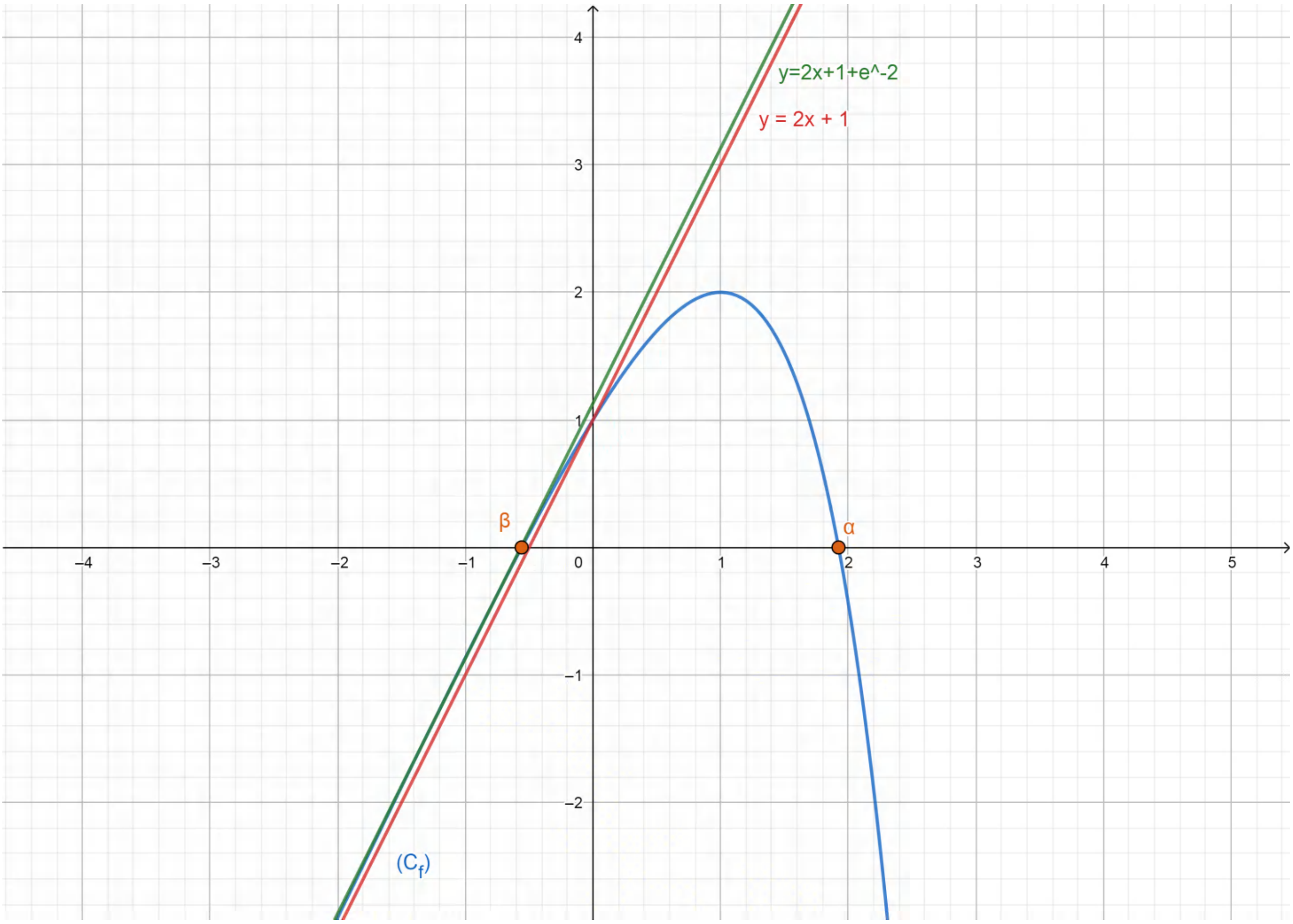
ولدينا: $f(-0.6)\times f(-0.5)<$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة ، المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]-0.6;-0.5[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعين α و β نقط تقاطع المنحني (C_f) مع حامل محور الفواصل.
- نرسم المستقيم المقارب المائل : $(y=2x+1)$.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا: من المعادلة (E) : $m \in \mathbb{R}_+^*$

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y = 2x + \ln m$

ومنه:

لما	$\ln m < 1$	أي	$m < e$	أي	$m \in]0; e[$	المعادلة تقبل حل وحيد موجب
لما	$\ln m = 1$	أي	$m = e$		المعادلة تقبل حل وحيد معدوم	
لما	$1 < \ln m < 1 + e^{-2}$	أي	$e < m < e^{1+e^{-2}}$	أي	$m \in \left]e; e^{1+e^{-2}}\right[$	المعادلة تقبل حلين سالبين
لما	$\ln m = 1 + e^{-2}$	أي	$m = e^{1+e^{-2}}$		المعادلة تقبل حل مضاعف	
لما	$\ln m > 1 + e^{-2}$	أي	$m > e^{1+e^{-2}}$	أي	$m \in \left]e^{1+e^{-2}}; +\infty\right[$	المعادلة لا تقبل حلول

حل المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g' :

- <u>النهايات:</u>

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[(2x+1)e^x - 1] = -1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[(2x+1)e^x - 1] = +\infty$

- <u>التفسير الهندسي للنهايات:</u>

- منحني الدالة g يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$

- <u>حساب $g'(x)$:</u>

$$g'(x) = 2e^x + (2x+1)e^x$$
$$= (2x+3)e^x$$

لدينا $e^x > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $(2x+3)$:

$$2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -\frac{3}{2}$$

- <u>جدول تغيرات $g(x)$:</u>

x	$-\infty$		$\frac{-3}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1		$f\left(\frac{-3}{2}\right)$		$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = (2(0)+1)e^0 - 1 = 0$$

- استنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2] = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}[x(e^x-1)^2] = +\infty$

2) أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $-\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y] &= \lim_{x\to-\infty}[x(e^x-1)^2-x]\\ &= \lim_{x\to-\infty}[xe^{2x}+x-2xe^x-x]\\ &= \lim_{x\to-\infty}[xe^x(e^x-2)]\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:

$$f(x)-y = xe^x(e^x-2)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xe^x = 0 \\ e^x - 2 = 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ e^x = 2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \ln 2 \end{cases}$$

ومنه:

x	$-\infty$		0		$\ln 2$		$+\infty$
xe^x		$-$	0	$+$		$+$	
e^x-2		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty;0[\cup]\ln 2\,;+\infty[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطتين $A(0;0)$ و $B(\ln 2\,;\ln 2)$.
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]0;\ln 2[$.

3) أ/ تبيين أنه يوجد من أجل كل عدد حقيقي x $f'(x) = (e^x-1)g(x)$:

$$\begin{aligned}f'(x) &= (e^x-1)^2 + 2xe^x(e^x-1)\\ &= (e^x-1)(e^x-1+2xe^x)\\ &= (e^x-1)(e^x(2x+1)-1)\\ &= (e^x-1)g(x)\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ في إشارة (e^x-1)

$$\begin{aligned}e^x-1=0 &\Rightarrow e^x = 1\\ &\Rightarrow x = \ln 1\\ &\Rightarrow x = 0\end{aligned}$$

- <u>جدول التغيرات:</u>

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
$e^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4) كتابة معادلة ديكارتية للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا معادلة المماس تكتب من الشكل:

$$(T): y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

المماس يمر من المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}
&f'(a)(0-a) + f(a) = 0 \\
&\Rightarrow -a(e^a - 1)g(a) + a(e^a - 1) = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a - 1)[-g(a) + (e^a - 1)] = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a - 1)[-(2a+1)e^a + 1 + e^a - 1] = 0 \\
&\Rightarrow a(e^a - 1)[-2ae^a - e^a + 1 + e^a - 1] = 0 \\
&\Rightarrow -2a^2(e^a - 1)e^a = 0 \\
&\Rightarrow \begin{cases} -2a^2 = 0 \\ e^a - 1 = 0 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ e^a = 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ a = \ln 1 \end{cases} \\
&\Rightarrow a = 0
\end{aligned}$$

ومنه:

$$\begin{aligned}
(T): y &= f'(0)x + f(0) \\
y &= 0x + 0 \\
y &= 0
\end{aligned}$$

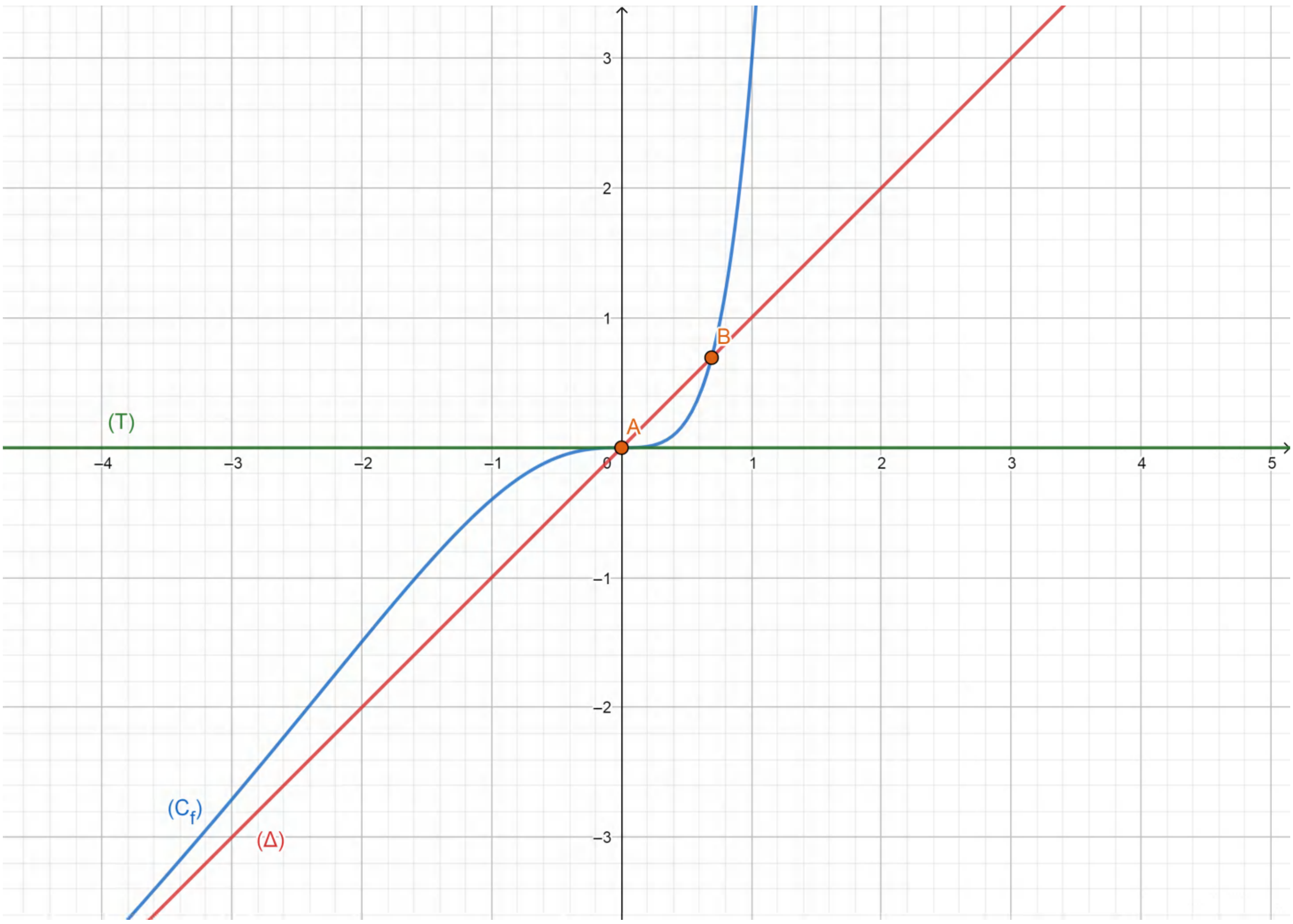
ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = 0$ مماس للمنحني (C_f) .

5) التمثيل البياني:

<u>خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:</u>

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ) : $(y = x)$.
- نعين A و B نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم. (Δ)
- نرسم المماس (T) .

- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



6) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة $f(x) = mx$ هل فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = mx$

لما $m = 0$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو $x = 0$

لما $0 < m < 1$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

لما $m \geq 0$ المعادلة تقبل حلان: حل موجب وحل معدوم

لما $m < 0$ المعادلة تقبل حلا معدوما

الخليل للرياضيات

حل المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ تبيين أنه من اجل كل x من $\mathbb{R}$: $\frac{1}{e^{-x}+1} = 1 - \frac{1}{e^{x}+1}$:

$$\begin{aligned} 1-\frac{1}{e^x+1} &= \frac{e^x+1-1}{e^x+1} \\ &= \frac{e^x}{e^x+1}\times\frac{e^{-x}}{e^{-x}} \\ &= \frac{1}{1+e^{-x}} \end{aligned}$$

ب/ استنتاج أن الدالة f فردية:

$$\begin{aligned} f(-x) &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{-x}+1} \\ &= 1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{-x}+1} \\ &= 1+\frac{1}{2}x-1+\frac{1}{e^x+1}-1+\frac{1}{e^x+1} \\ &= -1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1} \\ &= -\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

إذن الدالة f فردية

2) حساب نهايات الدالة f عند أطرف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)] = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)] = -\infty$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-(e^x+1)^2+4e^x}{2(e^x+1)^2} \\ &= \frac{-e^{2x}-1-2e^x+4e^x}{2(e^x+1)^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{-e^{2x} - 1 + 2e^x}{2(e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{-(e^{2x} + 1 - 2e^x)}{2(e^x + 1)^2}$$
$$= \frac{-(e^x - 1)^2}{2(e^x + 1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)^2$$

دراسة إشارة $f'(x)$:

لدينا $-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2 \leq 0$ ولدينا: $f'(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	

ب/ الاستنتاج:

المشتقة الأولى انعدمت ولم تغير اشارتها إذن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثياتها $O(0;0)$

ج/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا: $f(0) = 0$ ومنه:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4) أ/ تبيين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = 0$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x) - \left(-\frac{1}{2}x + 1\right)\right] = \lim_{x\to+\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x + 1}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x + 1$

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right]$:

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x) + \frac{1}{2}x + 1\right] = \lim_{x\to-\infty}\left[1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x + 1\right]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left[2 - \frac{2}{e^x + 1}\right]$$

$$= 2 - 2 = 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته: $y = -\frac{1}{2}x - 1$

5) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (d) ذو المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x + 1$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$

$$f(x) - y = 1 - \frac{1}{2}x - \frac{2}{e^x + 1} + \frac{1}{2}x - 1$$
$$= \frac{-2}{e^x + 1}$$

لدينا: $(e^x + 1) > 0$ ومنه :

x	$-\infty \qquad +\infty$
$f(x) - y$	$-$
الوضعية	(C_f) تحت (d)

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة المائلة : $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$ و $\left(y = -\frac{1}{2}x + 1\right)$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات


y=-1/2 x-1
(C_f)
y=-1/2 x+1

حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

1) تبيين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]=-\infty$:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=+\infty$$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}[x-2]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}]=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=+\infty\end{cases}$$

- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=-\infty$$

لأن:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-x+\frac{5}{2}\right]=-\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}[x-2]=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}\right]=-\infty\end{cases}$$

2) أ/ تبيين أن المستقيم المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x+\frac{5}{2}$ مقارب مائل للمنحني (C_f) .

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=\lim_{x\to-\infty}\left[-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)\right]=0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ حل المعادلة : $e^{x-2}-4=0$:

$$e^{x-2}-4=0\Rightarrow e^{x-2}=4$$
$$\Rightarrow x-2=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=\ln 4+2$$

- تبيين أن المنحني (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على المجال $]-\infty;2+\ln 4[$ وتحته على المجال $]2+\ln 4\,;+\infty[$:

<u>دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$:</u>

$$f(x)-y=-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)$$

لدينا $-\frac{1}{2}e^{x-2} < 0$ ولدينا:

$$e^{x-2} - 4 = 0 \Rightarrow x = \ln 4 + 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	$\ln 4 + 2$	$+\infty$
$-\frac{1}{2}e^{x-2}$	$-$		$-$
$e^{x-2} - 4$	$-$	0	$+$
$f(x) - y$	$+$	0	$-$

- **الوضعية:**

- (C_f) فوق (Δ) لما: $x \in]-\infty; 2 + \ln 4[$
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة $2 + \ln 4$
- (C_f) تحت (Δ) لما: $x \in]2 + \ln 4\,; +\infty[$

3) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = -(e^{x-2} - 1)^2$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) - \frac{1}{2}e^{2(x-2)} \\ &= -\left(1 + \frac{1}{2}e^{2(x-2)} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2(x-2)}\right) \\ &= -\left(1 + e^{2(x-2)} - 2e^{x-2}\right) \\ &= -(e^{x-2} - 1)^2 \end{aligned}$$

ب/ جدول تغيرات الدالة f :

لدينا $f'(x) \leq 0$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Rightarrow -(e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow (e^{x-2} - 1)^2 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} - 1 = 0 \\ &\Rightarrow e^{x-2} = 1 \\ &\Rightarrow x - 2 = 0 \\ &\Rightarrow x = 2 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

4) حساب $f''(x)$:

$$f''(x) = -2e^{x-2}(e^{x-2} - 1)$$

دراسة $f''(x)$:

لدينا $-2e^{x-2} < 0$

ولدينا:

$$e^{x-2} - 1 = 0 \Rightarrow x = 2$$

ومنه:

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$-2e^{x-2}$	$-$	0	$-$
$e^{x-2}-1$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها معناه أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها 2

5) اثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2 + \ln 3 < \alpha < 2 + \ln 4$:

لدينا الدالة f رتيبة ومستمرة على مجال تعريفها

ولدينا: $f(2 + \ln 4) = -0.83$ و $f(2 + \ln 3) = 0.93$

ولدينا: $f(2 + \ln 4) \times f(2 + \ln 3 < 0)$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

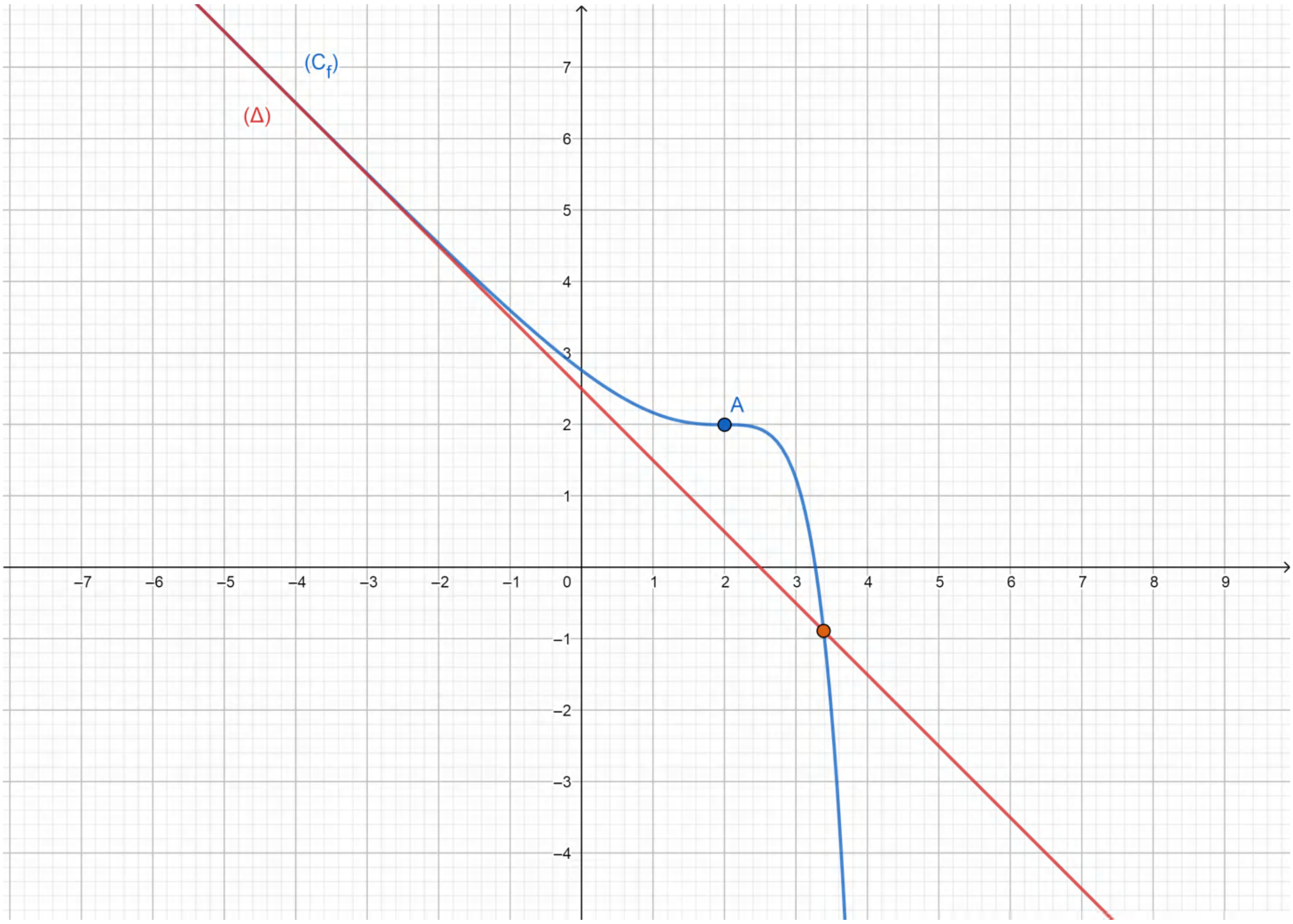
$]2 + \ln 3 ; 2 + \ln 4[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $\left(y = -\frac{1}{2}x - 1\right)$
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات


(Cf)
(Δ)
A
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

حل المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}[e^x + x + 2] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}[e^x + x + 2]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[e^x\left(1 + \frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x}\right)\right]$$
$$= +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = e^x + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$:

ومنه:

- جدول تغيرات $g'(x)$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) أ/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$:

لدينا الدالة g مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $g(-2.2) = -0.08$ و $g(-2.1) = 0.02$

ولدينا: $g(-2.2) \times g(-2.1) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-2.2 < \alpha < -2.1$

ب/ استنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$:

الخليل للرياضيات

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}\right] = \frac{1}{1} = 1$$

لأن: $\lim_{x\to-\infty}[xe^x] = 0$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي معادلته $y = 1$ بجوار $-\infty$.

ب/ تبيين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$:

$$f(x) = \frac{1-xe^x}{e^x+1}$$
$$= \frac{e^x\left(\frac{1}{e^x}-x\right)}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$= \frac{\frac{1}{e^x}-x}{\frac{1}{e^x}+1}$$
$$= \frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}$$

- حساب $\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^{-x}-x}{e^{-x}+1}\right] = -\infty$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{e^x}\right] = 0$

2) التحقق أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$:

$$f'(x) = \frac{(-e^x - xe^x)(e^x+1) - e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x(1+x)(e^x+1) - e^x(1-xe^x)}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-(1+x)(e^x+1) - (1-xe^x)]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{e^x[-e^x - 1 - xe^x - x - 1 + xe^x]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-e^x[e^x + x + 2]}{(e^x+1)^2}$$
$$= \frac{-g(x)e^x}{(e^x+1)^2}$$

3) دراسة تغيرات الدالة f :

لدينا $e^x > 0$ و $(e^x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $-g(x)$

- جدول تغيرات $f(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$1 \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow -\infty$

4) أ/ تبيين أنّ المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f) :

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x] &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x}{e^x+1}-x\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-xe^x+xe^x+x}{e^x+1}\right]\\ &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1+x}{e^x+1}\right]\\ &= 0\end{aligned}$$

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=-x$ مقارب مائل لـ (C_f)

ب/ ادرس الوضع النسبي بين (Δ) و (C_f) :

- دراسة إشارة الفرق $(f(x)-y)$

$$f(x)-y=\frac{1+x}{e^x+1}$$

لدينا: $(e^x+1)>0$ ومنه إشارة الفرق من إشارة البسط:

$$1+x=0 \Rightarrow x=-1$$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]-\infty;-1[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-1;+\infty[$.

5) أ/ تبيين أن: $f(\alpha)=-(\alpha+1)$:

لدينا:

$$\begin{aligned}g(\alpha)=0 &\Rightarrow e^\alpha+\alpha+2=0\\ &\Rightarrow e^\alpha=-(\alpha+2)\end{aligned}$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\frac{1-\alpha e^\alpha}{e^\alpha+1}\\ &=\frac{1+\alpha(\alpha+2)}{-(\alpha+2)+1}\end{aligned}$$

الخليل للرياضيات

$$= \frac{\alpha^2 + 2\alpha + 1}{-(\alpha + 1)}$$
$$= \frac{(\alpha + 1)^2}{-(\alpha + 1)}$$
$$= -(\alpha + 1)$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-2.2 < \alpha < -2.1$$
$$-1.2 < \alpha + 1 < -1.1$$
$$1.1 < -(\alpha + 1) < 1.2$$

اذن:

$$1.1 < f(\alpha) < 1.2$$

ب/ تبيين أن المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها β حيث: $0.5 < \beta < 0.6$:

لدينا الدالة f مستمرة ورتيبة على $\mathbb{R}$

ولدينا $f(0.6) = -0.03$ و $f(0.5) = 0.06$

ولدينا: $f(0.4) \times f(0.6) < 0$

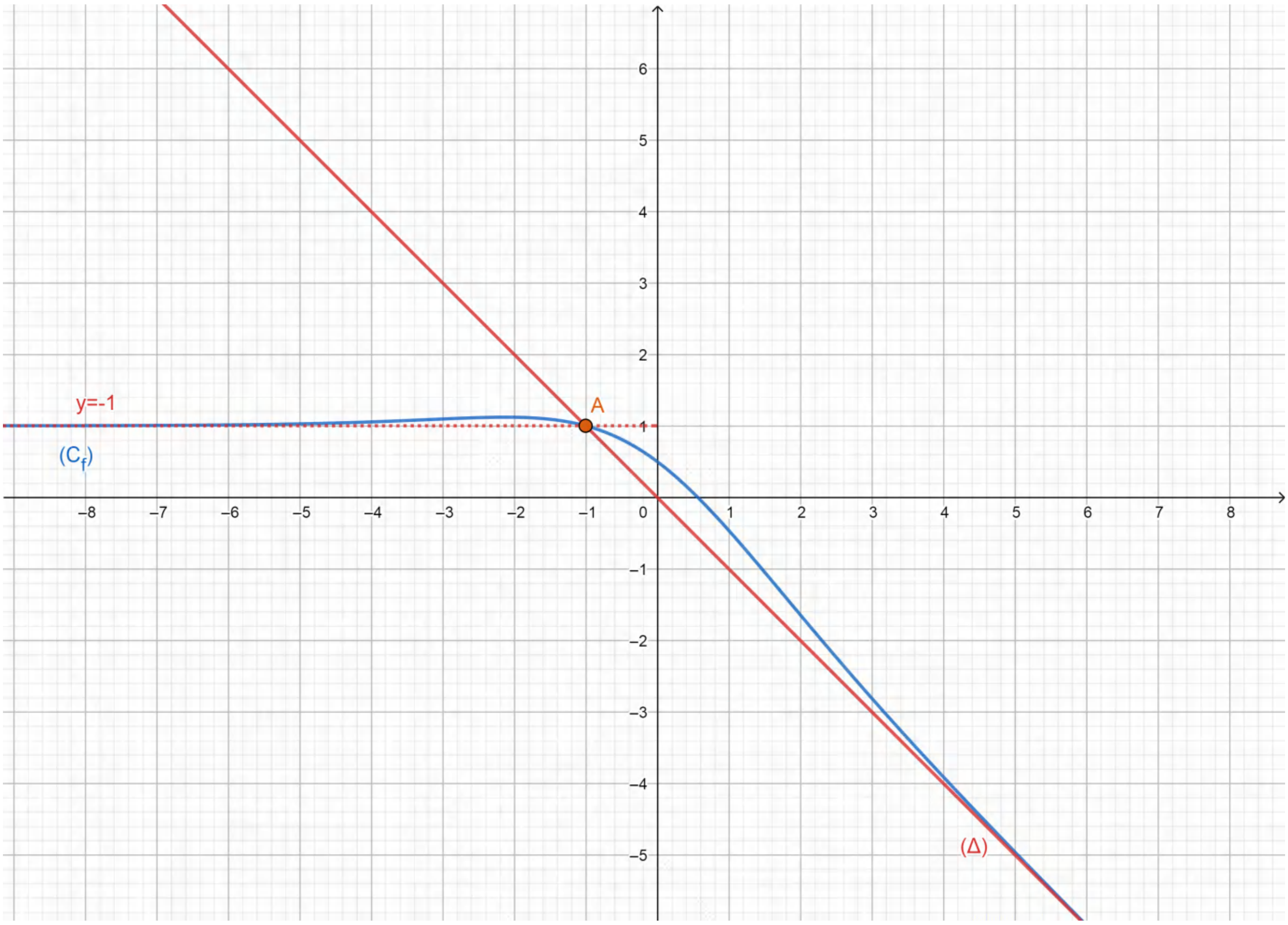
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا β في المجال $]0.5; 0.6[$

ومنه المنحني (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة β .

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد و(C_f) متجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $(y = -1)$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ): $(y = -x)$
- نعين نقطة A تقاطع المنحني (C_f) مع المقارب (Δ)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$\begin{aligned}\ln m+(x+\ln x)e^x-1=0 &\Rightarrow \ln m+xe^x+e^x\ln m-1=0\\ &\Rightarrow \ln m\,(1+e^x)=1-xe^x\\ &\Rightarrow \ln m=\frac{1-xe^x}{1+e^x}\\ &\Rightarrow f(x)=\ln m\end{aligned}$$

ومنه مجموعة الحلول هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m=\ln m$

لما $\ln m<\frac{1}{2}$ أي $m<\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل وحيد موجب

لما $\ln m=\frac{1}{2}$ أي $m=\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل وحيد معدوم

لما $\frac{1}{2}<\ln m<1$ أي $\sqrt{e}<m<e$ المعادلة تقبل حل وحيد سالب

لما $1<\ln m<f(\alpha)$ أي $e<m<e^{f(\alpha)}$ المعادلة تقبل حلان سالبان

لما $\ln m=f(\alpha)$ أي $m=e^{f(\alpha)}$ المعادلة تقبل حل مضاعف سالب

لما $\ln m>f(\alpha)$ أي $m>e^{f(\alpha)}$ المعادلة لا تقبل حلول

حل المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) ايجاد عبارة $g(x)$ بدلالة x :

نضع: $x=t$ نجد:

$$g(t)-2g(1-t)=e^{t}-2e^{1-t}-3t+3$$
$$\Rightarrow\ -2g(1-t)=-g(t)+e^{t}-2e^{1-t}-3t+3$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t)=g(t)-e^{t}+2e^{1-t}+3t-3}\ldots(1)$$

نضع : $t=1-x$ معناه: $x=1-t$ ، نجد:

$$g(1-t)-2g(1-1+t)=e^{1-t}-2e^{1-1+t}-3(1-t)+3$$
$$\Rightarrow g(1-t)-2g(t)=e^{1-t}-2e^{t}+3t$$
$$\Rightarrow \boxed{2g(1-t)-4g(t)=2e^{1-t}-4e^{t}+6t}\ldots(2)$$

نعوض المعادلة (1) في المعادلة (2) نجد:

$$g(t)-e^{t}+2e^{1-t}+3t-3-4g(t)=2e^{1-t}-4e^{t}+6t$$
$$-e^{t}-3=-4e^{t}$$

$$\Rightarrow -3g(t)=-3e^{t}+3t+3$$
$$\Rightarrow g(t)=e^{t}-t-1$$

إذن :

$$g(x)=e^{x}-x-1$$

(2

أ/ حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty}[g(x)]=\lim\limits_{x\to-\infty}[e^{x}-x-1]=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[e^{x}\left(1-\dfrac{x}{e^{x}}-\dfrac{1}{e^{x}}\right)\right]=+\infty$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة g :

لدينا:

$$g'(x)=e^{x}-1$$

ولدينا:

$$g'(x)=0\Rightarrow e^{x}-1=0$$
$$\Rightarrow e^{x}=1$$
$$\Rightarrow x=0$$

ومنه جدول التغيرات:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3) استنتج اتجاه تغير الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $h(x) = 1 - g(-x)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$: نضع:

$u(x) = -x$ و $v(x) = g(u(x)) = g(-x)$ أي $v(x) = (g \circ u)(x)$

لدينا الدالة g متناقصة على المجال $\underbrace{]-\infty; 0]}_{\text{المجال } I}$ والدالة u متناقصة على المجال $\underbrace{[0; +\infty[}_{\text{المجال } g(I)}$

كيف وجدنا المجال $g(I)$:

لدينا: $I =]-\infty; 0]$ و $u(x) \in I$ معناه $u(x) \le 0$ أي $-x \le 0$ ومنه $x \ge 0$ أي $x \in [0; +\infty[$

ومنه: $g(I) = [0; +\infty[$.

وبما أنّ الدالة g متناقصة على $]-\infty; 0]$ و الدالة u متناقصة على $[0; +\infty[$

إذن الدالة k متزايدة على المجال $[0; +\infty[$

بنفس الفكرة نجد: الدالة k متناقصة على المجال $]-\infty; 0]$

- واضح أن $g(-x) = k(x)$ أي: $-g(-x) = -k(x)$

وعليه:

$-k(x)$ متزايدة على المجال $]-\infty; 0]$ و متناقصة على المجال $[0; +\infty[$

ولدينا $h(x)$ و $-k(x)$ لهما نفس اتجاه التغير لأنّ: $h(x) = 1 - k(x)$

اذن:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$h(0) = 1$	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

4) اثبات أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلين α و β:

لدينا الدالة h مستمرة ورتيبة على مجال تعريفها

ولدينا: $h(-1.14) = 0.01$ و $h(-1.15) = -0.08$

ولدينا: $h(-1.14) \times h(-1.15) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1.15;-1.14[$

ولدينا: $h(1.85)=-0.007$ و $h(1.84)=0.001$

ولدينا: $h(1.84)\times h(1.85)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β في المجال $]1.84;1.85[$

اذن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلين α و β

5) استنتاج إشارة كل من $g(x)$ و $h(x)$ تبعا لقيم العدد الحقيقي x :

إشارة $g(x)$:

من جدول تغيرات $g(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$+$	

إشارة $h(x)$:

من جدول تغيرات $h(x)$ لدينا:

x	$-\infty$		α		β		$+\infty$
$h(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $$\lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{x+e^x-x-1}{1+e^x-x-1}\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\frac{-1}{+\infty}=0$$
- $$\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x+g(x)}{1+g(x)}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x-1}{e^x-x}\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1-\frac{1}{e^x}}{1-\frac{x}{e^x}}\right]=1$$

الخليل للرياضيات

لأن: $\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{x}{e^x}\right]=0$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$.

2) أ/ اثبات أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$f(x)=\frac{x+g(x)}{1+g(x)}$$

لدينا البسط عبارة عن مجموعة دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ والمقام كذلك

ومنه البسط على المقام قابل للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

اذن الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- اثبات أن: $f'(x)=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}$:

لدينا:

$$\boxed{\begin{aligned} h(x)&=1-g(-x)\\ &=1-e^{-x}-x+1\\ &=2-x-e^{-x}\end{aligned}}$$

ومنه:

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{e^x(e^x-x)-(e^x-1)(e^x-1)}{(e^x-x)^2}\\ &=\frac{e^x[e^x-x-(1-e^{-x})(e^x-1)]}{(e^x-x+1-1)^2}\\ &=\frac{e^x(e^x-x-e^x+1+1-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\ &=\frac{e^x(2-x-e^{-x})}{(1+g(x))^2}\\ &=\frac{e^x h(x)}{(1+g(x))^2}\end{aligned}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

لدينا: $(1+g(x))^2>0$ و $e^x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $h(x)$.

ولدينا $f(0)=0$

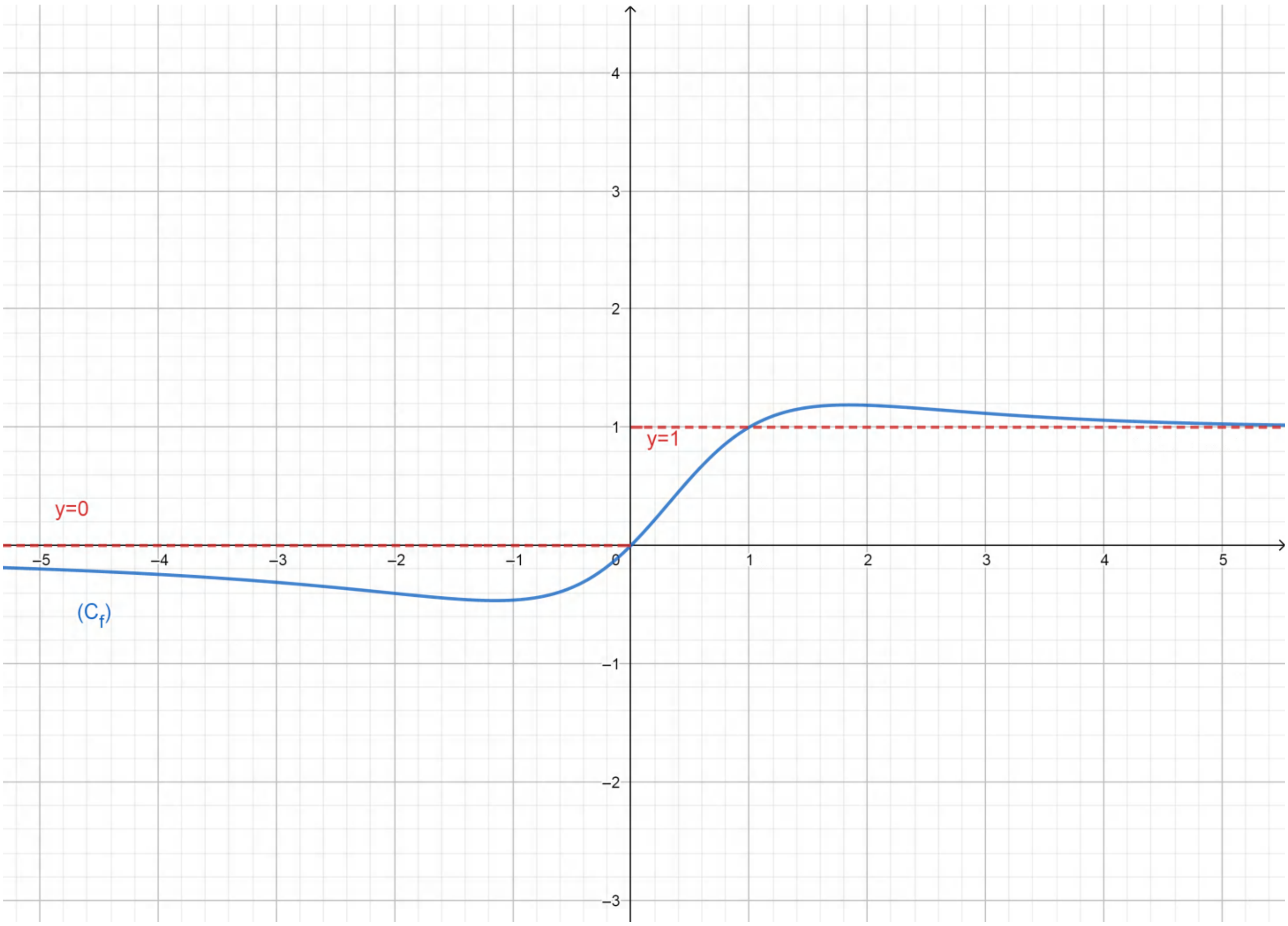
- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		α		0		β		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$f(\beta)$	$\searrow$	1

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



حل المسألة الشاملة رقم: 12

مشاهـــدة المسألة

1) تعيين مجوعة تعريف الدالة f :

الدالة f معرفة لما : $e^x+1\neq 0$

ولدينا $e^x+1>0$

ومنه الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

2) أ/ حساب $\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[f(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]$$
$$=0$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=0$.

ب/ تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x $f(x)=\frac{1}{e^{-x}+1}$:

لدينا:

$$f(x)=\frac{e^x}{e^x+1}$$
$$=\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}$$
$$=\frac{1}{1+e^{-x}}$$

ج/ حساب $\lim_{x\to+\infty}[x]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{e^x}{e^x+1}\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{1+e^{-x}}\right]$$
$$=1$$

- التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y=1$.

3) اثبات أن الدالة f متزايدة تماما:

- حساب $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^xe^x}{(e^x+1)^2}$$

$$= \frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$0 \nearrow 1$

4) تبيين أن النقطة $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر المنحني (C_f) :

◀شاهد هذا التذكير▶
(اثبات ان نقطة مركز تناظر)

- نبيّن أن $(2(0)-x) \in D_f$:

واضح أن $(-x) \in \mathbb{R}$

- نبيّن أن $f(2(0)-x)+f(x) = 2\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$f(2(0)-x)+f(x) = \frac{e^x}{e^x+1}+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$
$$= \frac{e^x(e^{-x}+1)+e^{-x}(e^x+1)}{(e^x+1)(e^{-x}+1)}$$
$$= \frac{1+e^x+1+e^{-x}}{1+e^x+e^{-x}+1}$$
$$= \frac{2}{2}$$
$$= 2\left(\frac{1}{2}\right)$$

5) تعيين معادلة المماس (T) للمنحني (C_f) عند النقطة A :

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$
$$= \frac{e^0}{(e^0+1)^2}x+\frac{e^0}{e^0+1}$$
$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$

6)

أ/ تحليل العبارة: $e^{2x}-2e^x+1$:

$$e^{2x}-2e^x+1 = (e^x-1)^2$$

ب/

$$\bullet\ g'(x)=\frac{1}{4}-f'(x)$$
$$=\frac{1}{4}-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{(e^x+1)^2-4e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}+1+2e^x-4e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^{2x}+1-2e^x}{4(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{(e^x-1)^2}{4(e^x+1)^2}$$

ولدينا:

$$\bullet\ g(0)=0$$

- دراسة تغيرات الدالة g :

حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to-\infty}[g(x)]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right]-\lim_{x\to-\infty}[f(x)]$$
$$=-\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[g(x)]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}-f(x)\right]$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}\right]-\lim_{x\to+\infty}[f(x)]$$
$$=+\infty$$

لدينا: $g'(x)\geq 0$

ولدينا:

$$(e^x-1)^2=0\Rightarrow e^x-1=0$$
$$\Rightarrow e^x=1$$
$$\Rightarrow x=0$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$ ↗	0	↗ $+\infty$

ج/ استنتاج الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمماس (T) :

لدينا:

$$g(x) = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2} - f(x)$$
$$\Rightarrow f(x) - \left(\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}\right) = -g(x)$$

ومنه الوضعية من إشارة $-g(x)$:

لدينا من جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

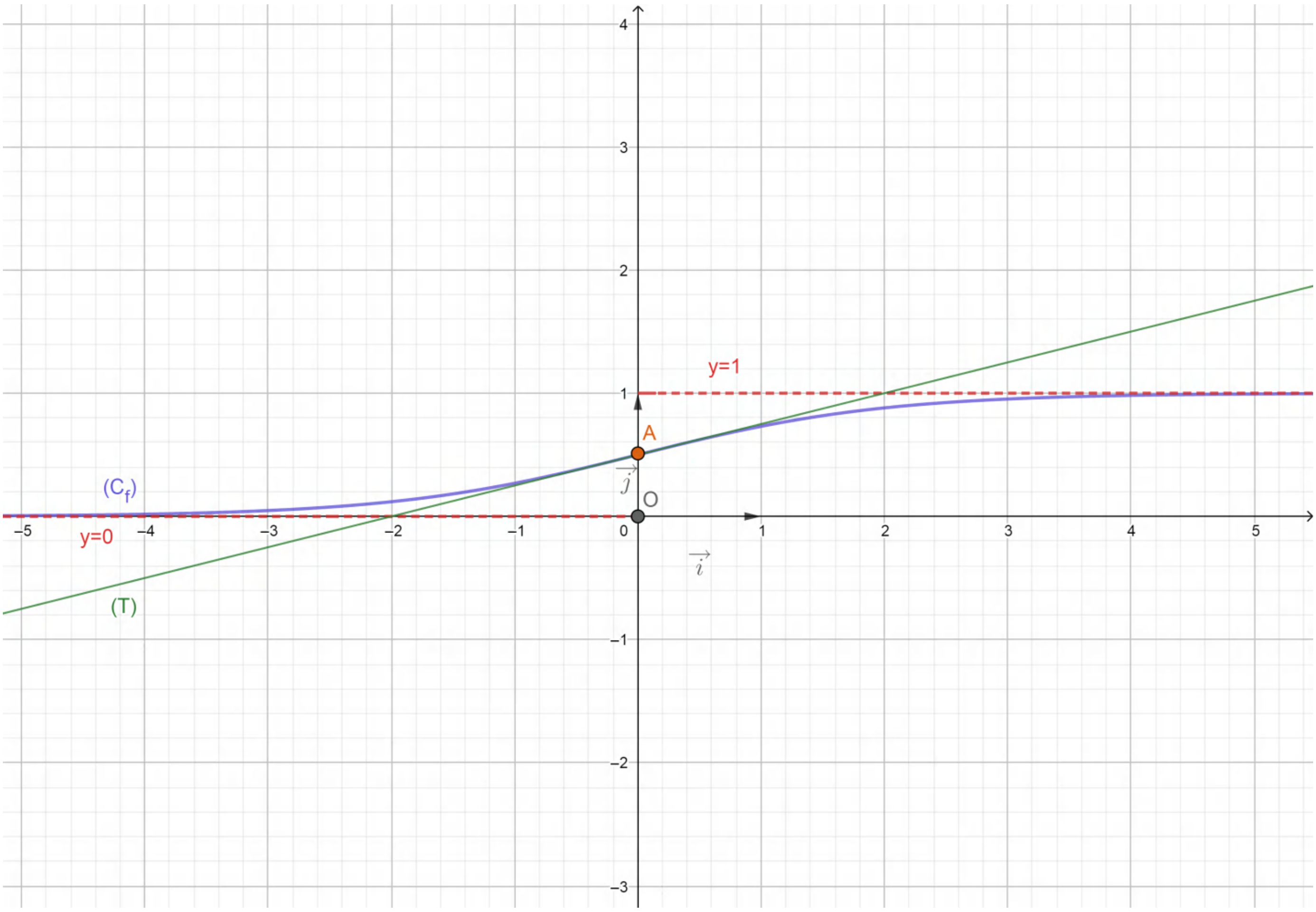
- الوضعية:

- (C_f) تحت (T) لما $x \in]-\infty; 0[$.
- (C_f) يقطع (T) في النقطة A .
- (C_f) فوق (T) لما $x \in]0; +\infty[$.

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة $y = 0$ و $y = 1$
- نعين نقطة A تقاطع (C_f) مع (T)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



y=1
A
(C_f)
y=0
O
(T)

5

الدوال اللوغارتمية

المسائل الشاملة

01 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) احسب $g(0)$ ، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)]$.

2) بيّن أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

4) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

5) بين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثييها.

6) مثل بيانيا المنحني (C_f) .

المسألة الشاملة رقم: 02

مشاهـــدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=1+x^2+\ln x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32<\alpha<0.33$.

3) استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=-x+\frac{2+\ln x}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=-\frac{g(x)}{x^2}$$

ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) بين أن: $f(\alpha)=2\left(\frac{1}{2\alpha}-\alpha\right)$ ، ثم عين حصرا للعدد $f(\alpha)$.

4) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)+x]$ ، ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

5) اثبت أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) في نقطة يُطلب تعيينها.

6) مثل بيانيا كل من المستقيم (Δ) ، المماس (T) والمنحني (C_f) . علما أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطتين x_0 و x_1 حيث: $0.1<x_0<0.2$ وَ $1.5<x_1<1.6$

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$h(x)=-x+1+\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال D_h :

$$h(x)=f(x+1)+2$$

ب/ بين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

2) أ/ بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه .

ب/ مثل بيانيا المنحني (C_h) .

3) m وسيط حقيقي غير معدوم، (T_m) مستقيم معادلته:

$$y = \ln(|m|)\,x + 1$$

أ/ برهن أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها.

ب/ ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$h(x) = \ln(|m|)\,x + 1 \ldots (E)$$

03 المسألة الشاملة رقم:

مشاهـــدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بـ:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\ln|x|}+x;x\in\mathbb{R}_{-}^{*}-\{-1\}\\ \dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{2(\ln x)^{2}};x\in\mathbb{R}_{+}^{*}-\{1\}\\ 0;x=0\end{cases}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0=0$ ، فسر النتيجة هندسيا.

2) ادرس تغيرات الدالة f .

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$ يطلب تعيين معادلته .

ب/ ادرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_{-}^{*}-\{-1\}$.

4) حل المعادلة: $f(x)=0$ في المجال $\mathbb{R}_{+}^{*}-\{1\}$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C_f) ؟

5) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $\left]-2;-\frac{3}{4}\right[$.

6) مثل بيانيا (Δ) و المنحني (C_f) .

7) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$f(x)=-(m^{2}-e)\ldots(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد واشارة حلول المعادلة (E) .

04 المسألة الشاملة رقم:

مشاهــــدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=(\ln x)^3+1$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) حل المعادلة $g(x)=0$.

3) استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;1[\cup]1;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=(\ln x)^2+1-\frac{2}{\ln x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون:

$$f'(x)=2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتج إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(III) نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=(\ln x)^2+1$

ونسمي (C_h) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) ادرس تغيرات الدالة h .

2) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-h(x)]$ ثم فسر النتيجة هندسيا.

3) ادرس الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) .

4) بين أن (C_h) يقبل نقطة انعطاف A يُطلب احداثييها .

5) اكتب معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A .

6) احسب $f(e)$ ، ماذا تستنتج بالنسبة للمنحنى (C_f) ؟

7) مثل بيانيا في نفس المعلم كلا من (C_f) ، (C_h) و (T) .

8) نعتبر المعادلة ذات المجهول x والوسيط الحقيقي m التالية:

$$e^m(\ln x)^3+e^m(\ln x)-\ln x-2e^m=0\ ...(E)$$

- ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E)

المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة الحل

(I) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}-\{-1;1\}$ بجدول تغيراتها التالي:

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$	‖	1		$\sqrt{3}$		$\dots$
$f'(x)$		$\dots$	0	$-$		‖		$\dots$	0	$+$	
$f(x)$			$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$		$-\infty$	‖			$\dots$		$+\infty$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) علما أن الدالة f فردية:

أ/ عيّن إشارة $f'(x)$ مع التبرير ، ثم استنتج اتجاه تغير الدالة f .

ب/ بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to1}}[f(x)]=+\infty$ و $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$

ج/ أكمل جدول تغيرات الدالة f السابق.

2) نقبل أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $\pm\infty$.

أ/ مثّل بيانيا كل من المستقيم (D) والمنحني (C_f) . نأخذ: $f(\sqrt{3})\cong 3$ و $(\sqrt{3})\cong 1.7$

3) نفرض أن عبارة الدالة f هي من الشكل:

$$f(x)=ax+b+\ln\left(c+\frac{2}{x-1}\right)$$

حيث: c,b,a أعداد حقيقية.

- باستعمال نتائج الجدول أعلاه، بيّن أنّ: $a=1$ ، $b=0$ و $c=1$.

4) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد واشارة حلول المعادلة (E) ذات المجهول x التالية:

$$x-\frac{e^m+e^x}{e^m-e^x}=0\ \dots(E)$$

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $]1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\ln(f(x))$$

- ادرس تغيرات الدالة g .

المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة الحل

(I) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{(lnx)^2}{x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ مبينا المستقيبات المقاربة لـ (C_f) .

ب/ ادرس اتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها .

2) m عدد حقيقي موجب تماما.

لتكن النقط A_m ذوات الفاصلة m ، والمستقيم (T_m) مماس (C_f) في النقط A_m .

أ/ اكتب بدلالة m معادلة المماس (T_m) .

ب/ عين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$.

ج/ اكتب معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها.

3) مثّل بيانيا المستقيمات (T_m) والمنحني (C_f) .

(II) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{(ln|x|)^2}{x}$$

1) بيّن أن الدالة g فردية.

2) بيّن أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) ، ثم ارسمه.

المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهـــدة الحل

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x + \frac{1}{2} - \ln x + \frac{1}{2}(\ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) أ/ بين أن لكل x من المجال $]0;1]$ $(x-1)+\ln x \leq 0$ وأن لكل x من المجال $[1;+\infty[$:

$(x-1)+\ln x \geq 0$.

ب/ بين أنه من أجل كل من المجال $]0;+\infty[$:

$$f'(x) = \frac{x-1+\ln x}{x}$$

ج/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + \frac{1}{2}$ والمنحني (C_f) .

4) عين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) موازيا للمستقيم (D) ، ثم اكتب معادلة المستقيم (T) .

5) أ/ بين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$:

$$f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$$

ب/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها.

6) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f) .

7) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة :

$$f(x) = x - 2m$$

المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة الحل

(I) لتكن الدالة g المعرفة على $]-1;+\infty[$ كما يلي:

$$g(x)=\frac{x}{x+1}-2\ln(x+1)$$

1) احسب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ احسب $g(0)$.

ب/ بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72<\alpha<-0.71$

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1;+\infty[$.

(II) لتكن الدالة f المعرفة على المجال: $D_f=]-1;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي:

$$f(x)=\frac{\ln(x+1)}{x^2}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها. ثم فسر النتائج هندسيا.

2) أ/ بين أنه من أجل كل x من D_f:

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن:

$$f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

ثم أعط حصر للعدد $f(\alpha)$ بالتدوير إلى 10^{-2} .

4) مثل بيانيا (C_f) .

5) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد واشارة حلول المعادلة (E) حيث: $m>0$.

$$f(x)=\ln m \ldots (E)$$

المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة الحل

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x)=\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

1) أ/ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

ب/بين أن:

$$f(x)=x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$.

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

3) أ/ بين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته.

ب/ ادرس الوضع النسبي بين المستقيم (D) و المنحني (C_f) .

4) بين أن ω نقطة تقاطع مقاربي المنحنى (C_f) تنتمي إلى (C_f) .

5) اكتب معادلة للمماس (T) عند المبدأ.

6) مثل بيانيا كلا من (D) ، (T) و (C_f)

7) m وسيط حقيقي حيث: $m>0$.

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E) حيث:

$$x-\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right)=0\ ...(E)$$

المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهـــدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$g(x) = \ln x + x - 3$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $2.2 < \alpha < 2.21$.

3) عين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0;+\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ:

$$f(x) = \left(1 - \frac{1}{x}\right)(\ln x - 2)$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1) احسب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}[f(x)]$.

2) أ/ احسب $f'(x)$ ، ثم ادرس اشارتها.

ب/ شكل جدول تغيرات الدالة f .

3) عين دون حساب النهاية التالية:

$$\lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x) - f(\alpha)}{x - \alpha}\right]$$

ثم فسر النتيجة هندسيا.

4) بين أن:

$$f(\alpha) = -\frac{(\alpha - 1)^2}{\alpha}$$

5) حل في المجال $]0;+\infty[$ المعادلة $f(x) = 0$ ، ثم فسر النتيجة هندسيا.

6) بأخذ: $f(\alpha) \cong -0.66$ ، مثل بيانيا المنحنى (C_f) على المجال $]0;10]$.

المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة الحل

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$g(x) = x^2 - 2 + \ln x$$

1) ادرس تغيرات الدالة g .

2) أ/ بين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0; +\infty[$.

ب/ تحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$

3) استنتج إشارة $g(x)$.

(II) نعتبر الدالة f المعرّفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي:

$$f(x) = x^2 + (2 - \ln x)^2$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1) احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها.

2) بين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3) شكل جدول تغيرات الدالة f .

4) بين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$

5) استنتج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$.

(III) نسمي (C_h) التمثيل البياني للدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$h(x) = \ln x$$

ولتكن النقطة A ذات الاحداثيات $(0; 2)$. و M نقطة من المنحني (C_h) فاصلتها x_m .

1) بين أن المسافة AM تُعطى بـ:

$$AM = \sqrt{f(x)}$$

2) نعتبر الدالة k المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ:

$$k(x) = \sqrt{f(x)}$$

أ/ برهن أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$.

ب/ برهن أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) ، يُطلب تعيين احداثييها.

ج/ برهن أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$

3) هل المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B ؟ برر اجابتك.

5

الدوال اللوغارتمية

حُلول المسائل الشاملة

حل المسألة الشاملة رقم: 01

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = -\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} [g(x)] = \lim_{x \to +\infty} [x^2 + 2x + \ln(x+1)] = +\infty$$

- حساب $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + 2 + \frac{1}{x+1} = \frac{(2x+2)(x+1)+1}{x+1} = \frac{2x^2+2x+2x+2+1}{x+1} = \frac{2x^2+4x+3}{x+1}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على مجال تعريفها.

- جدول التغيرات:

x	-1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$-\infty$ ↗	$+\infty$

2) حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$:

من جدول التغيرات نجد:

x	-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to -1}} [f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to -1}} \left[\underbrace{x}_{-1} - \frac{\overbrace{\ln(x+1)}^{-\infty}}{\underbrace{x+1}_{0^+}}\right]$$
$$= +\infty$$

التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=-1$.

$$\bullet \lim_{x\to +\infty} [f(x)] = \lim_{x\to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left[x - \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]$$
$$= +\infty - 0$$
$$= +\infty$$

2) تبيين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ مقارب مائل لـ (C_f) في جوار $+\infty$:

$$\lim_{x\to +\infty} [f(x)-y] = \lim_{x\to +\infty} \left[x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} - x\right]$$
$$= \lim_{x\to +\infty} \left[- \frac{\frac{\ln(x+1)}{x}}{1+\frac{1}{x}}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (Δ) مقارب مقائل بجوار $+\infty$.

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

دراسة إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y = -\frac{\ln(x+1)}{x+1}$$

لدينا:

$$-\ln(x+1)=0 \Rightarrow e^{\ln(x+1)} = e^0$$
$$\Rightarrow x+1=1$$
$$\Rightarrow x=0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- **الوضعية:**

▪ المنحني (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]-1;0[$.

- المنحني (C_f) يقطع (Δ) في $O(0;0)$.
- المنحني (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]0;+\infty[$.

4) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]-1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$:

$$f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{x+1}(x+1) - \ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{x^2+1+2x-1-\ln(x+1)}{(x+1)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

- جدول تغيرات الدالة f :

لدينا إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$:

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) تبيين أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف:

$$f''(x) = \frac{\left(2x+2+\frac{1}{x+1}\right)(x+1)^2 - 2(x+1)(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^4}$$
$$= \frac{\left(2(x+1)+\frac{1}{x+1}\right)(x+1) - 2(x^2+2x+\ln(x+1))}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{2(x+1)^2+1-2x^2+4x+2\ln(x+1)}{(x+1)^3}$$
$$= \frac{3-2\,ln(x+1)}{(x+1)^3}$$

لدينا: $(x+1)^3 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة البسط

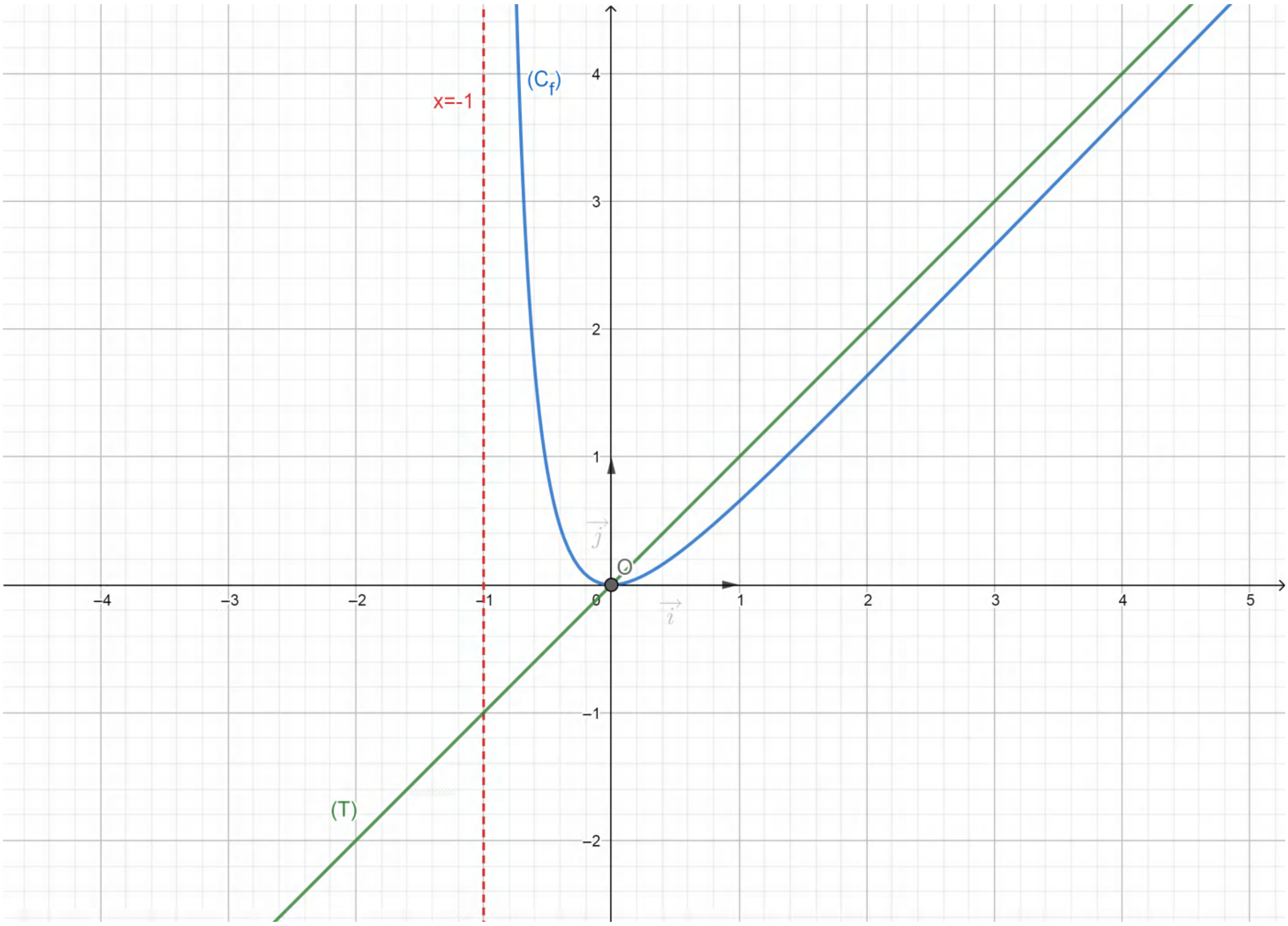
$$3-2\,ln(x+1) = 0 \Rightarrow 2ln(x+1) = 3$$
$$\Rightarrow \ln(x+1) = \frac{3}{2}$$
$$\Rightarrow x+1 = e^{\frac{3}{2}}$$
$$\Rightarrow x = e^{\frac{3}{2}} - 1$$

لدينا الدالة f'' تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف فاصلتها $e^{\frac{3}{2}} - 1$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x = -1$
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



02 حل المسألة الشاملة رقم:

مشاهــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{x\to 0}[g(x)] = \lim_{x\to 0}[1+x^2+\ln x]$$
$$= 0 - \infty$$
$$= -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}[1+x^2+\ln x]$$
$$= +\infty + \infty$$
$$= +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x}$$
$$= \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $g'(x) > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا: الدالة g مستمرة ومتزايدة على مجال تعريفها

ولدينا: $g(0.33) = 0.0002$ و $g(0.32) = -0.03$

ولدينا: $g(0.33) \times g(0.32) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $0.32 < \alpha < 0.33$.

3) استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}\left[-x + \frac{\overbrace{2+\ln x}^{-\infty}}{\underbrace{x}_{0^+}}\right] = -\infty$$

- **التفسير الهندسي:**

(C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = 0$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[f(x)] = \lim_{x \to +\infty}\left[-x + \frac{2+\ln x}{x}\right] = \lim_{x \to +\infty}\left[-x + \frac{\frac{2}{x}+\frac{\ln x}{x}}{1}\right] = -\infty$$

لان: $\lim_{x \to +\infty}\left[\frac{\ln x}{x}\right] = 0$

2) تبيين أنه من أجل كل x من D_f: $f'(x) = -\frac{g(x)}{x^2}$:

$$f'(x) = -1 + \frac{\frac{1}{x}x - (2+\ln x)}{x^2} = \frac{-x^2 - 1 - \ln x}{x^2} = -\frac{x^2+1+\ln x}{x^2} = -\frac{g(x)}{x^2}$$

لدينا $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

- **جدول التغيرات:**

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$+\infty$

3) تبيين أن: $f(\alpha) = 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 + 1 + \ln \alpha = 0$$
$$\Rightarrow \ln \alpha = -(\alpha^2 + 1)$$

ولدينا:

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= -\alpha + \frac{2 + \ln \alpha}{\alpha} \\ &= \frac{-\alpha^2 + 2 - (\alpha^2 + 1)}{\alpha} \\ &= \frac{-2\alpha^2 + 1}{\alpha} \\ &= 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) \end{aligned}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$
$$-0.33 < -\alpha < -0.32 \dots (1)$$

ولدينا:

$$0.32 < \alpha < 0.33$$
$$0.64 < 2\alpha < 0.66$$
$$\frac{1}{0.66} < \frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{0.64}$$
$$1.51 < \frac{1}{2\alpha} < 1.66 \dots (2)$$

بجمع (1) و (2) طرفا لطرف نجد:

$$1.18 < \frac{1}{2\alpha} - \alpha < 1.34$$
$$2.18 < 2\left(\frac{1}{2\alpha} - \alpha\right) < 2.34$$

إذن:

$$2.18 < f(\alpha) < 2.34$$

4) أ/ حساب $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) + x]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} [f(x) + x] &= \lim_{x \to +\infty} \left[-x + \frac{2 + \ln x}{x} + x\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2 + \ln x}{x}\right] \\ &= \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{2}{x} + \frac{\ln x}{x}\right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته $y = -x$

ب/ دراسة الوضع النسبي بين المنحني (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=\frac{2+\ln x}{x}$$

لدينا $x>0$ ومنه الإشارة من البسط:

$$2+\ln x=0 \Rightarrow \ln x=-2$$
$$\Rightarrow x=e^{-2}$$

ومنه:

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$f(x)-x$	$-$	0	$+$

- الوضعية:

- (C_f) تحت (Δ) لما $x\in]0;e^{-2}[$.
- (C_f) يقطع (Δ) في النقطة ذات الفاصلة e^{-2} .
- (C_f) فوق (Δ) لما $x\in]e^{-2};+\infty[$.

5) اثبات أن المنحني (C_f) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) :

(T) يوازي (Δ) معناه: $f'(a)=-1$ ومنه:

$$f'(a)=-1 \Rightarrow -\frac{a^2+1+\ln a}{a^2}=-1$$
$$\Rightarrow a^2+1+\ln a=a^2$$
$$\Rightarrow 1+\ln a=0$$
$$\Rightarrow \ln a=-1$$
$$\Rightarrow a=e^{-1}$$

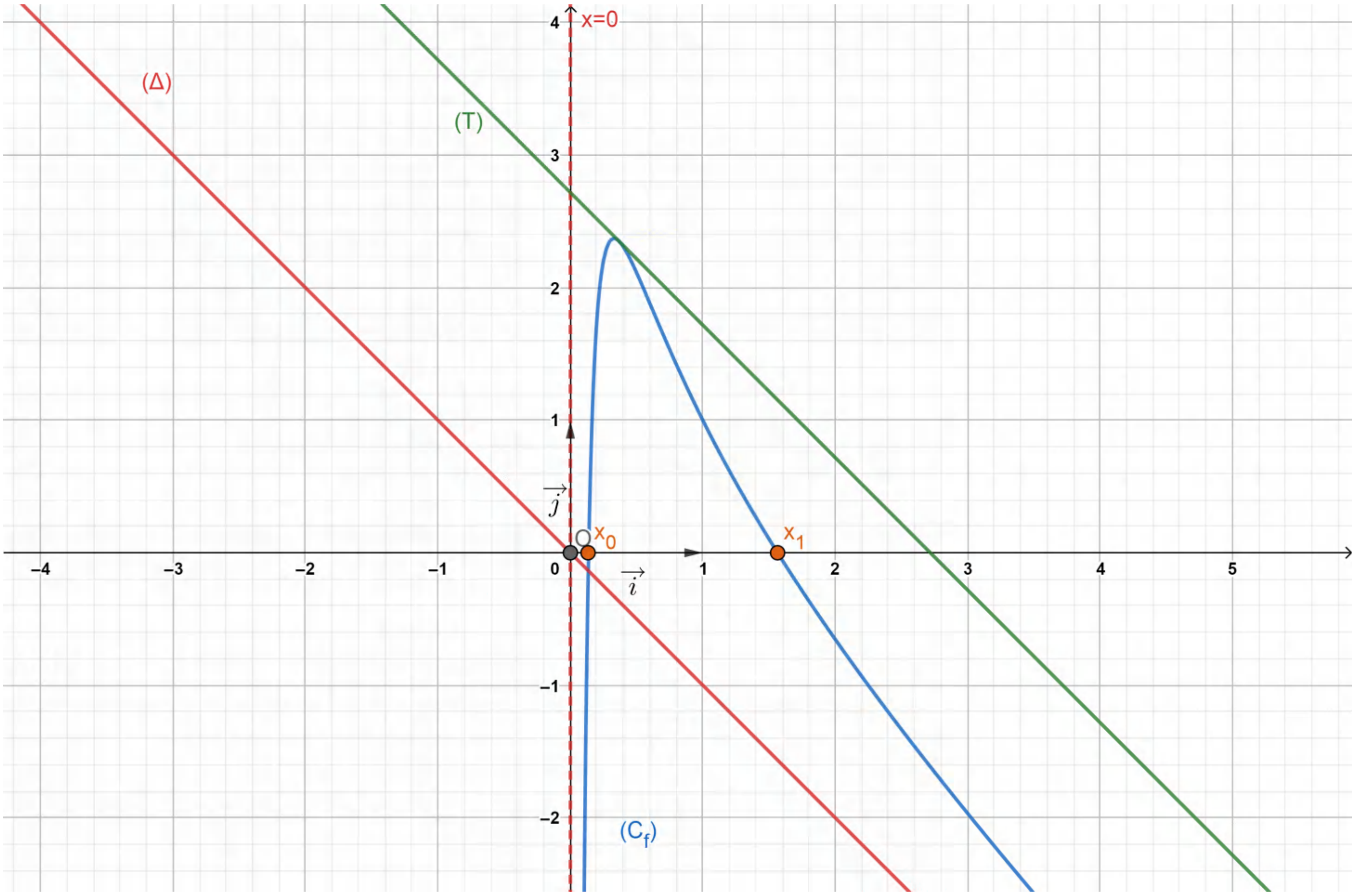
ومنه:

$$(T): y=f'(a)(x-a)+f(a)$$
$$=-x+e^{-1}-e^{-1}+\frac{2+\ln e^{-1}}{e^{-1}}$$
$$=-x+e$$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي : $x=0$
- نعين x_0 و x_1 نقط تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل: (Δ)
- نرسم المماس (T)
- ثم باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



(III)

1) أ/ تبيين أنّه من أجل كل x من المجال D_h : $h(x) = f(x+1) + 2$:

$$f(x+1)+2 = -(x+1) + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2$$
$$= -x - 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} + 2$$
$$= -x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1}$$
$$= h(x)$$

ب/ تبيين أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$:

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty} [h(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty} \left[-x + 1 + \frac{2+\ln(x+1)}{x+1} - (-x+1)\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2+\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{2}{x+1} + \frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]$$
$$= 0$$

ومنه المستقيم (D) ذو المعادلة $y = -x + 1$ مقارب مائل لـ (C_h) في جوار $+\infty$

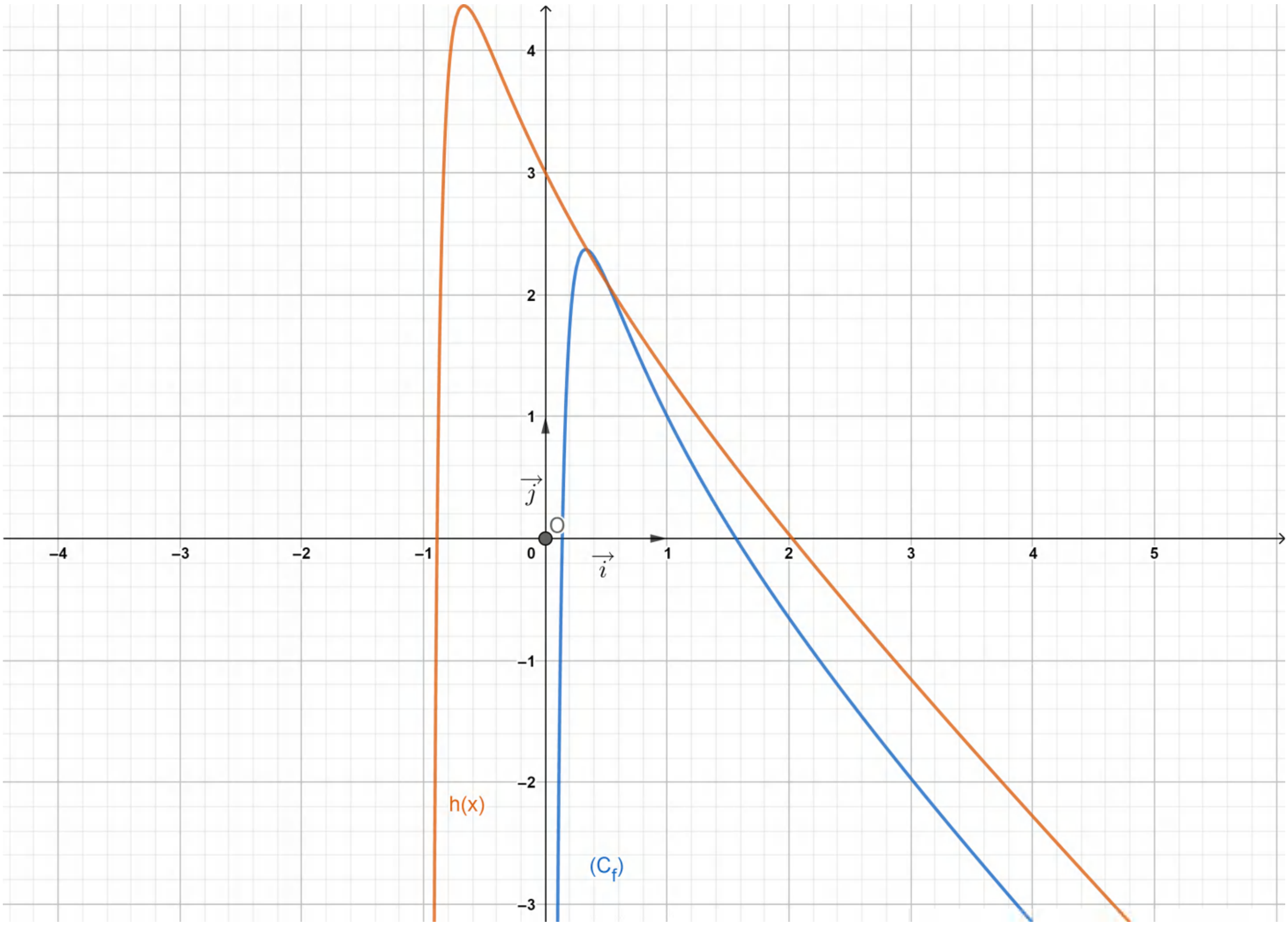
2) أ/ تبيين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C_f) بتحويل بسيط يُطلب تعيينه :

$$h(x) = f(x+1) + 2$$
$$= f\big(x - (-1)\big) + 2$$

ومنه (C_h) هو صورة (C_f) بانسحاب شعاعه: $\vec{u}(-1;2)$

ب/ التمثيل البياني لـ (C_h) :

تمثيل (C_f) و (C_h) :



3) أ/ برهان أن جميع المستقيمات (T_m) تشمل نقطة ثابتة يُطلب تعيينها:

نفرض أن النقطة $A(x_1;y_1)$ تنتمي إلى المستقيم (T_m) ونبرهن أنها ثابتة:

لدينا: A تنتمي إلى (T_m) معناه:

$$y_1 = \ln(|m|)\,x_1 + 1$$
$$\Rightarrow \ln(|m|)\,x_1 - y_1 + 1 = 0 \ldots (3)$$

المعادلة (3) عبارة عن كثير حدود متغيره $\ln(|m|)$ وينعدم اذا انعدمت جميع معاملاته

أي:

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ -y_1 + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 1 \end{cases}$$

اذن: المستقيمات (T_m) تشمل النقطة $A(0;1)$

ب/ المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_h) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m = \ln(|m|)\,x + 1$$

ومنه:

لما $\ln|m| = -1$ أي $|m| = e^{-1}$ أي $m = e^{-1}$ وَ $m = -e^{-1}$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $\ln|m| < -1$ أي $|m| < e^{-1}$ أي $-e^{-1} < m < e^\wedge - 1$ المعادلة تقبل حلا وحيدا

لما $\ln|m| > -1$ أي $|m| > e^{-1}$ أي $m \in]-\infty; -e^{-1}[\cup]e^{-1}; +\infty$ المعادلة تقبل حلان

حل المسألة الشاملة رقم: 03

مشاهـــدة المسألة

1) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في $x_0 = 0$:

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\frac{1}{\ln|x|} + x - 0}{x - 0}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{1}{x \ln|x|} + \frac{x}{x}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{1}{x \ln(-x)} + 1\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{-1}{-x \ln(-x)} + 1\right]$$

$$= -\infty$$

لأن: $\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} [-x \ln(-x)] = 0^+$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليسار

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2} - 0}{x - 0}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x \ln x} - \frac{1}{2x(\ln x)^2}\right]$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{1}{x \ln x}\left(1 - \frac{1}{2 \ln x}\right)\right]$$

$$= +\infty$$

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ من اليمين

- <u>التفسير الهندسي:</u>

الدالة f لا تقبل الاشتقاق عند $x_0 = 0$ ومنه (C_f) يقبل مماس عمودي معادلته $x = 0$

2) دراسة تغيرات الدالة f :

- حساب النهايات:

- $\lim_{x \to -\infty} [f(x)] = \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{\ln|x|} + x\right]$

$$= \lim_{x \to -\infty} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$$

$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$$
$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{1}{0^+} + x\right]$$
$$= +\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{1}{\ln(-x)} + x\right]$$
$$= \lim_{\substack{x \to -1 \\ <}} \left[\frac{1}{0^-} + x\right]$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ <}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= \frac{1}{0^-} - \frac{1}{2(0^-)^2}$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= \lim_{\substack{x \to 1 \\ >}} \left[\frac{1}{\ln x}\left(1 - \frac{1}{2\ln x}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{0^+}\left(1 - \frac{1}{2(0^+)}\right)$$
$$= -\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{2(\ln x)^2}\right]$$
$$= 0 - 0$$
$$= 0$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = -1$ بجوار $\pm\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي $x = 1$ بجوار $-\infty$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي $y = 0$ بجوار $+\infty$.

- <u>حساب $f'(x)$:</u>

لمّا $x \in \mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

$$f'(x) = \frac{-\left(-\frac{1}{x}\right)}{(\ln(-x))^2} + 1$$
$$= \frac{-1}{x(\ln(-x))^2} + 1$$

لاحظ أنّ $x < 0$ ومنه: $f'(x) > 0$

اذن:

x	$-\infty$	-1	0
$f'(x)$	$+$	‖	$+$ ‖

لمّا $x \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$f'(x) = -\left(\frac{\frac{1}{x}}{(\ln x)^2}\right) - \left(-\frac{4\left(\frac{1}{x}\right)\ln x}{4(\ln x)^4}\right)$$
$$= -\frac{1}{x(\ln x)^2} + \frac{1}{x(\ln x)^4}$$
$$= \frac{-\ln x + 1}{x(\ln x)^3}$$
$$= \frac{-\ln x + 1}{[x(\ln x)^2]\ln x}$$

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة المشتقة من إشارة $\frac{-\ln x+1}{\ln x}$:

لدينا:

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ولدينا:

$$-\ln x + 1 = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

ومنه:

x	0		1		e		$+\infty$
$-\ln x + 1$		$+$		$+$	0	$-$	
$\ln x$		$-$	‖	$+$		$+$	
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	0	$-$	

ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$		-1		0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$+$		$-$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↘	0

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) بجوار $-\infty$:

تذكير

إذا استطعنا كتابة عبارة دالة f على الشكل:

$$f(x) = y + \varphi(x)$$

حيث:

$$\lim_{x\to\pm\infty} [\varphi(x)] = 0$$

فإن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل معادلته y

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= x + \frac{1}{\ln(-x)} \\ &= y + \varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \dfrac{1}{\ln(-x)} \\ y = x \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} [\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ب/ دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) على المجال $\mathbb{R}_-^* - \{-1\}$:

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$:

$$\begin{aligned} f(x) - y &= x + \frac{1}{\ln(-x)} - x \\ &= \frac{1}{\ln(-x)} \end{aligned}$$

لدينا:

$$\begin{aligned} \ln(-x) = 0 &\Rightarrow -x = e^0 \\ &\Rightarrow -x = 0 \\ &\Rightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$ -1 0
$f(x) - y$	$+$ ‖ $-$ ‖

- الوضعية:

- (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$.
- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-1; 0[$.

4) حل المعادلة: $f(x) = 0$ في المجال $\mathbb{R}_+^* - \{1\}$:

$$\frac{1}{\ln x}-\frac{1}{2(\ln x)^2}=0 \Rightarrow \frac{2\ln x-1}{2(\ln x)^2}=0$$

لدينا: $2(\ln x)^2>0$ ومنه:

$$2\ln x-1=0 \Rightarrow 2\ln x=1$$
$$\Rightarrow \ln x=\frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow x=e^{\frac{1}{2}}$$
$$\Rightarrow x=\sqrt{e}$$

- **الاستنتاج:**

(C_f) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{e}$

5) تبيين أن (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77;-1.76[$:

المنحنى (C_f) يقطع محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α في المجال $]-1.77;-1.76[$ معناه المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا في نفس المجال

لدينا الدالة f مستمرة ومتزايدة على المجال $]-1.77;-1.76[$

لدينا: $f(-1.77)=-0.01$ وَ $f(-1.76)=0.008$

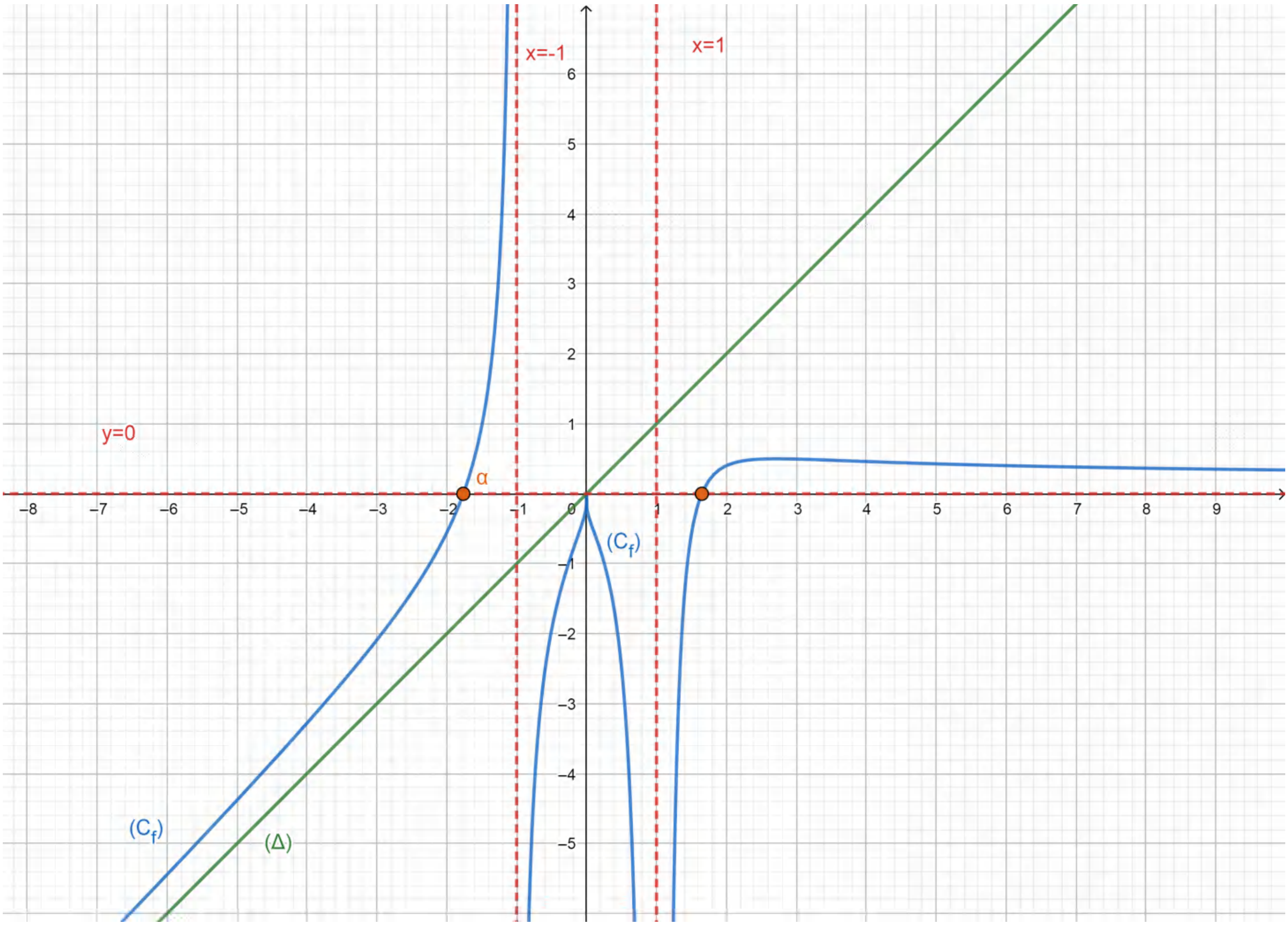
لدينا: $f(-1.77)\times f(-1.76)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبلا حلا وحيدا في المجال $]-1.77;-1.76[$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=-1$ و $x=1$ و $y=0$
- نعين نقطتي تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل
- نرسم المستقيم المقارب المائل (Δ)
- ثُمّ باستعمال جدول التغيرات نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = -(m^2 - e)$

- لما $-(m^2 - e) < 0$ أي $m^2 - e > 0$ أي $m^2 > e$ أي $|m| > \sqrt{e}$

أي $m \in]-\infty; -\sqrt{e}[\cup]\sqrt{e}; +\infty[$ المعادلة تقبل حلين موجبين وحلين سالبين.

- لما $-(m^2 - e) = 0$ أي $m^2 - e = 0$ أي $m^2 = e$ أي $|m| = \sqrt{e}$

أي $m = \sqrt{e}$ و $m = -\sqrt{e}$ المعادلة تقبل حل موجب وحل معدوم وحل سالب .

- لما $0 < -(m^2 - e) < \frac{1}{2}$ أي $-\frac{1}{2} < m^2 - e < 0$ أي $e - \frac{1}{2} < m^2 < e$

أي $\sqrt{e - \frac{1}{2}} < |m| < \sqrt{e}$ أي $|m| < \sqrt{e}$ و $|m| > \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $-\sqrt{e} < m < \sqrt{e}$

و $m \in \left]-\infty; -\sqrt{e - \frac{1}{2}}\right[\cup \left]\sqrt{e - \frac{1}{2}}; +\infty\right[$ أي

$$m \in \left]-\sqrt{e - \frac{1}{2}}; -\sqrt{e}\right[\cup \left]\sqrt{e}; \sqrt{e + \frac{1}{2}}\right[$$

المعادلة تقبل حلين موجبين وحل سالب.

- لما $\frac{1}{2} = -(m^2 - e)$ أي $m^2 - e = -\frac{1}{2}$ أي $m^2 = e - \frac{1}{2}$ أي $|m| = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

أي $m = \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ و $m = -\sqrt{e - \frac{1}{2}}$ المعادلة تقبل حل مضاعف وحل سالب

- لما $\frac{1}{2} < -(m^2 - e)$ أي $m^2 - e < -\frac{1}{2}$ أي $m^2 < e - \frac{1}{2}$ أي $|m| < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$

أي $-\sqrt{e - \frac{1}{2}} < m < \sqrt{e - \frac{1}{2}}$ أي $m \in \left]-\sqrt{e - \frac{1}{2}} ; \sqrt{e - \frac{1}{2}}\right[$

المعادلة تقبل حل وحيد سالب

حل المسألة الشاملة رقم: 04

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[g(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}}[(\ln x)^3 + 1] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty}[g(x)] = \lim_{x \to +\infty}[(\ln x)^3 + 1] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 3\frac{1}{x}(\ln x)^2$$

لدينا: $g'(x) > 0$ و $g'(1) = 0$

ومنه

- جدول التغيرات:

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$+$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2) حل المعادلة $g(x) = 0$:

لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) = 0 &\Rightarrow (\ln x)^3 + 1 \\ &\Rightarrow (\ln x)^3 = -1 \\ &\Rightarrow \ln x = -1 \\ &\Rightarrow x = e^{-1} \end{aligned}$$

اذن حلول المعادلة $g(x) = 0$: $s = \{e^{-1}\}$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	e^{-1}	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{< \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = -\frac{2}{0^-} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = -\frac{2}{0^+} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[f(x)] = \lim_{x\to +\infty}\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = +\infty$$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 1$

2) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;1[\cup]1;+\infty[$ يكون: $f'(x) = 2\frac{g(x)}{x(\ln x)^2}$:

$$f'(x) = 2\frac{1}{x}\ln x - \left(\frac{-\frac{2}{x}}{(\ln x)^2}\right) = \frac{2\ln x}{x} + \frac{2}{x(\ln x)^2} = 2\left[\frac{(\ln x)^3 + 1}{x(\ln x)^2}\right] = \frac{2g(x)}{x(\ln x)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$:

لدينا: $x(\ln x)^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من اشارة $g(x)$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		e^{-1}		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	4	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

(III)

1) دراسة تغيرات الدالة h :

- النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [h(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \to +\infty} [h(x)] = \lim_{x \to +\infty} [(\ln x)^2 + 1] = +\infty$$

- دراسة $h'(x)$:

$$h'(x) = \frac{2}{x} \ln x$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه :

$$\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

- جدول تغيرات الدالة h:

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

2) حساب $\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)]$:

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - h(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x} - (\ln x)^2 - 1\right]$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \left[-\frac{2}{\ln x}\right]$$
$$= 0$$

- التفسير الهندسي:

(C_h) و (C_f) متقاربان بجوار $+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين (C_f) و (C_h) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - h(x)$:

$$f(x) - h(x) = \frac{2}{-\ln x}$$

لدينا:

$$-\ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$

ومنه:

x	0		1		$+\infty$
$f(x) - h(x)$		$+$		$-$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (C_h) لما $x \in]0;1[$.
- (C_f) تحت (C_h) لما $x \in]1;+\infty[$

4) تبيين أن (C_h) يقبل A نقطة انعطاف:

لدينا:

$$h''(x) = \frac{-2}{x^2}\ln x + \frac{1}{x} \times \frac{2}{x}$$
$$= \frac{-2\ln x + 2}{x^2}$$
$$= \frac{2}{x^2}(1 - \ln x)$$

لدينا $\frac{2}{x^2} > 0$ ومنه الإشارة من $(1 - \ln x)$:

$$1 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 1$$
$$\Rightarrow x = e$$

x	0		e		$+\infty$
$h''(x)$		$+$	0	$-$	

لدينا $h''(x)$ انعدمت وغيرت اشارتها ومنه المنحني (C_h) يقبل نقطة انعطاف احداثييها $A(e;2)$

5) كتابة معادلة المماس (T) لـ (C_h) في النقطة A :

$$(T): y = h'(e)(x-e) + h(e)$$
$$= \frac{2}{e}\ln e\,(x-e) + (\ln e)^2 + 1$$
$$= \frac{2}{e}x$$

6) حساب $f(e)$:

$$f(e) = (\ln e)^2 + 1 - \frac{2}{\ln e} = 0$$

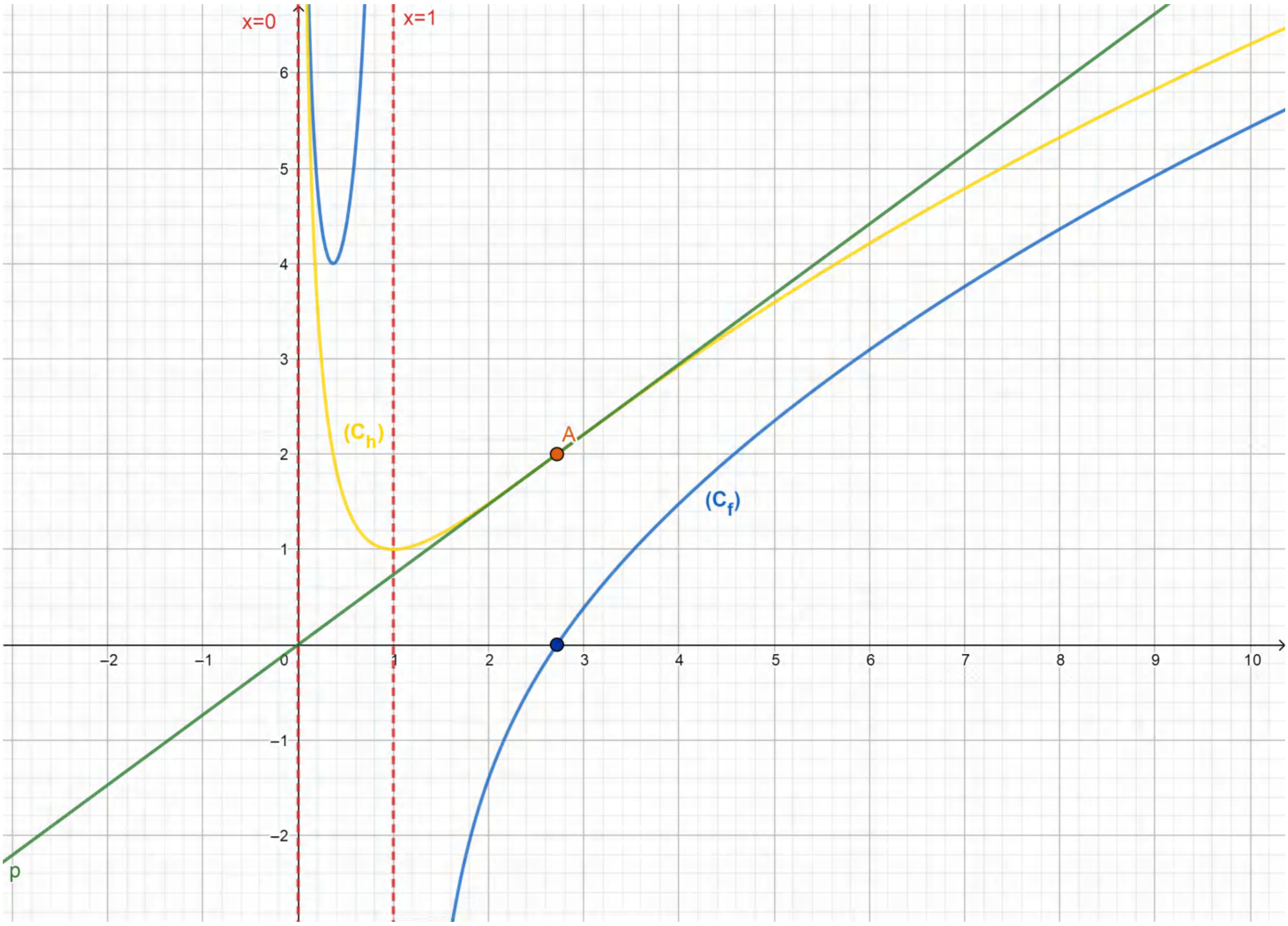
- الاستنتاج:

(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطة ذات الفاصلة e .

7) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 1$ و $x = 0$
- نرسم المماس (T)
- نعين نقطة A انعطاف المنحني (C_h)
- باستعمال جدول تغيرات الدالة h نرسم (C_h)
- نعين نقطة تقاطع المنحني (C_f) مع محور الفواصل
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



8) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$e^m(\ln x)^3 + e^m \ln x - \ln x - 2e^m = 0$$
$$\Rightarrow e^m[(\ln x)^3 + \ln x - 2] = \ln x$$
$$\Rightarrow e^m\left[(\ln x)^2 + 1 - \frac{2}{\ln x}\right] = 1$$
$$\Rightarrow e^m[f(x)] = 1$$
$$\Rightarrow f(x) = e^{-m}$$

ومنه حلول المعادلة (E) هل فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = e^{-m}$

اذن:

لما $e^{-m} < 4$ أي $-m < \ln 4$ أي $m > -\ln 4$ المعادلة تقبل حل وحيد

لما $e^{-m} = 4$ أي $-m = \ln 4$ أي $m = -\ln 4$ المعادلة تقبل حلين احدهما مضاعف

لما $e^{-m} > 4$ أي $-m > \ln 4$ أي $m < -\ln 4$ المعادلة تقبل ثلاث حلول

حل المسألة الشاملة رقم: 05

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ تعيين إشارة $f'(x)$ مع التبرير:

نضع γ, β, α حيث:

x	$-\infty$	α	β	1	$\sqrt{3}$	γ
$f'(x)$	...	0	$-$		...	0	$+$

لدينا الدالة f فردية ، معناه:

$$\begin{cases} (-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x) \end{cases}$$

ومنه:

$$-f'(-x) = -f'(x) \Rightarrow f'(-x) = f'(x)$$

لدينا من جدول التغيرات (المُعطى):

$f'(x) < 0$ لما $x \in]\alpha; \beta[$

$\Leftarrow$ $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} < 0$ لما $-x \in]\alpha; \beta[$

$\Leftarrow$ $f'(x) < 0$ لما $x \in]-\beta; -\alpha[$

ولدينا كذلك:

$f'(x) > 0$ لما $x \in]\sqrt{3}; \gamma[$

$\Leftarrow$ $\underbrace{f'(-x)}_{=f'(x)} > 0$ لما $-x \in]\sqrt{3}; \gamma[$

$\Leftarrow$ $f'(x) > 0$ لما $x \in]-\gamma; -\sqrt{3}[$

ولدينا: $f'(x) = 0$ لما $x = \sqrt{3}$ معناه $f'(-x) = 0$ لما $-x = \sqrt{3}$ ومنه $x = -\sqrt{3}$

ومنه: $\alpha = -\sqrt{3}$ و $\beta = -1$ و $\gamma = +\infty$

اذن:

$f'(x) > 0$ لما: $x \in]-\infty; -\sqrt{3}[\cup]\sqrt{3}; +\infty[$

$f'(x) < 0$ لما: $x \in]-\sqrt{3}; -1[\cup]1; \sqrt{3}[$

ب/ تبيين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x)] = -\infty$:

لدينا من الجدول السابق: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$

نضع $x=-t$ (الدالة f فردية أي: $f(-t)=-f(t)$)

ومنه:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty}[f(x)] &= \lim_{-t\to-\infty}[f(-t)]\\ &= \lim_{t\to+\infty}[f(-t)]\\ &= \lim_{t\to+\infty}[-f(t)]\\ &= -\underbrace{\lim_{t\to+\infty}[f(t)]}_{\lim_{x\to+\infty}[f(x)]=+\infty}\\ &= -(+\infty)\\ &= -\infty\end{aligned}$$

- تبيين أن: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)]=+\infty$:

بنفس الفكرة السابقة (نضع $x=-t$) نجد: $\lim_{\substack{x\to1\\>}}[f(x)]=+\infty$

- تبيين أن: $f(\sqrt{3})=\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$:

لدينا:

$$\begin{aligned}\underbrace{f(-\sqrt{3})}_{f(-\sqrt{3})=-f(\sqrt{3})} &= -\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\\ \Rightarrow -f(\sqrt{3}) &= -\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})\\ \Rightarrow f(\sqrt{3}) &= \sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})\end{aligned}$$

ج/ اكمال جدول تغيرات الدالة f السابق:

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		-1		1		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$				$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$-\sqrt{3}-\ln(2+\sqrt{3})$	$\searrow$	$-\infty$		$+\infty$	$\searrow$	$\sqrt{3}+\ln(2+\sqrt{3})$	$\nearrow$	$+\infty$

2) التمثيل البياني:

قبل أن نشرع في التمثيل البياني، نستخرج من جدول التغيرات المستقيمات المقاربة

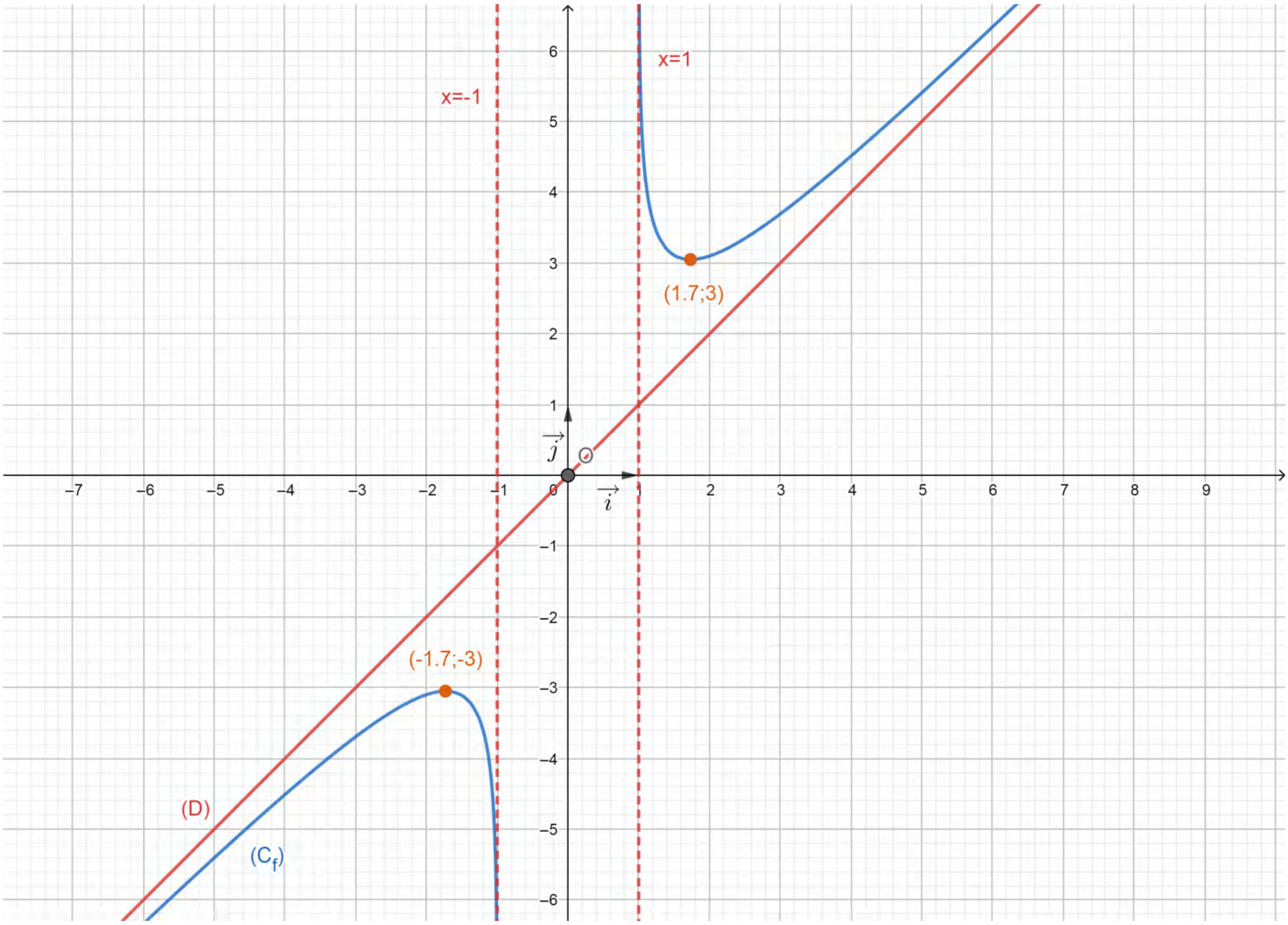
لدينا:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x=-1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته $x=1$.

<u>خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:</u>

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=1$ و $x=-1$

- نرسم القارب المائل (D)
- نعين النِقط الحدية
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



3) تبيين أنّ: $a = 1$ ، $b = 0$ و $c = 1$:

لدينا:

$$f'(x) = a + \frac{-\frac{2}{(x-1)^2}}{c + \frac{2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\frac{2}{(x-1)^2}}{\frac{c(x-1)+2}{x-1}}$$

$$= a - \frac{\frac{2}{x-1}}{c(x-1)+2}$$

$$= a - \frac{2}{c(x-1)^2 + 2(x-1)}$$

ولدينا:

$$\begin{cases} f'(\sqrt{3}) = 0 \\ f'(-\sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)} = 0 \\ a - \dfrac{2}{c\left(-\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(-\sqrt{3}-1\right)} = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a - \dfrac{2}{c\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)} = 0 \ldots (*) \\ a - \dfrac{2}{c\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)} = 0 \ldots (**) \end{cases}$$

بطرح $(*)$ من $(**)$ نجد:

$$-\frac{2}{c\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)} + \frac{2}{c\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right)} = 0$$

$$\Rightarrow c\left(\sqrt{3}+1\right)^2 - 2\left(\sqrt{3}+1\right) = c\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)$$

$$\Rightarrow c\left(4+2\sqrt{3}\right) - 2\sqrt{3} - 2 = c\left(4-2\sqrt{3}\right) + 2\sqrt{3} - 2$$

$$\Rightarrow c\left(4+2\sqrt{3}\right) - c\left(4-2\sqrt{3}\right) - 4\sqrt{3} = 0$$

$$\Rightarrow c\left(4\sqrt{3}\right) = 4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \boxed{c = 1}$$

نعوض قيمة c في $(*)$ نجد:

$$a - \frac{2}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)} = 0 \Rightarrow a = \frac{2}{\left(\sqrt{3}-1\right)^2 + 2\left(\sqrt{3}-1\right)}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{4 - 2\sqrt{3} + 2\sqrt{3} - 2}$$

$$\Rightarrow a = \frac{2}{4-2}$$

$$\Rightarrow \boxed{a = 1}$$

ولدينا:

$$f(\sqrt{3}) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3}) \Rightarrow \sqrt{3} + b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \sqrt{3} + \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b + \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right) = \ln(2+\sqrt{3})$$

$$\Rightarrow b = \ln(2+\sqrt{3}) - \ln\left(1 + \frac{2}{\sqrt{3}-1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{1+\frac{2}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{(2+\sqrt{3})(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{2\sqrt{3}-2+3-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln\left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}\right)$$

$$\Rightarrow b = \ln(1)$$

$$\Rightarrow \boxed{b = 0}$$

4) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$x - \frac{e^m + e^x}{e^m - e^x} = 0 \Rightarrow \frac{xe^m - xe^x - e^m - e^x}{e^m - e^x} = 0$$

$$\Rightarrow xe^m - xe^x - e^m - e^x = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) - e^x(x+1) = 0$$

$$\Rightarrow e^m(x-1) = e^x(x+1)$$

$$\Rightarrow e^m = e^x\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = \ln\left[e^x \times \left(\frac{x+1}{x-1}\right)\right]$$

$$\Rightarrow m = \ln(e^x) + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\Rightarrow m = x + \ln\left(\frac{x+1+1-1}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow m = x + \ln\left(1 + \frac{2}{x-1}\right)$$
$$\Rightarrow f(x) = m$$

ومنه حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = m$

ومنه:

لما $m < f(-\sqrt{3})$ أي $m \in]-\infty; f(-\sqrt{3})[$ للمعادلة حلان سالبان

لما $m = f(-\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = -\sqrt{3}$

لما $f(-\sqrt{3}) < m < f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(-\sqrt{3}); f(\sqrt{3})[$ المعادلة لا تقبل حلول

لما $m = f(\sqrt{3})$ للمعادلة حل مضاعف هو $x = \sqrt{3}$

لما $m > f(\sqrt{3})$ أي $m \in]f(\sqrt{3}); +\infty[$ للمعادلة حلان موجبان

(II) دراسة تغيرات الدالة g:

لدينا: $g(x) = \ln(f(x))$

نلاحظ أن : $g(x) = k \circ f = k(f(x))$ حيث: $k(x) = \ln x$

- حساب النهايات:

لدينا: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

اذن:

- $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} [g(x)] = +\infty$

ولدينا: $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x)] = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} [k(x)] = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to 1} [g(x)] = +\infty$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

لدينا: $f(x) > 0$ لما $x \in]1; +\infty[$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة $f'(x)$

- جدول تغيرات الدالة g :

x	1	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$ ↘	$g(\sqrt{3})$	↗ $+\infty$

حل المسألة الشاملة رقم: 06

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}[f(x)] = \lim_{\substack{> \\ x\to 0}}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right] = +\infty$$

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right]$$

نضع $t = \ln x$ نجد:

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{(\ln x)^2}{x}\right] = \lim_{t\to+\infty}\left[\frac{t^2}{e^t}\right] = 0$$

لأن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{t^n}{e^t}\right] = 0$

- التفسير الهندسي:

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $x = 0$
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $+\infty$ معادلته: $y = 0$

ب/ دراسة اتجاه تغير الدالة f :

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{\left(2\frac{1}{x}\ln x\right)(x) - (\ln x)^2}{x^2}$$
$$= \frac{2\ln x - (\ln x)^2}{x^2}$$
$$= \frac{(2-\ln x)\ln x}{x^2}$$

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط:

$$1)\ \ln x = 0 \Rightarrow x = 1$$
$$2)\ 2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$
$$\Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2-\ln x$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$4e^{-2}$	$\searrow$	0

2) أ/ كتابة معادلة المماس (T_m) :

$$\begin{aligned}(T_m): y &= f'(m)(x-m)+f(m)\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(x-m)+\frac{(\ln m)^2}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x-\frac{(2-\ln m)\ln m}{m}+\frac{(\ln m)^2}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2(\ln m)^2-2\ln m}{m}\\ &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)x+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}\end{aligned}$$

ب/ تعيين قيم m التي من أجلها (T_m) يشمل المبدأ $O(0;0)$:

(T_m) يشمل المبدأ معناه:

$$\begin{aligned}0 &= \left(\frac{(2-\ln m)\ln m}{m^2}\right)(0)+\frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}\\ &\Rightarrow \frac{2\ln m\,(\ln m-1)}{m}=0\\ &\Rightarrow 2\ln m\,(\ln m-1)=0\\ &\Rightarrow \begin{cases}2\ln m=0\\ \ln m-1=0\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}\ln m=0\\ \ln m=1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases}m=1\\ m=e\end{cases}\end{aligned}$$

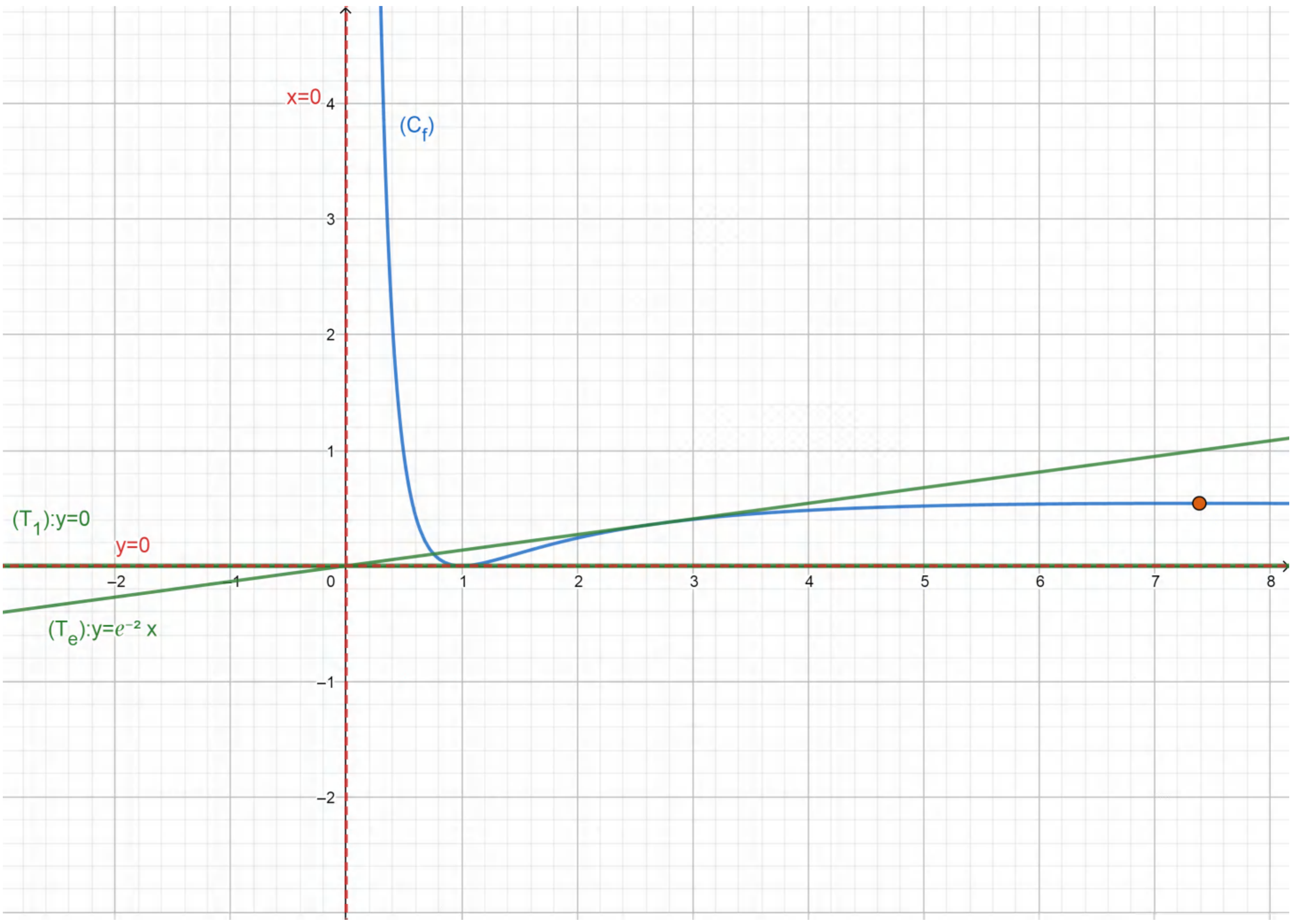
ج/ كتابة معادلة كل مماس من أجل قيم m المحصل عليها:

$$\begin{aligned}(T_1): y &= 0x+0\\ &= 0\\ (T_e): y &= \left(\frac{(2-1)\times 1}{e^2}\right)x+\frac{2(1-1)}{e}\\ &= \frac{1}{e^2}x\\ &= e^{-2}x\end{aligned}$$

3) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x=0$ و $y=0$
- نعين النقطة الحدية ذات الاحداثيات $(e^2;4e^{-2})$
- نرسم المماسين: (T_1) و (T_e)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



(II)

1) تبيين أن الدالة g فردية:

تذكير

دراسة شفعية دالة (زوجية / فردية):

لتبيين أنّ الدالة f فردية نبين أنّ $\begin{cases}(-x) \in D_f \\ f(-x) = -f(x)\end{cases}$

لتبيين أنّ الدالة f زوجية نبين أنّ $\begin{cases}(-x) \in D_f \\ f(-x) = f(x)\end{cases}$

لدينا $(-x) \in \mathbb{R}^*$

ولدينا:

$$\begin{aligned} g(-x) &= \frac{(ln|-x|)^2}{-x} \\ &= -\frac{(ln|x|)^2}{x} \\ &= -g(x) \end{aligned}$$

ومنه الدالة g فردية.

2) تبيين أنه يمكن رسم (C_g) منحني الدالة g انطلاقا من (C_f) :

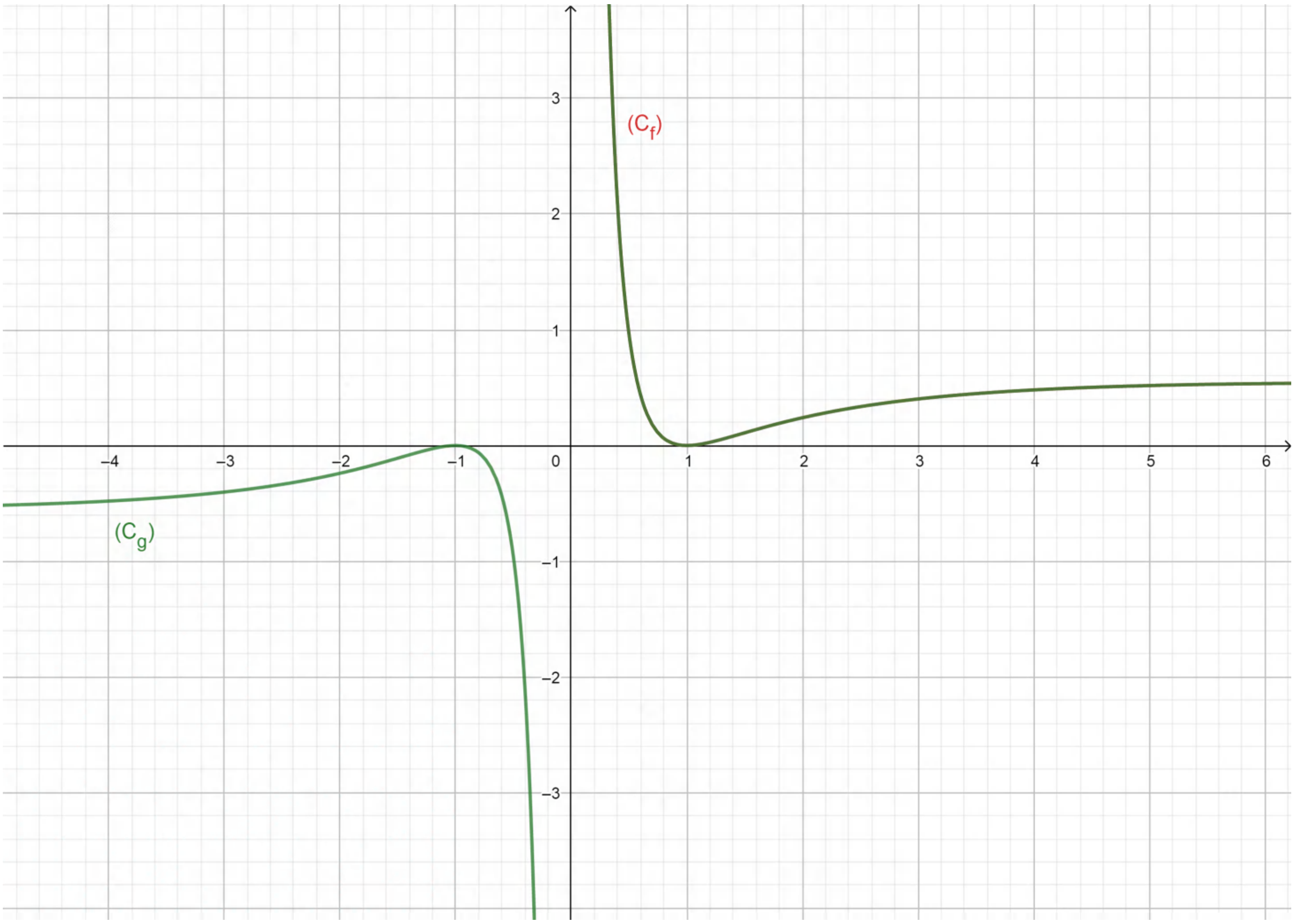
لدينا:

$$\begin{aligned} g(x) &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ \dfrac{(\ln(-x))^2}{x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \dfrac{(\ln x)^2}{x}, & x > 0 \\ -\dfrac{(\ln(-x))^2}{-x}, & x < 0 \end{cases} \\ &= \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

لما $x > 0$: (C_g) ينطبق على (C_f)

ولما $x < 0$: (C_g) يناظر (C_g) بالنسبة للمبدأ

- تمثيل (C_g)


(C_f)
(C_g)
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
4
5
6
3
2
1
−1
−2
−3

حل المسألة الشاملة رقم: 07

مشاهــدة المسألة

1) أ/ حساب $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$
$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[x+\frac{1}{2}+\underbrace{\ln x}_{-\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)}_{-\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

- التفسير الهندسي:

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $x=0$.

ب/ حساب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[x+\frac{1}{2}-\ln x+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x}_{+\infty}+\frac{1}{2}+\underbrace{\ln x}_{+\infty}\underbrace{\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)}_{+\infty}\right]$$
$$= +\infty$$

2) أ/ تبيين أن لكل x من المجال $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$ وأنّ لكل x من $[1;+\infty[$:

$(x-1)+\ln x\geq 0$:

نضع: الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=x-1+\ln x$

لدينا:

$$h'(x)=1+\frac{1}{x}=\frac{x+1}{x}$$

لدينا: $h'(x)>0$ ولدينا: $h(1)=0$ ومنه:

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
$h(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

من جدول تغيرات الدالة h نجد أن: لكل x من المجال $]0;1]$: $(x-1)+\ln x\leq 0$

وأنّ لكل x من المجال $[1;+\infty[$: $(x-1)+\ln x \geq 0$

ب/ تبيين أنّه من أجل كل من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{x-1+\ln x}{x}$:

$$f'(x)=1-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\frac{2}{x}\ln x$$
$$=\frac{x-1+\ln x}{x}$$

$x>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط أي من إشارة $h(x)$

ج/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}$	↗	$+\infty$

3) دراسة الوضع النسبي بين المستقيم (D) والمنحني (C_f) :

ندرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$f(x)-y=0 \Rightarrow \ln x\left(\frac{1}{2}\ln x-1\right)=0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} \ln x=0 \\ \frac{1}{2}\ln x-1=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ \ln x=2 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ x=e^2 \end{cases}$$

ومنه:

x	0		1		e^2		$+\infty$
$\ln x$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{1}{2}\ln x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	0	$+$	

- الوضعية:

- (C_f) فوق (D) لما: $]0;1[\cup]e^2;+\infty[$
- (C_f) يقطع (D) في النقطتين: $A\left(1;\frac{3}{2}\right)$ وَ $B\left(e^2;e^2+\frac{1}{2}\right)$
- (C_f) تحت (D) لما: $]1;e^2[$.

4) تعيين احداثيي النقطة ω من (C_f) التي يكون فيه المماس (T) موازيا للمستقيم (D):

المماس (T) يوازي المستقيم (D) معناه:

$$f'(a) = 1 \Rightarrow \frac{a - 1 + \ln a}{a} = 1$$
$$\Rightarrow a - 1 + \ln a = a$$
$$\Rightarrow \ln a = 1$$
$$\Rightarrow a = e$$

ومنه:

$$(T): y = f'(e)(x - e) + f(e)$$
$$= x - e + e + \frac{1}{2} - 1 + \frac{1}{2}$$
$$= x$$

اذن المستقيم (T) مماس لـ (C_f) في النقطة $\omega(e; e)$

5) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$: $f''(x) = \frac{2-\ln x}{x^2}$:

$$f''(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{x}\right)x - (x - 1 + \ln x)}{x^2}$$
$$= \frac{x + 1 - x + 1 - \ln x}{x^2}$$
$$= \frac{2 - \ln x}{x^2}$$

ب/ استنتاج أن المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثييها:

لدينا: $x^2 > 0$ ومنه إشارة $f''(x)$ من إشارة $(2 - \ln x)$

$$2 - \ln x = 0 \Rightarrow \ln x = 2$$
$$\Rightarrow x = e^2$$

ومنه:

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

لدينا $f''(x)$ تنعدم وتغير اشارتها، ومنه المنحني (C_f) يقبل نقطة انعطاف $B\left(e^2; e^2 + \frac{1}{2}\right)$

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب: $x = 0$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعين A و B نقط تقاطع (D) مع (C_f)
- نرسم المماس: (T)
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات

7) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع المنحني $\left(C_f\right)$ مع المستقيمات ذات المعادلة: $y_m = x - 2m$:

ومنه:

لما	$-2m < 0$	أي	$m > 0$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$-2m = 0$	أي	$m = 0$	المعادلة تقبل حل مضاعف
لما	$0 < -2m < \frac{1}{2}$	أي	$-\frac{1}{4} < m < 0$	المعادلة تقبل حلان
لما	$-2m = \frac{1}{2}$	أي	$m = -\frac{1}{4}$	المعادلة تقبل حلان أحدهما مضاعف
لما	$-2m > \frac{1}{2}$	أي	$m < -\frac{1}{4}$	المعادلة تقبل حلان

حل المسألة الشاملة رقم: 08

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) حساب نهايات الدالة g عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} [g(x)] = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)\right] = -\infty$

لأن: $\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{x}{x+1}\right] = -\frac{1}{0^+} = -\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} [g(x)] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[\frac{x}{x+1} - 2\ln(x+1)\right] = -\infty$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} - 2\frac{1}{x+1} = \frac{1-2x-2}{(x+1)^2} = \frac{-(2x+1)}{(x+1)^2}$$

لدينا: $(x+1)^2 > 0$ ومنه إشارة $g'(x)$ من إشارة البسط

$$-(2x+1) = 0 \Rightarrow 2x = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$		$f\left(-\frac{1}{2}\right)$		$-\infty$

3) أ/ حساب $g(0)$:

$$g(0) = 0$$

ب/ تبيين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلين أحدهما α حيث: $-0.72 < \alpha < -0.71$:

لدينا $h(0) = 0$

اذن منحني الدالة g يقطع محور الفواصل في المبدا

ولدينا: $g(-0.71) = 0.02$ و $g(-0.72) = -0.02$

ولدينا $g(-0.72) \times g(-0.71) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-0.72; -0.71[$

ج/ استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]-1; +\infty[$:

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها وتفسير النتائج:

- $$\lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to -1 \\ >}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right]$$

نضع: $k(x) = \ln(x+1)$

لدينا:

$$\lim_{x \to 0} \left[\frac{k(x) - k(0)}{x - 0}\right] = \lim_{x \to 0} [\ln(x+1)] = k'(0) = 1$$

ومنه

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ <}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

- $$\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} [f(x)] = \lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to +\infty} [f(x)] = \lim_{x \to +\infty} \left[\frac{\ln(x+1)}{x^2}\right] = 0$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $-\infty$ معادلته $x = -1$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب عمودي بجوار $\pm\infty$ معادلته $x = 0$.
- (C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $+\infty$ معادلته $y = 0$.

2) أ/ تبيين أنه من أجل كل x من D_f $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+1}x^2 - 2x\ln(x+1)}{x^4}$$
$$= \frac{\frac{1}{x+1}x - 2\ln(x+1)}{x^3}$$
$$= \frac{g(x)}{x^3}$$

ب/ استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

x	-1		α		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
x^3		$-$		$-$	$\Vert$	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	0

3) تبيين أن: $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{\alpha+1} - 2\ln(\alpha+1)$$
$$\Rightarrow 2\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{\alpha+1}$$
$$\Rightarrow \ln(\alpha+1) = \frac{\alpha}{2(\alpha+1)}$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \frac{\ln(\alpha+1)}{\alpha^2}$$
$$= \frac{\frac{\alpha}{2(\alpha+1)}}{\alpha^2}$$
$$= \frac{\alpha}{2\alpha^2(\alpha+1)}$$
$$= \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$$

- حصر $f(\alpha)$:

لدينا:

$$-0.72 < \alpha < -0.71$$
$$0.28 < \alpha + 1 < 0.29 \ldots (*)$$

ولدينا:

$$-1.44 < 2\alpha < -1.42 \ldots (**)$$

بضرب $(*)$ في $(**)$ نجد:

$$-0.41 < 2\alpha(\alpha + 1) < -0.39$$
$$-2.56 < \frac{1}{2\alpha(\alpha + 1)} < -2.43$$

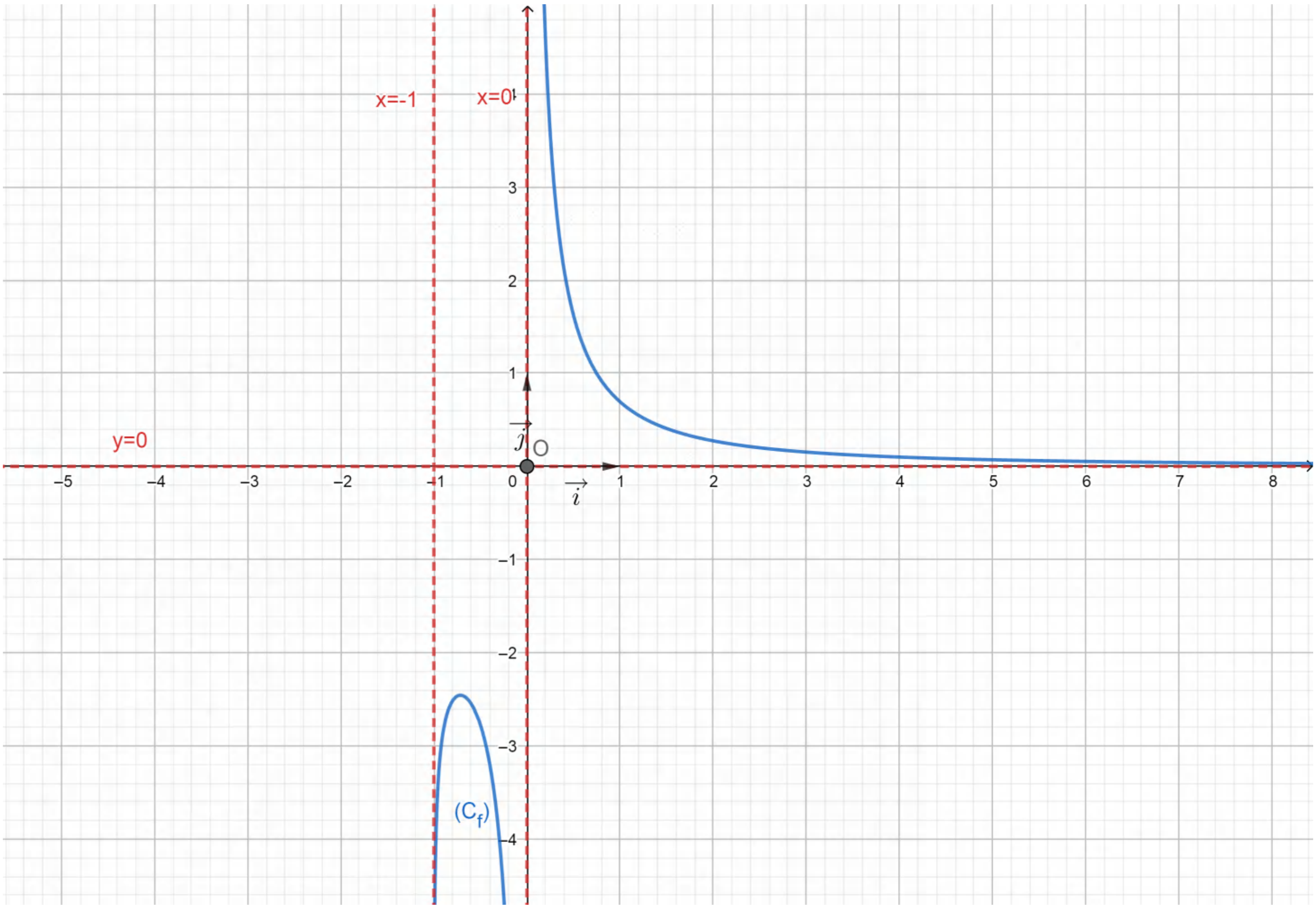
اذن:

$$-2.56 < f(\alpha) < -2.43$$

4) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيمات المقاربة: $x = 0$ و $x = -1$ و $y = 0$
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



5) المناقشة البيانية:

حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة $y_m = \ln m$

ومنه:

لما	$\ln m < f(\alpha)$	أي	$m < e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حلان سالبان
لما	$\ln m = f(\alpha)$	أي	$m = e^{f(\alpha)}$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$f(\alpha) < \ln m < 0$	أي	$e^{f(\alpha)} < m < 1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m > 0$	أي	$m > 1$	للمعادلة حل وحيد موجب

حل المسألة الشاملة رقم: 09

مشاهـــدة المسألة

1) أ/ حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)] = \lim_{x\to-\infty}\left[\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)\right]$$
$$= \ln\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\ln 2$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

(C_f) يقبل مستقيم مقارب أفقي بجوار $-\infty$ معادلته $y=-\ln 2$

ب/ تبيين أن: $f(x) = x + \ln 2 + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$:

$$f(x) = \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}\left(1+\frac{1}{2e^{2x}}\right)}{e^x\left(1+\frac{2}{e^x}\right)}\right)$$
$$= \ln\left(\frac{2e^{2x}}{e^x}\right) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2e^{2x}}}{1+\frac{2}{e^x}}\right)$$
$$= \ln(2e^x) + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$
$$= \ln 2 + x + \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)$$

ج/ استنتاج $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\ln 2 + \underbrace{x}_{+\infty} + \underbrace{\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)}_{0}\right]$$
$$= +\infty$$

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

- دراسة $f'(x)$:

$$f'(x)=\frac{\left(\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)^2}\right)}{\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right)}$$

$$=\frac{4e^{2x}(e^x+2)-e^x(2e^{2x}+1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

$$=\frac{4e^{3x}+8e^{2x}-2e^{3x}-e^x}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

$$=\frac{e^x(2e^{2x}+8e^x-1)}{(e^x+2)(2e^{2x}+1)}$$

لدينا:

$$\begin{cases} e^x>0 \\ e^x+2>0 \\ 2e^{2x}+1>0 \end{cases}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $(2e^{2x}+8e^x-1)$:

$$2e^{2x}+8e^x-1=0$$

نضع $e^x=t$ أي $x=\ln t$

فنجد:

$$2t^2+8t-1=0$$

لدينا:

$$\Delta=b^2-4ac=64-4(2)(-1)=72=\left(6\sqrt{2}\right)^2$$

لدينا: $\Delta>0$ ومنه:

$$\begin{cases} t_1=\dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \\ t_2=\dfrac{-8+6\sqrt{2}}{4}=-2-\dfrac{3}{2}\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} x_1=\ln t_1=\ln\left(-2+\dfrac{3}{2}\sqrt{2}\right) \\ x_2=\ln t_2\ (\text{غير ممكن}) \end{cases}$$

ولدينا أيضا $f(0)=0$ ومنه:

- جدول التغيرات:

x	$-\infty$ $\quad$ $\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ $\quad$ 0 $\quad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$ $\quad$ 0 $\quad$ $+$ $\quad$ $+$
$f(x)$	$-\ln 2$ ↘ $f\left(\ln\left(-2+\frac{3}{2}\sqrt{2}\right)\right)$ ↗ 0 ↗ $+\infty$

3) أ/ تبيين أن المنحني (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (D) بجوار $+\infty$ يطلب تعيين معادلته:

◄ شاهد هذا التذكير ►
(اثبات ان منحني يقبل مستقيم مقارب مائل)

لدينا:

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^x+2}\right) \\ &= x+\ln 2+\ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) \\ &= y+\varphi(x) \end{aligned}$$

حيث:

$$\begin{cases} \varphi(x) = \ln\left(\dfrac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right) \\ y = x+\ln 2 \end{cases}$$

ولدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[\varphi(x)] = 0$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x+\ln 2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

ب/ دراسة الوضع النسبي بين (D) و (C_f) :

- نـدرس إشارة الفرق $f(x)-y$:

$$\begin{aligned} f(x)-y=0 &\Rightarrow \ln\left(\frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}\right)=0 \\ &\Rightarrow \frac{1+\frac{1}{2}e^{-2x}}{1+2e^{-x}}=1 \\ &\Rightarrow 1+\frac{1}{2}e^{-2x}=1+2e^{-x} \\ &\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}=0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}-2\right)=0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}-2=0$$
$$\Rightarrow e^{-x}=4$$
$$\Rightarrow -x=\ln 4$$
$$\Rightarrow x=-\ln 4$$

لدينا:

$$x>-\ln 4$$
$$\Rightarrow -x<\ln 4$$
$$\Rightarrow e^{-x}<4$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}<2$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}-2<0$$
$$\Rightarrow e^{-x}\left(\frac{1}{2}e^{-x}-2\right)<0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-2x}-2e^{-x}<0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2}e^{-x}+1<2e^{-x}+1$$

لدينا: $2e^{-x}+1>0$ يمكن القسمة عليه

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1}<1$$
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{\frac{1}{2}e^{-x}+1}{2e^{-x}+1}\right)<0$$

ومنه لما $x>-\ln 4$: $f(x)-y<0$

بنفس الطريقة نجد: لما $x<-\ln 4$: $f(x)-y>0$

ومنه:

x	$-\infty$	$-\ln 4$	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$

- الوضعية:
  - (C_f) فوق (D) لما $x\in]-\infty;-\ln 4[$.
  - (C_f) يقطع (D) في النقطة ذات الاحداثيات: $(-\ln 4\,;-\ln 2)$
  - (C_f) تحت (D) لما $x\in]-\ln 4\,;+\infty[$.

4) تبيين أن نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) تنتمي إليه - أي إلى (C_f) -

الخليل للرياضيات

نحدد أولا نقطة تقاطع المستقيم المقارب المائل (D) ذو المعادلة $y = x + \ln 2$ مع المستقيم المقارب الأفقي ذو المعادلة $y = -\ln 2$.

لدينا:

$$\begin{cases} y = x + \ln 2 \\ y = -\ln 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -2\ln 2 = -\ln 4 \\ y = -\ln 2 \end{cases}$$

ومنه نقطة تقاطع المستقيمين المقاربين هي $\omega(-\ln 4\,; -\ln 2)$

ولدينا: $f(-\ln 4) = -\ln 2$ ومنه $\omega \in (C_f)$

5) كتابة معادلة للمماس (T) عند المبدأ:

لدينا:

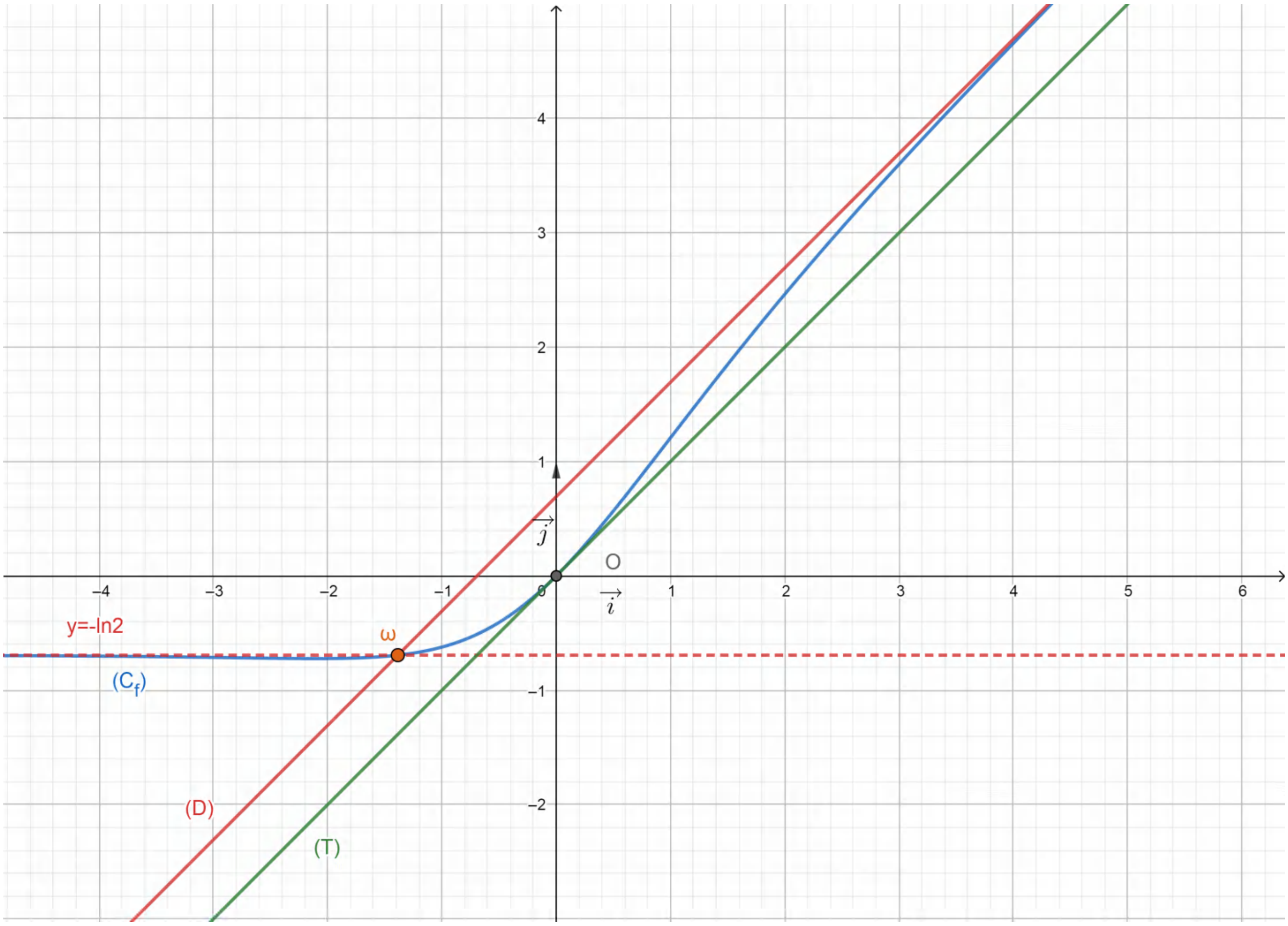
$$\begin{aligned}(T): y &= f'(0)(x-0) + f(0) \\ &= x\end{aligned}$$

ومنه المستقيم ذو المعادلة $y = x$ مماس للمنحني (C_f) عند المبدأ.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نرسم المستقيم المقارب العمودي: $y = -\ln 2$
- نرسم المستقيم المقارب المائل (D)
- نعيّن نقطة ω تقاطع المستقيمات المقاربة.
- نرسم المماس (T) .
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)



7) المناقشة البيانية:

لدينا:

$$
\begin{aligned}
& x-\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{me^{x}+2m}\right)=0\\
& \Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\,\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)\\
& \Rightarrow x=\ln\left(\frac{1}{m}\right)+\ln\left(\frac{2e^{2x}+1}{e^{x}+2}\right)\\
& \Rightarrow x=-\ln m+f(x)\\
& \Rightarrow f(x)=x+\ln m
\end{aligned}
$$

اذن حلول المعادلة (E) هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيمات ذات المعادلة

$$y_m=x+\ln m$$

ومنه:

لما	$\ln m<0$	أي	$m<1$	المعادلة لا تقبل حلول
لما	$\ln m=0$	أي	$m=1$	للمعادلة حل مضاعف
لما	$0<\ln m<\ln 2$	أي	$1<m<2$	للمعادلة حلان

لما $\ln m = \ln 2$ أي $m = 2$ للمعادلة حل مضاعف

لما $\ln m > \ln 2$ أي $m > 2$ للمعادلة حل وحيد

حل المسألة الشاملة رقم: 10

مشاهــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- حساب النهايات:

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}[g(x)] = \lim_{\substack{x\to 0\\ >}}\left[\underbrace{\ln x}_{-\infty} + \underbrace{x}_{0} - 3\right] = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x\to +\infty}[g(x)] = \lim_{x\to +\infty}\left[\underbrace{\ln x}_{+\infty} + \underbrace{x}_{+\infty} - 3\right] = +\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 1$$

لدينا: $g'(x) > 0$

ومنه:

- جدول تغيرات $g(x)$:

x	0 $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

2) تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α :

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ولدينا: $g(2.2) = -0.01$ و $g(2.11) = 0.002$

ولدينا: $g(2.2) \times g(2.11) < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة، المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $2.2 < \alpha < 2.21$

3) تعيين إشارة $g(x)$ على المجال : $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II)

1) حساب: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)]$ و $\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}}[f(x)]$:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\left(1-\underbrace{\frac{1}{x}}_{0}\right)\left(\underbrace{\ln x}_{+\infty}-2\right)\right]$$
$$= +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{>\\x\to0}}[f(x)] = \lim_{\substack{>\\x\to0}}\left[\left(1\underbrace{-\frac{1}{x}}_{-\infty}\right)\left(\underbrace{\ln x}_{-\infty}-2\right)\right]$$
$$= +\infty$$

2) أ/ حساب $f'(x)$ ، ودراسة اشارتها:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}\left(1-\frac{1}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2)+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2} \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x-2+x-1) \\ &= \frac{1}{x^2}(\ln x+x-3) \\ &= \frac{g(x)}{x^2} \end{aligned}$$

لدينا: $x^2>0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

3) تعيين دون حساب النهاية التالية $\lim\limits_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right]$:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to\alpha}\left[\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}\right] &= f'(\alpha) \\ &= \frac{g(\alpha)}{\alpha^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

- <u>التفسير الهندسي:</u>

(C_f) يقبل مماس موازٍ لحامل محور الفواصل عند النقطة ذات الفاصلة α .

4) تبيين أن: $f(\alpha)=-\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha}$:

لدينا:

$$g(\alpha)=0 \Rightarrow \ln\alpha+\alpha-3=0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha=3-\alpha$$

ولدينا:

$$\begin{aligned}f(\alpha)&=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(\ln\alpha-2)\\&=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(3-\alpha-2)\\&=\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)(1-\alpha)\\&=\frac{(\alpha-1)(1-\alpha)}{\alpha}\\&=\frac{-(\alpha-1)^2}{\alpha}\end{aligned}$$

5) حل المعادلة $f(x)=0$:

$$\begin{aligned}f(x)=0 &\Rightarrow \left(1-\frac{1}{x}\right)(\ln x-2)=0\\&\Rightarrow \begin{cases}1-\dfrac{1}{x}=0\\ \ln x-2=0\end{cases}\\&\Rightarrow \begin{cases}\dfrac{1}{x}=1\\ \ln x=2\end{cases}\\&\Rightarrow \begin{cases}x=1\\ x=e^2\end{cases}\end{aligned}$$

- التفسير الهندسي:

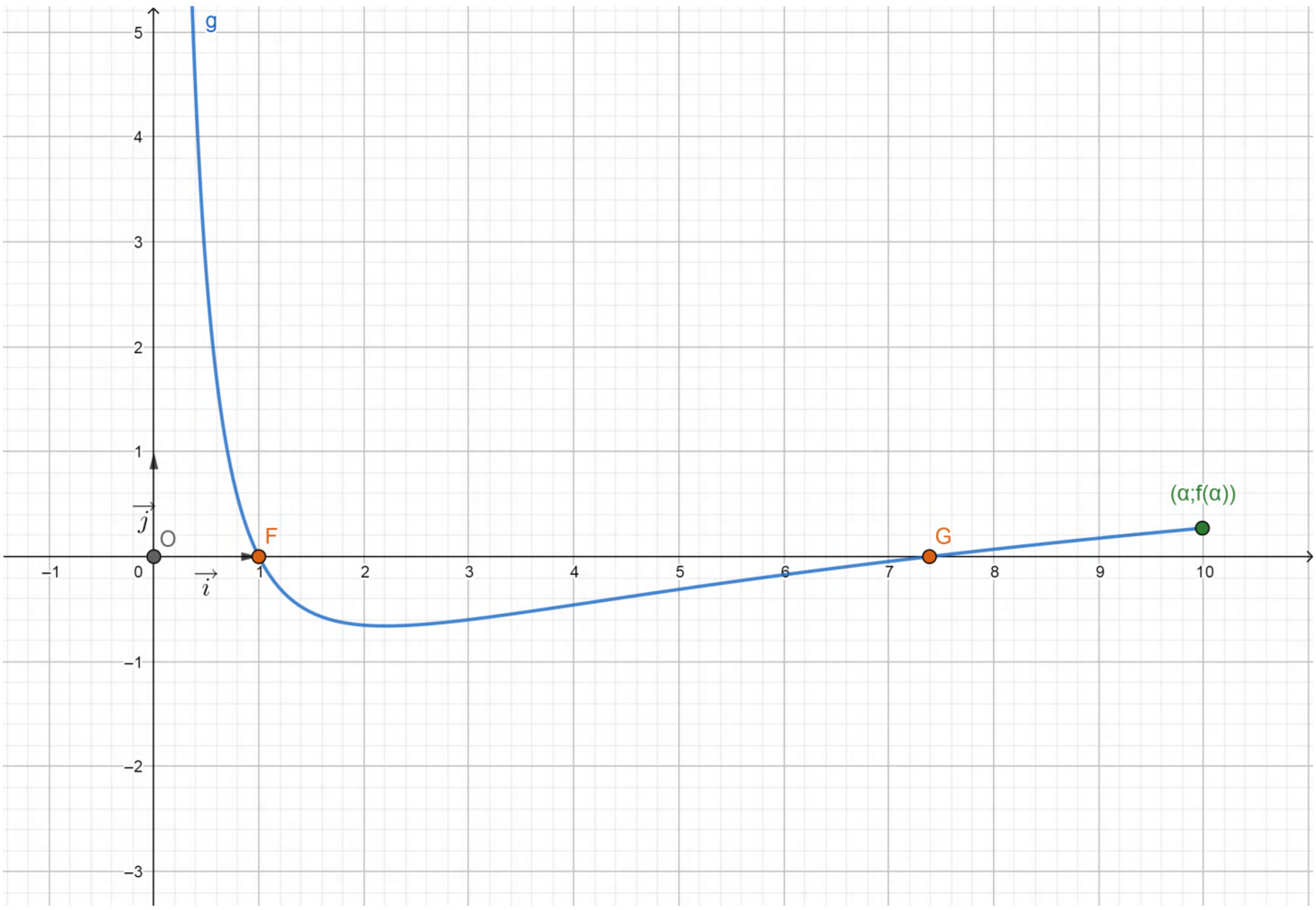
(C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين: $A(1;0)$ و $B(e^2;0)$.

6) التمثيل البياني:

خطوات التمثيل على معلم متعامد ومتجانس:

- نعيّن النقطة ذات الاحداثيات $(\alpha; f(\alpha))$
- نعين النقطتين A و B
- ثم باستعمال جدول تغيرات الدالة f نرسم (C_f)

الخليل للرياضيات


g
F
G
O
(α;f(α))

حل المسألة الشاملة رقم: 11

مشاهـــدة المسألة

(I)

1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات:

- $$\lim_{x\to+\infty}[g(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^2}_{+\infty} - 2 + \underbrace{\ln x}_{+\infty}\right] = +\infty$$

- $$\lim_{\substack{x\to0\\>}}[g(x)] = \lim_{\substack{x\to0\\>}}\left[\underbrace{x^2}_{0} - 2 + \underbrace{\ln x}_{-\infty}\right] = -\infty$$

- دراسة $g'(x)$:

لدينا: الدالة g معرفة وقابلة للاشتقاق على مجال تعريفها ومنه:

$$g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2+1}{x}$$

لدينا $x > 0$ و $2x^2 + 1 > 0$ ومنه:

- جدول تغيرات الدالة g :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	$+$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

2) أ/ تبيين ان المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$:

لدينا الدالة g مستمرة ومتزايدة على المجال $]0;+\infty[$

ولدينا: $\lim_{\substack{x\to0\\>}}[g(x)] \times \lim_{x\to+\infty}[g(x)] < 0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]0;+\infty[$

ب/ التحقق من أن $1.31 < \alpha < 1.32$:

لدينا: $g(1.31) = -0.13$ و $g(1.32) = 0.02$

ولدينا: $g(1.31) \times g(1.32) < 0$ ، اذن $1.31 < \alpha < 1.32$

3) استنتاج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

(II)

1) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

$$\bullet \lim_{x\to+\infty}[f(x)] = \lim_{x\to+\infty}\left[\underbrace{x^2}_{+\infty} + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{+\infty}\right)^2\right] = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}[f(x)] = \lim_{\substack{x\to 0 \\ >}}\left[\underbrace{x^2}_{0} + \left(2 - \underbrace{\ln x}_{-\infty}\right)^2\right] = +\infty$$

2) تبيين أن إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$:

لدينا: الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على المجال $]0; +\infty[$

$$f'(x) = 2x + 2\left(-\frac{1}{x}\right)(2 - \ln x)$$
$$= 2x - \frac{2(2 - \ln x)}{x}$$
$$= \frac{2(x^2 - 2 + \ln x)}{x}$$
$$= \frac{2}{x}g(x)$$

لدينا $\frac{2}{x} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $g(x)$.

3) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

4) تبيين أن: $f(\alpha) = \alpha^2(1 + \alpha^2)$:

لدينا:

$$g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^2 - 2 + \ln\alpha = 0$$
$$\Rightarrow \ln\alpha = 2 - \alpha^2$$

ولدينا:

$$f(\alpha) = \alpha^2 + (2 - \ln\alpha)^2$$
$$= \alpha^2 + (2 - 2 - \alpha^2)^2$$

$$= \alpha^2 + \alpha^4$$
$$= \alpha^2(1 + \alpha^2)$$

وهو المطلوب.

5) استنتاج إشارة $f(x)$ على المجال: $]0; +\infty[$:

لدينا $f(\alpha) > 0$ ومنه نجد:

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f(x)$	$+$

(III)

1) تبيين أن المسافة AM تعطى بـ $AM = \sqrt{f(x)}$:

لدينا M نقطة من المنحنى (C_h) فاصلتها x_m أي تكتب على الشكل:

$M(x; h(x))$ أي: $M(x; \ln x)$ ومنه المسافة AM تعطى بـ:

$$AM = \sqrt{(x-0)^2 + (\ln x - 2)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + \left(-(2 - \ln x)\right)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 + (2 - \ln x)^2}$$
$$= \sqrt{f(x)}$$

2) أ/ برهان أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$:

نلاحظ أن:

$$k(x) = (u \circ f)(x)$$

حيث:

$$u(x) = \sqrt{x}$$

لدينا الدالة u متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

والدالة f موجبة تماما على $]0; +\infty[$

اذن $(u \circ f)(x)$ متزايدة تماما على المجال $]0; +\infty[$

ومنه للدالتين f و k نفس اتجاه التغير على المجال $]0; +\infty[$

ب/ برهان أن المسافة AM أصغرية في نقطة B من (C_h) :

بما أن للدالتين f و k نفس اتجاه التغير في المجال $]0; +\infty[$

فإن الدالة k تبلغ قيمة حدية صغرى هي $x = \alpha$

ومنه المسافة أصغرية لما $x = \alpha$

إذن:

$$B(\alpha; \ln \alpha) \Leftrightarrow B(\alpha; 2 - \alpha^2)$$

ج/ برهان أن: $AB = \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$:

$$AB = \sqrt{(\alpha - 0)^2 + (2 - \alpha^2 - 2)^2}$$

f دالة معرفة على مجال I
وg دالة معرفة على المجال (I)
• إذا كانت الدالتين f و g لهما نفس اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متزايدة على I
• إذا كانت الدالتين f و g متعاكستان في اتجاه التغير فإن: $(f \circ g)$ متناقصة على I

$$= \sqrt{\alpha^2 + \alpha^4}$$
$$= \sqrt{\alpha^2(1 + \alpha^2)}$$
$$= |\alpha|\sqrt{1 + \alpha^2}$$
$$= \alpha\sqrt{1 + \alpha^2}$$

3) تبرير أن المستقيم (AB) عمودي على المستقيم المماس للمنحني (C_h) في النقطة B :

لدينا:

ميل المستقيم المماس لـ (C_h) في النقطة B هو:

$$h'(\alpha) = \frac{1}{\alpha}$$

ولدينا ميل المستقيم (AB) هو :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$
$$= \frac{2 - \alpha^2 - 2}{\alpha - 0}$$
$$= -\frac{\alpha^2}{\alpha}$$
$$= -\alpha$$

◀ |تذكر أنّه| ◀ يتعامد مستقيمان إذا كان جداء ميليهما يساوي -1 ▶

لدينا:

$$-\alpha \times \frac{1}{\alpha} = -1$$

ومنه المستقيم (AB) عمودي على مماس المنحني (C_h) في النقطة B.

◀ بالتوفيق في شهادة البكالوريا ▶