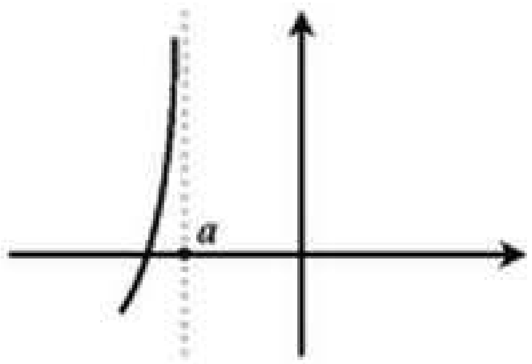
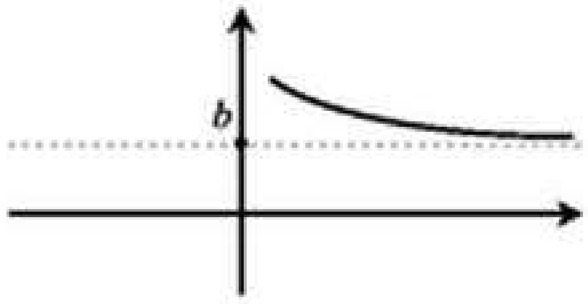
إعداد: عبد المطلب

دراسة الفروع اللانهائية

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O \text{ ، } \vec{j})$ معادلته $x = a$)



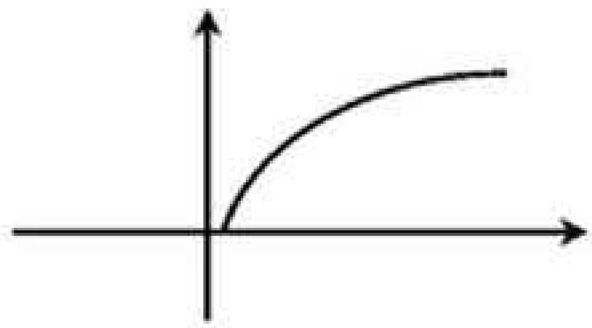
$\lim_{x \to \infty} f(x) = b$ (المنحني $(\mathscr{C})$ الممثل للدالة f يقبل مستقيما مقاربا يوازي $(O \text{ ، } \vec{i})$ معادلته $y = b$)



$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ (يُحتمل أن يقبل المنحني $(\mathscr{C})$ مستقيما مقاربا مائلا معادلته $y = a\,x + b$ ، لذلك نحسب $\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$)

$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(o \text{ ، } \vec{i})$

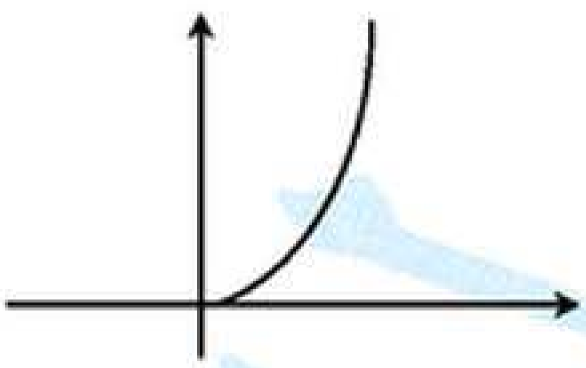


$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = a$

نحسب $\lim_{x \to \infty} [f(x) - a\,x]$

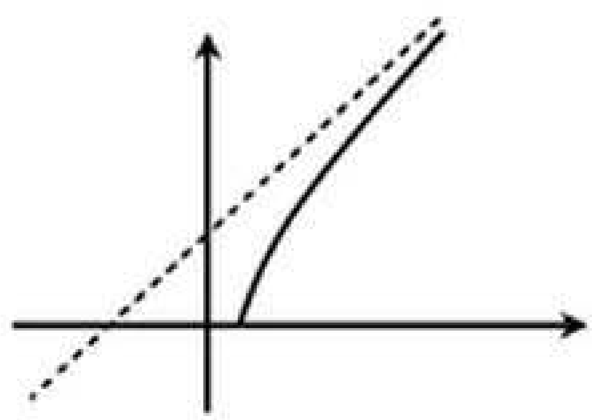
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$

فرع قطع مكافئ باتجاه $(o \text{ ، } \vec{j})$



$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a\,x] = b$

مستقيم مقارب مائل معادلته $y = a\,x + b$

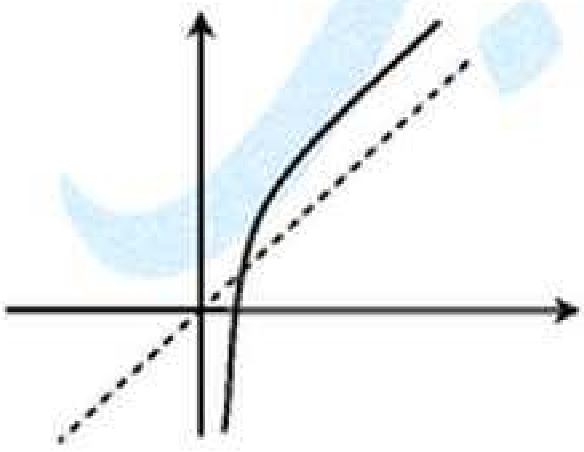


$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a\,x - b] = 0$

مستقيم مقارب مائل $y = a\,x + b$

$\lim_{x \to \infty} [f(x) - a\,x] = \infty$

فرع قطع مكافئ باتجاه $y = a\,x$



الدالـة الأسيـة

تعريف:

الدالة الوحيدة f حيث $f'=f$ و $f(0)=1$ هي: $\boxed{f(x)=e^x}$ حيث $e\approx 2{,}718$

خواص: x و y عددان حقيقان و n عدد صحيح:

$$e^{x+y}=e^x.e^y \qquad e^{x-y}=\frac{e^x}{e^y} \qquad e^{nx}=\left(e^x\right)^n$$

$$e^0=1 \qquad e^{-1}=\frac{1}{e} \qquad e^{-x}=\frac{1}{e^x}>0$$

$\boxed{e^x=a \text{ يكافئ } x=\ln a \ \ (a>0) \text{ و } e^{\ln a}=a}$ ($\ln$ يرمز إلى اللوغاريتم النيبري)

مثال: $e^{-\ln 2}=\frac{1}{e^{\ln 2}}=\frac{1}{2}$ و $e^{3\ln 2}=\left(e^{\ln 2}\right)^3=8$

المشتق:

$\boxed{\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x).e^{u(x)}}$ مثال: $\left(e^{2x}\right)'=2e^{2x}$

النهايات:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x=+\infty \qquad \lim_{x\to-\infty} e^x=0^+ \qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} xe^x=0^-$ (التزايد المقارن)

كذلك: $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^\alpha}=+\infty$ $\quad \lim_{x\to-\infty} x^\alpha e^x=0$ $\quad (\alpha>0)$

الدالـة اللوغاريتمية

تعريف: الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ و دالتها المشتقة $\frac{1}{x}$ حيث $f(1)=0$

هي: $\boxed{f(x)=\ln x}$ $\quad \boxed{\ln x=y \text{ يكافئ } x=e^y \ (x>0) \text{ و } y \text{ عدد حقيقي}}$

إشارة $\ln x$: • $\ln x>0$ إذا كان $x>1$ • $\ln x<0$ إذا كان $0<x<1$

• $\ln x=0$ إذا كان $x=1$ $(\ln 1=0)$ $\quad$ $\ln x=1$ إذا كان $x=e$ $(\ln e=1)$

خواص: a و b عددان حقيقان موجبان تماما، n عدد ناطق: $\boxed{\ln a=\ln b \text{ يكافئ } a=b}$

$$\ln(a\times b)=\ln a+\ln b \qquad \ln\left(\frac{a}{b}\right)=\ln a-\ln b \qquad \ln a^n=n\ln a$$

نتائج: $\ln\left(\frac{1}{a}\right)=-\ln a$ و $\ln\sqrt{a}=\frac{1}{2}\ln a$

المشتق: $\boxed{\left[\ln u(x)\right]'=\frac{u'(x)}{u(x)}}$ حيث u موجبة تماما وقابلة للاشتقاق

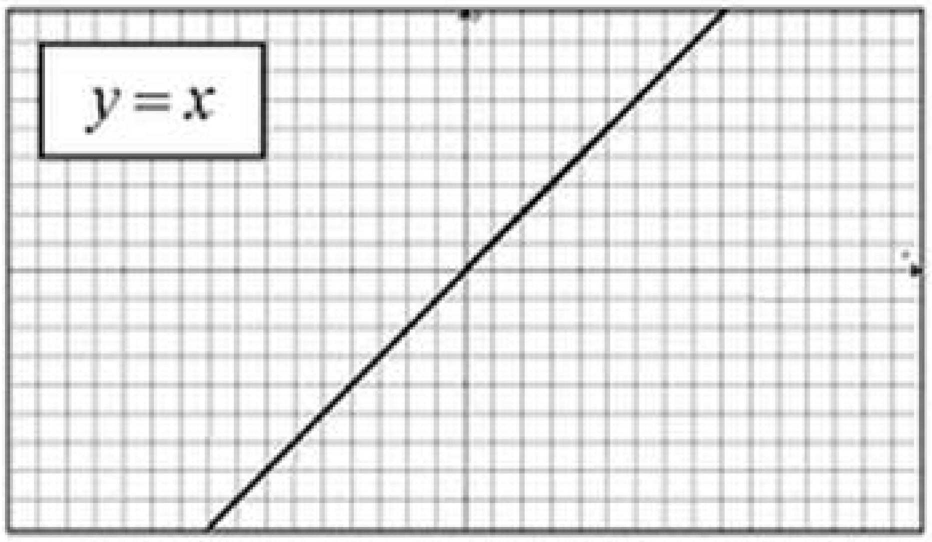
النهايات:

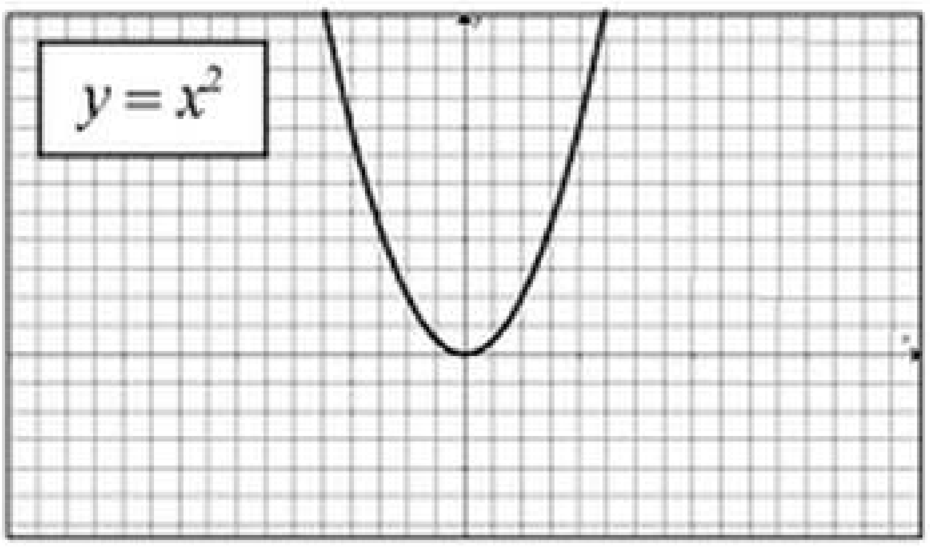
$$\lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty \qquad \lim_{x\to 0^+}\ln x=-\infty \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$$

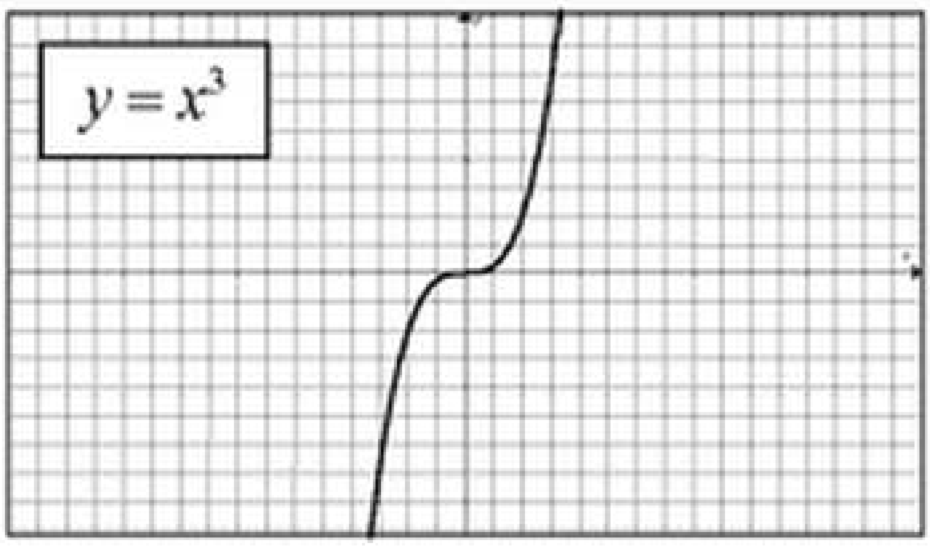
$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ و $\lim_{x\to 0^+} x\ln x=0$ (التزايد المقارن)

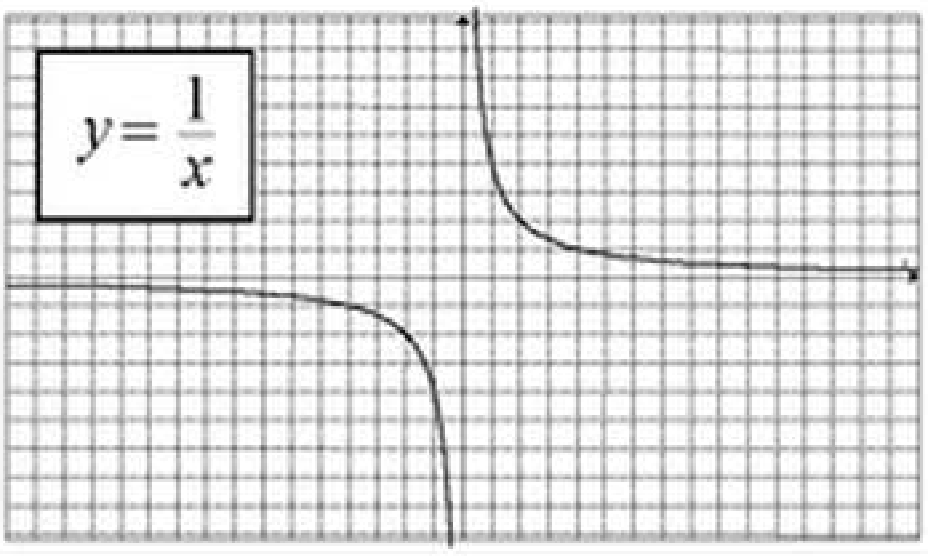
كذلك: $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^\alpha}=0$ $\quad \lim_{x\to 0^+} x^\alpha\ln x=0$ $\quad (\alpha>0)$ $\quad \lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$

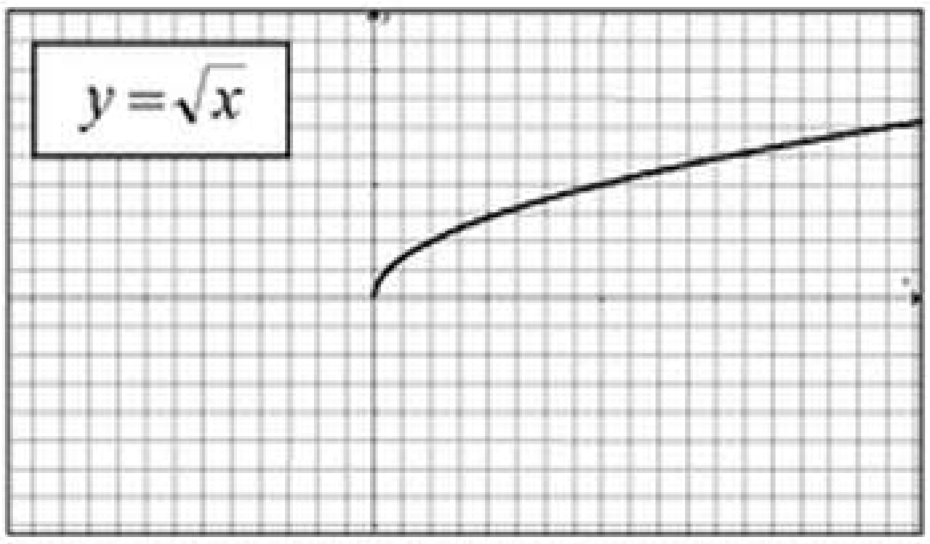
الدوال المرجعية

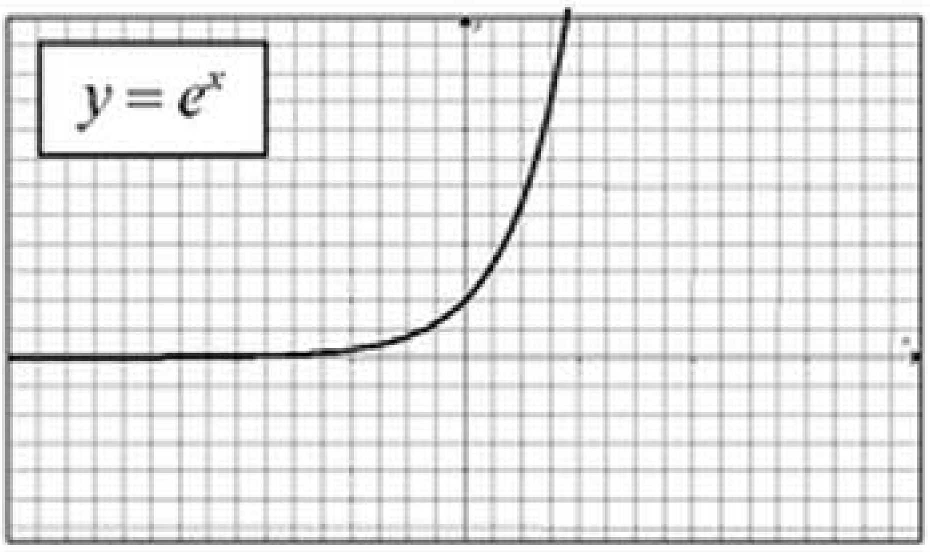


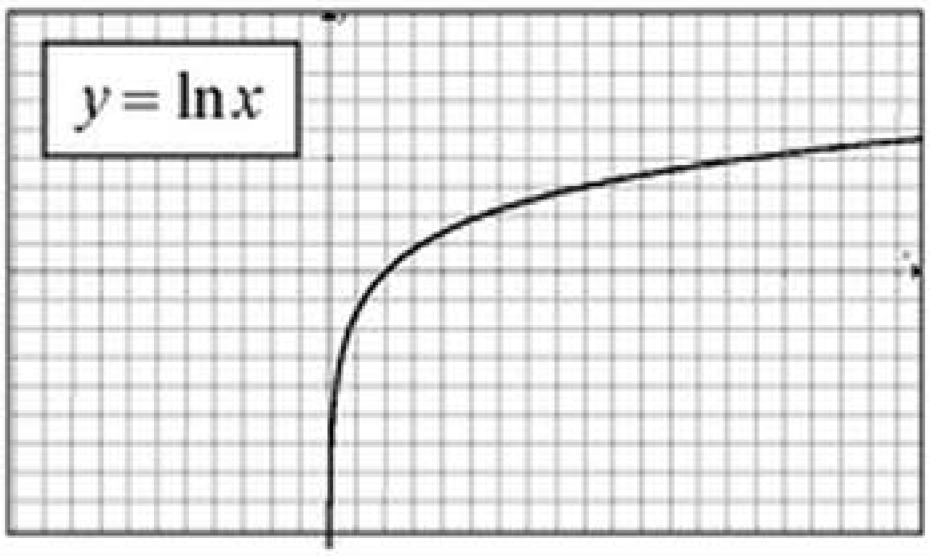


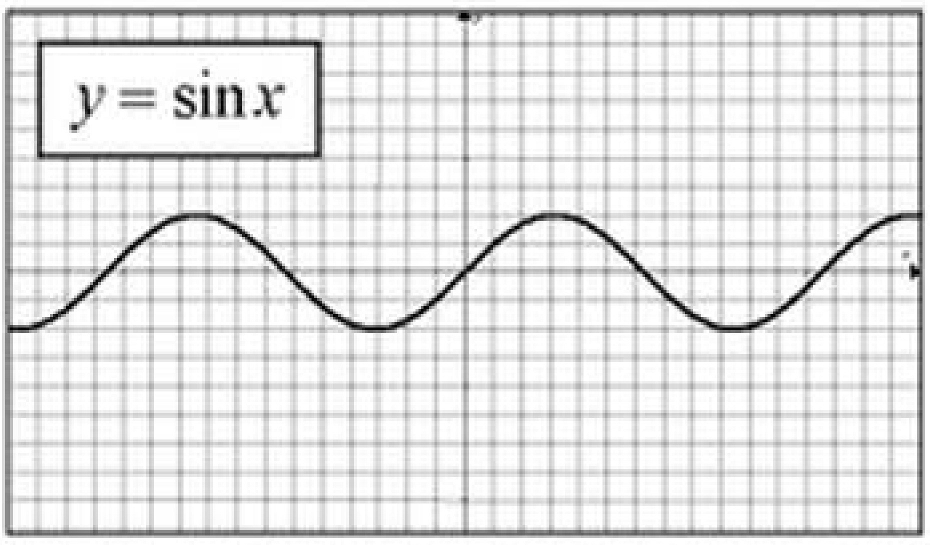


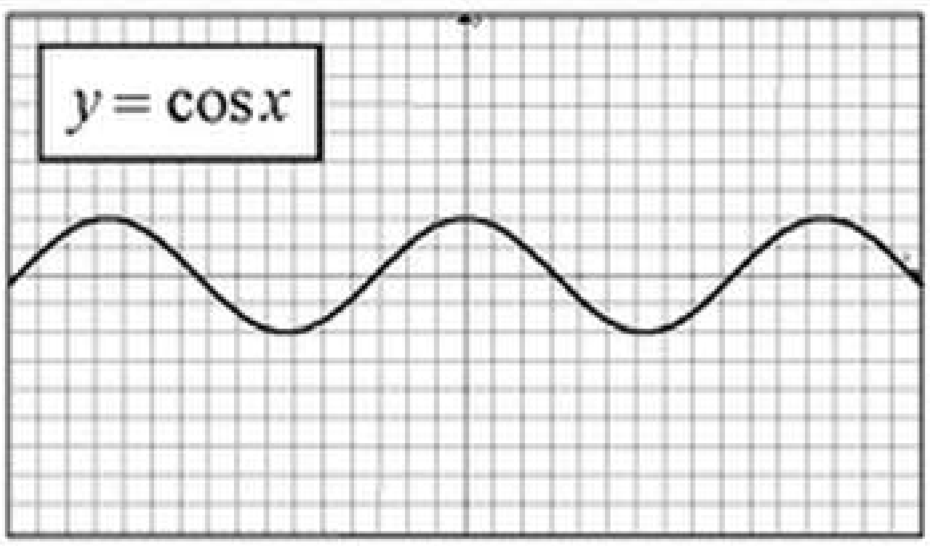


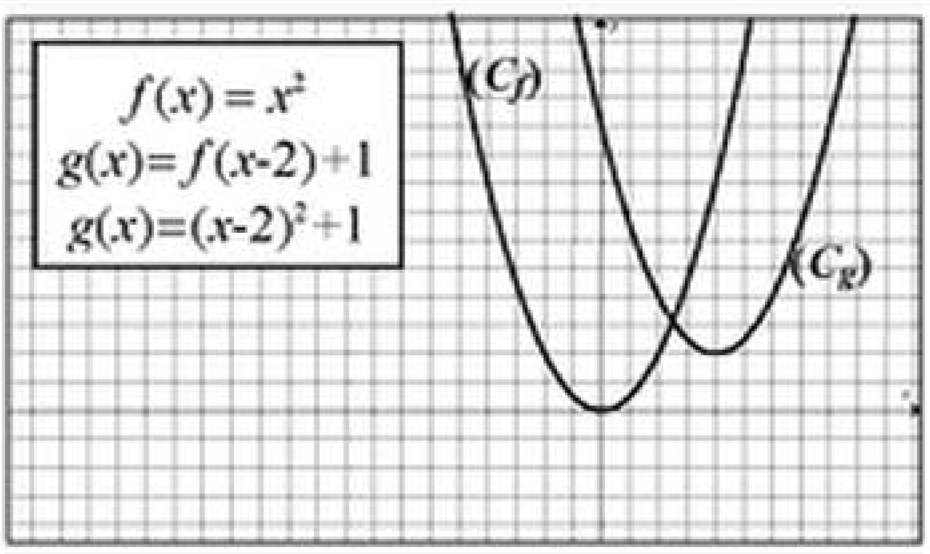












الجداء السلّمي

تذكير:

في معلم متعامد ومتجانس من الفضاء، لتكن: $A(x_A;y_A;z_A)$ و $B(x_B;y_B;z_B)$

مركبة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B-x_A\\ y_B-y_A\\ z_B-z_A\end{pmatrix}$

طويلة الشعاع $\overrightarrow{AB}$: $\|\overrightarrow{AB}\| = AB = \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2}$

منتصف القطعة$[AB]$: $\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

حجم رباعي الوجوه: $\boxed{V=\frac{1}{3}S.H}$ حيث S مساحة القاعدة و H الارتفاع

الجداء السلمي:

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ شعاعان حيث: $\vec{u}(x;y;z)$ و $\vec{v}(x';y';z')$

$$\boxed{\vec{u}.\vec{v} = xx'+yy'+zz'} \qquad \boxed{\vec{u}.\vec{v} = u.v.\cos(\vec{u},\vec{v})}$$

التعامد: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدان إذا كان: $\vec{u}.\vec{v}=0$

الارتباط الخطي: $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مرتبطان خطيا إذا كان: $\vec{u}=\lambda\vec{v}$ (λ عدد حقيقي)

• $\mathcal{P}$ و $\mathcal{P}'$ مستويان، $\vec{n}$ و $\vec{n}'$ ناظميان لهما على الترتيب:

$\mathcal{P}$ يوازي $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}=\lambda\vec{n}'$ (λ عدد حقيقي)

$\mathcal{P}$ يعامد $\mathcal{P}'$ إذا كان: $\vec{n}.\vec{n}'=0$

المستقيم AB عمودي على $\mathcal{P}$ إذا كان: $\overrightarrow{AB}=\lambda\vec{n}$

• بعد نقطة $A(x_A;y_A;z_A)$ عن مستوٍ $\mathcal{P}: ax+by+cz+d=0$ هو:

$$\boxed{d=\frac{|ax_A+by_A+cz_A+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

مجموعة النقط في الفضاء

(E_1) $\boxed{MA=r}$

مجموعة النقط (E_1) هي: سطح كرة مركزها A ونصف قطرها r

معادلتها: $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2+(z-z_A)^2=r^2$

(E_2) $\boxed{MA=MB}$

مجموعة النقط (E_2) هي: المستوي محور القطعة $[AB]$

(E_3) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{BC}=0}$

مجموعة النقط (E_3) هي: المستوي شعاعه الناظمي $\overrightarrow{BC}$ ويشمل النقطة A

(E_4) $\boxed{\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=0}$

مجموعة النقط (E_4) هي: سطح كرة قطرها $[AB]$

المرجح:

لتكن G مرجح الجملة: $\{(A,\alpha);(B,\beta);(C,\gamma)\}$ حيث: $\alpha+\beta+\gamma\neq0$

$$\boxed{\alpha\overrightarrow{GA}+\beta\overrightarrow{GB}+\gamma\overrightarrow{GC}=\vec{0}}$$

$$G\left(\frac{\alpha x_A+\beta x_B+\gamma x_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha y_A+\beta y_B+\gamma y_C}{\alpha+\beta+\gamma};\frac{\alpha z_A+\beta z_B+\gamma z_C}{\alpha+\beta+\gamma}\right)$$

لما $\alpha=\beta=\gamma$ النقطة G تمثل مركز ثقل المثلث ABC

الأعداد المركبة $[\mathbb{C}]$

الشكل الجبري:

$\boxed{z = x + iy}$ حيث $\boxed{i^2 = -1}$ x و y عددين حقيقيين

$\mathrm{Re}(z) = x$: الجزء الحقيقي و $\mathrm{Im}(z) = y$: الجزء التخيلي

$z = 0$: $x = 0$ و $y = 0$ $z = z'$: $x = x'$ و $y = y'$ حيث $z' = x' + iy'$

مرافق عدد مركب:

$\boxed{\bar{z} = x - iy}$ $z + \bar{z} = 2x$ و $z.\bar{z} = x^2 + y^2$

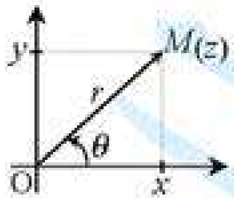
z حقيقي: $\bar{z} = z$ z تخيلي صرف: $\bar{z} = -z$

طويلة عدد مركب:

$$\boxed{|z| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

$|\bar{z}| = |z|$ ، $|z|^2 = z \times \bar{z}$ ، $|z.z'| = |z| \times |z'|$ ، $|z^n| = |z|^n$ ، $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$

الشكل المثلثي:



طويلة z : $|z| = r$ $\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$

عمدة z : $\arg(z) = \theta + 2k\pi$ $z \neq 0$ و k عدد صحيح

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$ $\arg(z.z') = \arg(z) + \arg(z')$

$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$ $\arg(z^n) = n\arg(z)$ n عدد صحيح

قانون موافر $(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$

الشكل الأسي:

$\boxed{z = re^{i\theta}}$ ، $\bar{z} = re^{-i\theta}$ ، $e^{i\pi} = -1$

$z.z' = r.r' \times e^{i(\theta+\theta')}$ ، $\dfrac{z}{z'} = \dfrac{r}{r'} \times e^{i(\theta-\theta')}$ ، $(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$

التفسير الهندسي للأعداد المركبة

♦ لاحقة $\overrightarrow{AB}$ هي $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$ ♦ طول $\overrightarrow{AB}$ هو $AB = |z_B - z_A|$

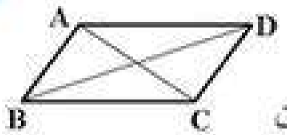
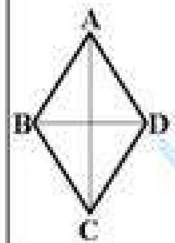
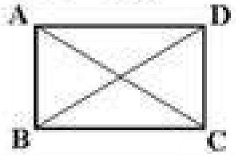
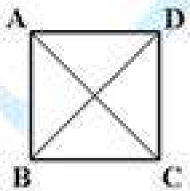
♦ لاحقة النقطة I منتصف $[AB]$ هي $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$

لاحقة G مرجح الجملة: $\{(A;\alpha) ; (B;\beta) ; (C;\gamma)\}$ $\boxed{z_G = \dfrac{\alpha z_A + \beta z_B + \gamma z_C}{\alpha + \beta + \gamma}}$

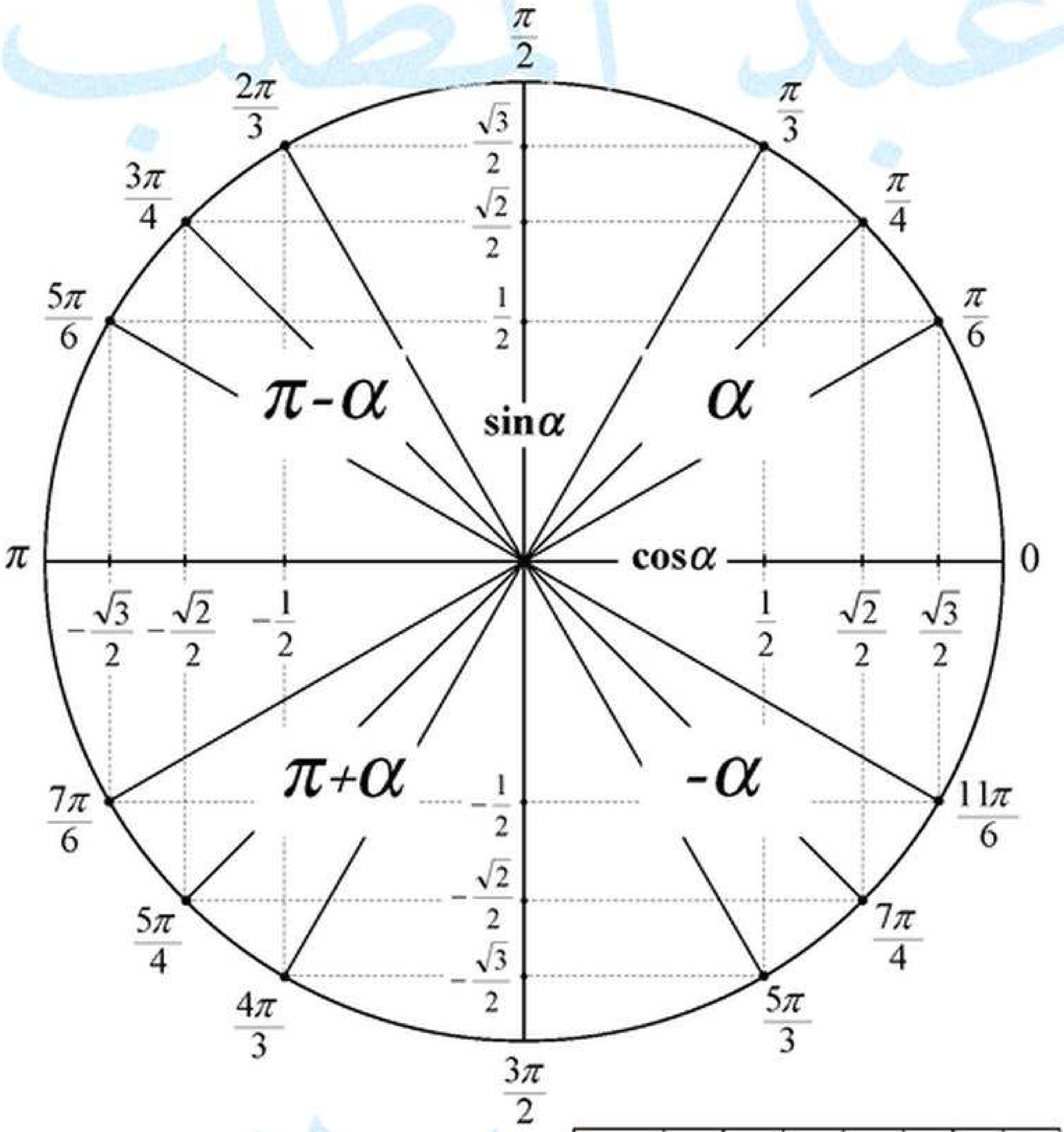
$\boxed{\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})}$ و $\boxed{\left|\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right| = \dfrac{AC}{AB}}$

إذا كان $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا حقيقيا فإن النقاط A ، B و C على استقامة واحدة.

إذا كان $\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$ عددا تخيليا صرفا فإن الشعاعين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متعامدان.

متوازي الأضلاع: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ أو القطران متناصفان 	**المعين:** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ أو القطران متناصفان ومتعامدان 
المستطيل: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) = \dfrac{\pi}{2}$ أو القطران متناصفان ومتساويان 	**المربع:** $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ و $AD = DC$ و $\widehat{ABC} = \dfrac{\pi}{2}$ أو القطران متناصفان ومتعامدان ومتساويان 

Cercle Trigonométrique



$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$
$$=1-2\sin^2\alpha$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$2\cos^2\alpha=1+\cos 2\alpha$$

$$2\sin^2\alpha=1-\cos 2\alpha$$

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

Fonctions Trigonométriques et hyperboliques

α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

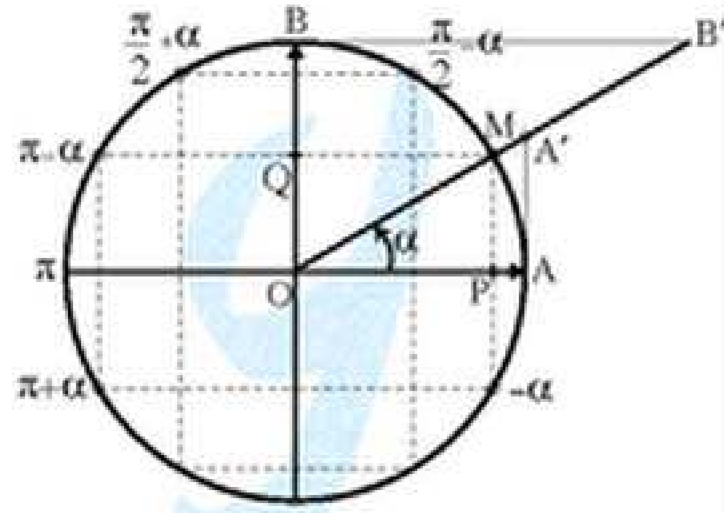
$\cos\alpha = \overline{OP}$ $\quad -1 \le \cos\alpha \le 1$

$\sin\alpha = \overline{OQ}$ $\quad -1 \le \sin\alpha \le 1$

$$\mathrm{tg}\alpha = \overline{AA'} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\alpha = \overline{BB'} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$$

$$\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}\ ;\ \mathrm{cosec}\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$$



$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + \mathrm{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \mathrm{cotg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

$\cos(\alpha + 2k\pi) = \cos\alpha$

$\sin(\alpha + 2k\pi) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\alpha + k\pi) = \mathrm{tg}\alpha$

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

• k nombre relatif •

$\cos(\pi + \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi + \alpha) = -\sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi + \alpha) = \mathrm{tg}\alpha$

$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$

$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$

$\mathrm{tg}(\pi - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$

$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$

$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin\alpha$

$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos\alpha$

$\mathrm{tg}(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\frac{1}{\mathrm{tg}\alpha}$

$\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = k\pi$

$\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi$

$\sin\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \alpha = 2k\pi$

$\sin\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$

$\cos\alpha = -1 \Leftrightarrow \alpha = \pi + 2k\pi$

• k nombre relatif •

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$2\cos^2\alpha = 1 + \cos 2\alpha$

$2\sin^2\alpha = 1 - \cos 2\alpha$

$4\cos^3\alpha = \cos 3\alpha + 3\cos\alpha$

$4\sin^3\alpha = -\sin 3\alpha + 3\sin\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{1 - \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta}{1 + \mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta}$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha = \frac{2\,\mathrm{tg}\alpha}{1 - \mathrm{tg}^2\alpha}$$

$$\cos\alpha = \cos\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = -\beta + 2k\pi \end{cases}$$

$$\sin\alpha = \sin\beta \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \beta + 2k\pi \\ \vee \\ \alpha = \pi - \beta + 2k\pi \end{cases}$$

$\mathrm{tg}\alpha = \mathrm{tg}\beta \Leftrightarrow \alpha = \beta + k\pi$

• k nombre relatif •

$$\cos\alpha = \frac{e^{i\alpha} + e^{-i\alpha}}{2}$$

$$\sin\alpha = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\alpha}}{2i}$$

$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$

$e^{-i\alpha} = \cos\alpha - i\sin\alpha$

$e = 2{,}718281828\ldots$

i nbre imag: $i^2 = -1$

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)]$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\mathrm{tg}\alpha\,\mathrm{tg}\beta = \frac{\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta}{\mathrm{cotg}\alpha + \mathrm{cotg}\beta} = \frac{\mathrm{tg}\beta - \mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{cotg}\alpha - \mathrm{cotg}\beta}$$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\sin(\alpha+\theta)$$

$$\sin\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ \cos\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$a\cos\alpha + b\sin\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\,\cos(\alpha-\theta)$$

$$\cos\theta = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ ;\ \sin\theta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{tg}\alpha + \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{tg}\alpha - \mathrm{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\mathrm{ch}\alpha = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}\ ;\ \mathrm{sh}\alpha = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{2}$$

$$\mathrm{th}\alpha = \frac{\mathrm{sh}\alpha}{\mathrm{ch}\alpha} = \frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$$

$$\mathrm{cth}\alpha = \frac{\mathrm{ch}\alpha}{\mathrm{sh}\alpha} = \frac{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}$$

$\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{sh}\alpha = e^{\alpha}$; $\mathrm{ch}\alpha - \mathrm{sh}\alpha = e^{-\alpha}$

$\mathrm{ch}^2\alpha - \mathrm{sh}^2\alpha = 1$; $\mathrm{th}\alpha\ \mathrm{cth}\alpha = 1$

$\mathrm{sh}(-\alpha) = -\mathrm{sh}\alpha$; $\mathrm{ch}(-\alpha) = \mathrm{ch}\alpha$

$\mathrm{th}(-\alpha) = -\mathrm{th}\alpha$; $\mathrm{cth}(-\alpha) = -\mathrm{cth}\alpha$

$\mathrm{sh}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{ch}\beta \pm \mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{sh}\beta$

$\mathrm{ch}(\alpha \pm \beta) = \mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{ch}\beta \pm \mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{sh}\beta$

$$\mathrm{th}(\alpha \pm \beta) = \frac{\mathrm{th}\alpha \pm \mathrm{th}\beta}{1 \pm \mathrm{th}\alpha\,\mathrm{th}\beta}$$

$$\mathrm{sh}2\alpha = 2\mathrm{sh}\alpha\,\mathrm{ch}\alpha = \frac{2\,\mathrm{th}\alpha}{1 - \mathrm{th}^2\alpha}$$

$$\mathrm{ch}2\alpha = \mathrm{ch}^2\alpha + \mathrm{sh}^2\alpha = 2\mathrm{sh}^2\alpha + 1$$

$$= 2\mathrm{ch}^2\alpha - 1 = \frac{1 + \mathrm{th}^2\alpha}{1 - \mathrm{th}^2\alpha}$$

$$\mathrm{th}2\alpha = \frac{2\,\mathrm{th}\alpha}{1 + \mathrm{th}^2\alpha}\ ;\ \mathrm{cth}2\alpha = \frac{1 + \mathrm{cth}^2\alpha}{2\,\mathrm{cth}\alpha}$$

$$\mathrm{sh}\alpha \pm \mathrm{sh}\beta = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha \pm \beta}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha \mp \beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{ch}\alpha + \mathrm{ch}\beta = 2\,\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{ch}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{ch}\alpha - \mathrm{ch}\beta = 2\,\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\mathrm{sh}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$$

$$\mathrm{th}\alpha \pm \mathrm{th}\beta = \frac{\mathrm{sh}(\alpha \pm \beta)}{\mathrm{ch}\alpha\,\mathrm{ch}\beta}$$

$(\mathrm{ch}\alpha \pm \mathrm{sh}\alpha)^n = \mathrm{ch}n\alpha \pm \mathrm{sh}n\alpha$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.

M' هي صورة (محولة) النقطة M: $M'=f(M)$

العبارة المركبة للتحويل: $\boxed{z'=az+b}$

1) $a=1$ $\boxed{z'=z+b}$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z'=z+2-i$

2) $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ $\boxed{z'-\omega=a(z-\omega)}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}}$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=2z-3+4i$

3) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ و $\theta\neq k\pi$ $\boxed{z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)}$

f **دوران** زاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=iz+4$ $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

إذا كان $z'=e^{i\theta}z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ.

4) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq1$ و $\theta\neq k\pi$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$. مثال: $z'=(1+i)z-2+5i$

- التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.
- الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.
- الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1M_2=M'_1M'_2$

التحويلات النقطية

f تحويل نقطي الذي يرفق بكل نقطة $M(z)$ النقطة $M'(z')$.

M' هي صورة (محولة) النقطة M: $M'=f(M)$

العبارة المركبة للتحويل: $\boxed{z'=az+b}$

1) $a=1$ $\boxed{z'=z+b}$

f **انسحاب** شعاعه $\vec{U}$ حيث العدد المركب b هو لاحقة $\vec{U}$. مثال: $z'=z+2-i$

2) $a\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ $\boxed{z'-\omega=a(z-\omega)}$ $\boxed{\overrightarrow{\Omega M'}=a\overrightarrow{\Omega M}}$

f **تحاكي** نسبته a ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=2z-3+4i$

3) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|=1$ و $\theta\neq k\pi$ $\boxed{z'-\omega=e^{i\theta}(z-\omega)}$

f **دوران** زاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$.

مثال: $z'=iz+4$ $\Omega M'=\Omega M$ و $(\overrightarrow{\Omega M};\overrightarrow{\Omega M'})=\theta$

إذا كان $z'=e^{i\theta}z$ فإن f دوران مركزه O وزاويته θ.

4) $a\in\mathbb{C}^*$ و $|a|\neq1$ و $\theta\neq k\pi$

f **تشابه مباشر** نسبته $|a|$ وزاويته $\theta=\arg(a)$ ومركزه النقطة الصامدة Ω ذات اللاحقة $\omega=\frac{b}{1-a}$. مثال: $z'=(1+i)z-2+5i$

- التشابه المباشر يحافظ على نسب المسافات ويحافظ كذلك على الزوايا الموجهة.
- الانسحاب والتحاكي والدوران عبارة عن تشابهات مباشرة.
- الانسحاب والدوران عبارة عن تقايس: $M_1M_2=M'_1M'_2$

المتتاليات (الحسابية والهندسية)

المتتالية الحسابية

$$\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

r هو الأساس ($r \in \mathbb{R}$)

الحد العام:

$$\boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

n و p عددان طبيعيان

$$u_n = u_0 + nr$$

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

الوسط الحسابي:

$$\boxed{a + c = 2b}$$

a ، b و c حدود متتابعة

المجاميع:

$$S_n = u_p + u_{p+1} + \dots + u_n$$

$$\boxed{S_n = \frac{n-p+1}{2}(u_p + u_n)}$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = \frac{n+1}{2}(u_0 + u_n)$$

$$u_1 + u_2 + \dots + u_n = \frac{n}{2}(u_1 + u_n)$$

$$\boxed{1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$

المتتالية الهندسية

$$\boxed{v_{n+1} = q . v_n}$$

q هو الأساس ($q \in \mathbb{R}^*$)

الحد العام:

$$\boxed{v_n = v_p . q^{n-p}}$$

$$v_n = v_0 . q^n \qquad v_n = v_1 . q^{n-1}$$

الوسط الهندسي:

$$\boxed{a \times c = b^2}$$

a ، b و c حدود متتابعة.

المجاميع:

$$S_n = v_p + v_{p+1} + \dots + v_n$$

$q \neq 1$ $$\boxed{S_n = v_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)}$$

$$v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0\left(\frac{1-q^{n+1}}{1-q}\right)$$

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1\left(\frac{1-q^n}{1-q}\right)$$

$$\boxed{1 + q + q^2 + \dots + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

المتتاليات (التغيرات والتقارب)

تغيرات متتالية

- لدراسة تغيرات متتالية، ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$u_{n+1} - u_n > 0$: المتتالية (u_n) متزايدة تماما

$u_{n+1} - u_n < 0$: المتتالية (u_n) متناقصة تماما

$u_{n+1} - u_n = 0$: المتتالية (u_n) ثابتة.

- إذا كانت $u_n > 0$: نقارن النسبة $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ مع 1.
- إذا كانت $u_n = f(n)$: ندرس تغيرات f على $[0 ; +\infty[$.

وهناك طرق أخرى لدراسة تغيرات متتالية.

تقارب متتالية

المتتالية (u_n) متقاربة إذا كانت: $\lim_{n \to +\infty} u_n = l$.

- إذا كانت (u_n) محدودة من الأعلى ($u_n < \mathrm{M}$) ومتزايدة فإنها متقاربة.
- إذا كانت (u_n) محدودة من الأسفل ($u_n > \mathrm{m}$) ومتناقصة فإنها متقاربة.

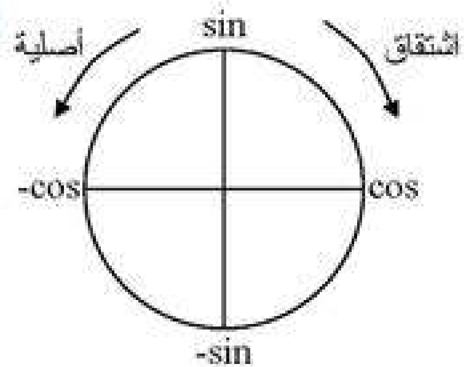
متتاليتان متجاورتان

- إحداهما متناقصة والأخرى متزايدة.
- $\lim_{n \to +\infty} (u_n - v_n) = 0$.

المتتاليتان المتجاورتان تقبلان النهاية نفسها.

الدوال الأصلية

$f(x)$	$F(x)$
a (حقيقي)	$ax+C$
$x^n \quad (n\neq -1)$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1}+C$
$u'.u^n \quad (n\neq -1)$	$\dfrac{u^{n+1}}{n+1}+C$
$\sin(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$-\dfrac{1}{a}\cos(ax+b)+C$
$\cos(ax+b) \quad (a\neq 0)$	$\dfrac{1}{a}\sin(ax+b)+C$
$\dfrac{u'}{u} \quad (u\neq 0)$	$\ln\lvert u\rvert+C$
$u'.e^u$	e^u+C



الحساب التكاملي

f دالة مستمرة على $I=[a;b]$ و F دالة أصلية للدالة f على I. التكامل من a إلى b لـ f يرمز بـ: $\boxed{\int_a^b f(x)dx=[\mathrm{F}(x)]_a^b=\mathrm{F}(b)-\mathrm{F}(a)}$

- **علاقة شال**

$$\int_a^b f(x)dx=\int_c^b f(x)dx+\int_a^c f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx \quad \text{و} \quad \int_a^a f(x)dx=0$$

• f فردية: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=0$ • f زوجية: $\int_{-a}^{a} f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

- **الخطية**

$$\int_a^b [\alpha f(x)+\beta g(x)]dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

- **الإيجابية**

إذا كانت $f(x)\geq 0$ و $(a\leq b)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\geq 0$

- **المقارنة**

إذا كانت $f(x)\leq g(x)$ و $(a\leq b)$ فإن $\int_a^b f(x)dx\leq\int_a^b g(x)dx$

- **القيمة المتوسطة**

القيمة المتوسطة لـ f على $I=[a;b]$ هي: $\boxed{\mu=\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx}$

- **الحصر**

إذا كانت $m\leq f(x)\leq M$ و $(a\leq b)$ فإن $m(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq M(b-a)$

- **التكامل بالتجزئة**

$$\boxed{\int_a^b f(x).g'(x)dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b f'(x).g(x)dx}$$

التحليل التوفيقي

الترتيبات

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

$A_n^p = n(n-1)\times \ldots \times(n-p+1)$

التوفيقات

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

كذلك: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

التبديلة

$$\boxed{A_n^n = n!}$$

القائمة

$$\boxed{n^p}$$

خواص

$C_n^1 = n$ $C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_{n+1}^n = n+1$ $0! = 1! = 1$

السحب

لدينا n قريصة، نسحب p قريصة:

- في آن واحد نستعمل: C_n^p
- على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p}$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$$

التحليل التوفيقي

الترتيبات

$$\boxed{A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}}$$

n عدد طبيعي حيث $(n \geq p \geq 0)$

$n! = 1\times 2\times 3\times \ldots \times n$

$A_n^p = n(n-1)\times \ldots \times(n-p+1)$

التوفيقات

$$\boxed{C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}}$$

كذلك: $C_n^p = \frac{A_n^p}{p!}$

التبديلة

$$\boxed{A_n^n = n!}$$

القائمة

$$\boxed{n^p}$$

خواص

$C_n^1 = n$ $C_n^0 = C_n^n = 1$

$C_{n+1}^n = n+1$ $0! = 1! = 1$

السحب

لدينا n قريصة، نسحب p قريصة:

- في آن واحد نستعمل: C_n^p
- على التوالي بدون إرجاع: A_n^p
- على التوالي بالإرجاع: n^p

الجمعيات

- ذكر وظيفة الأشخاص: A_n^p
- لا نذكر وظيفة الأشخاص: C_n^p

دستور ثنائي الحد

$$\boxed{(x+y)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} y^p}$$

$$= C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} y + \ldots + C_n^n y^n$$

مثال

$$(x+1)^n = \sum_{p=0}^{n} C_n^p x^{n-p} 1^p$$

$$= x^n + C_n^1 x^{n-1} + \ldots + C_n^{n-1} x + 1$$