مجلة النجاح

الدوال العددية - النهايات - الإشتقاقية - الإستمرارية

للسنة 3 ثانوي

إعداد : الأستاذ مسعود

مكتسبات قبلية

المتطابقات الشهيرة

$$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

$$(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$$

$$(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

دراسة إشارة كثيرات الحدود

دراسة إشارة كثير حدود من الشكل $ax+b$

a و b عددان حقيقيان حيث $a \neq 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		عكس إشارة a	0	نفس إشارة a	

دراسة إشارة كثير حدود من الدرجة الثانية

a ، b و c أعداد حقيقية حيث $a \neq 0$.

لدراسة إشارة ax^2+bx+c نحل المعادلة باستعمال المميز Δ حيث : $\Delta = b^2 - 4ac$

- إذا كان $\Delta < 0$ فإن المعادلة لا تقبل حل ولدينا:

x	$-\infty$		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	

- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حل وحيد مضاعف $x_0 = -\frac{b}{2a}$

ولدينا :

x	$-\infty$		$-\frac{b}{2a}$		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس إشارة a	0	نفس إشارة a	

- إذا كان $\Delta > 0$ فإن المعادلة تقبل حلين متمايزين هما :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \\ x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} \end{cases}$$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
ax^2+bx+c		نفس a	0	عكس a	0	نفس a	

الدوال العددية

مجموعة التعريف

تعاريف و مصطلحات :

- الدالة ببساطة هي العبارة التي ترفق بكل عدد x صورة له y
- نرمز للدوال بالرمز $f(x)$، $g(x)$، $h(x)$ ...الخ
- تسمى $f(x)$ أو y حيث $f(x)=y$ الدالة أو الصورة أو الترتيبة
- يسمى المتغير أو السابقة أو الفاصلة
- كل دالة معرفة على مجال يسمى مجموعة التعريف D

تحديد مجموعة التعريف

<u>القاعدة:</u>

- لا كسر و لا جذر : $D_f = R =]-\infty;+\infty[$
- في الكسر نكتب: المقام $\neq 0$
- في الجذر نكتب: ما بداخل الجذر ≥ 0
- في مجموع، طرح، جداء أو قسمة دالتين فأكثر

:

D_f هي تقاطع مجالات تعريف كل هذه الدوال

الدالة	مجموعة التعريف
$f(x) =$ كثير الحدود	$R =]-\infty;+\infty[$
$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)}$	$h(x)\neq 0$
$f(x)=\sqrt{h(x)}$	$h(x)\geq 0$
$f(x)=\frac{g(x)}{\sqrt{h(x)}}$	$h(x)>0$
$f(x)=\sqrt{h(x)}+\frac{g(x)}{k(x)}$	$h(x)\geq 0$ مع: $k(x)\neq 0$
$f(x)=\frac{\sqrt{g(x)}}{\sqrt{h(x)}}$	$g(x)\geq 0$ مع: $h(x)>0$
$f(x)=\sqrt{\frac{g(x)}{h(x)}}$	$h(x)\neq 0$ مع: $\frac{g(x)}{h(x)}\geq 0$

العمليات على الدوال و مجموعة التعريف

$f(x)$ و $g(x)$ دالتان معرفتان على D_f و D_g على الترتيب. k و λ عددان حقيقيان.

العملية	مجموعة التعريف
$f(x)+k$	D_f
$\lambda f(x)$	D_f
$f(x)+g(x)$	$D_f\cap D_g$
$f(x)\times g(x)$	$D_f\cap D_g$
$\frac{f(x)}{g(x)}$	$\{x\epsilon D_f\cap D_g$ و $g(x)\neq 0\}$
$f\ o\ g$	$D_{f\ o\ g}\{x/\ x\in D_g$ و $g(x)\in 0\}$

النهايات

نهايات الدوال المألوفة

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^3 = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \lvert x\rvert = +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \lvert x\rvert = +\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$
$\lim\limits_{\substack{>\\x\to0}} \frac{1}{x} = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{<\\x\to0}} \frac{1}{x} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b] = +\infty\,(a>0)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b] = -\infty\,(a>0)$
$\lim\limits_{x\to+\infty} [ax+b] = -\infty\,(a<0)$	$\lim\limits_{x\to-\infty} [ax+b] = +\infty\,(a<0)$

- **حالات عدم التعيين :**

$$\frac{0}{0} \;/\; \frac{\infty}{\infty} \;/\; 0\times\infty \;/\; +\infty-\infty$$

- **قواعد حساب النهايات :**

$$\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0 \;/\; \frac{\text{عدد}}{0} = \infty \;/\; \infty\times\infty = \infty$$

- **نهاية دالة كثير حدود عند المالانهاية :**

هي نهاية الحد الأعلى درجة

- **نهاية دالة ناطقة عند المالانهاية :**

هي نهاية الحد الأعلى درجة من البسط على الحد الأعلى درجة من المقام

التفسير الهندسي

النهاية : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$

$x = a$ مستقيم مقارب عمودي يوازي محور التراتيب بجوار $\pm\infty$

النهاية : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$

$y = b$ مستقيم مقارب أفقي يوازي محور الفواصل بجوار $\pm\infty$

النهاية : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$

إحتمال وجود مستقيم مقارب مائل

العمليات على النهايات

$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	$\lim\limits_{x\to a} g(x)$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$	$\lim\limits_{x\to a}(f(x)\times g(x))$	$\lim\limits_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$
l	l'	$l+l'$	$l\times l'$	$\frac{l}{l'} : l'\neq 0$
l	∞	∞	$\infty : l\neq 0$	0
∞	l'	∞	$\infty : l'\neq 0$	∞
0	0	0	0	ح ع ت
l	0	l	0	$\infty : l\neq 0$
0	∞	∞	ح ع ت	0
∞	0	∞	ح ع ت	∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	ح ع ت
$+\infty$	$-\infty$	ح ع ت	$-\infty$	ح ع ت

نهاية الدالة مركب

مبرهنة

◄ a ، b ، c تمثل أعداد حقيقية أو $-\infty$ أو $+\infty$

و v ، u و f دوال حيث : $f = u \circ v$

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$

و إذا كانت : $\lim\limits_{x\to b} u(x) = c$

فإن : $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$

النهايات بالمقارنة

مبرهنة 01

◄ f ، g و h دوال و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

و : $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l$

و إذا كان من أجل كل x :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x) = l$$

مبرهنة 02

◄ f ، g و h دوال . l و l' أعداد حقيقية

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = l$

و : $\lim\limits_{x\to a} h(x) = l'$

و إذا كان من أجل كل x :

$$g(x) \leq f(x) \leq h(x)$$

فإن :

$$l \leq \lim_{x\to a} f(x) \leq l'$$

مبرهنة 03

◄ f و g دالتان و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

و إذا كان من أجل كل x : $f(x) \geq g(x)$

فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

مبرهنة 04

◄ f و g دالتان و l عدد حقيقي

إذا كانت : $\lim\limits_{x\to a} g(x) = +\infty$

و إذا كان من أجل كل x : $f(x) \geq g(x)$

فإن :

$$\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$$

إزالة حالات عدم التعيين

- حالات عدم التعيين :

$$\frac{0}{0} \quad / \quad \frac{\infty}{\infty} \quad / \quad 0\times\infty \quad / \quad +\infty-\infty$$

الإختزال

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\frac{0}{0}$$ ح ع ت

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+2)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to1}(x+2)=3$$

التحليل

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{2x^2+1}-2x+1=+\infty-\infty$$ ح ع ت

$$=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-2x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}|x|\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-2x+1$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-2+\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}x\left(\sqrt{\left(2+\frac{1}{x^2}\right)}-2+\frac{1}{x}\right)=-\infty$$

المرافق

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x^2+x+1}-x=+\infty-\infty$$ ح ع ت

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+1-x^2}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}=0$$

العدد المشتق

$$\lim_{x\to0}\frac{cos(x)-1}{x}=\frac{0}{0}$$ ح ع ت

$$=\lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{cos(x)-1}{x-0}=-sin(0)$$

$$=0$$

الإستمرارية

تعريف

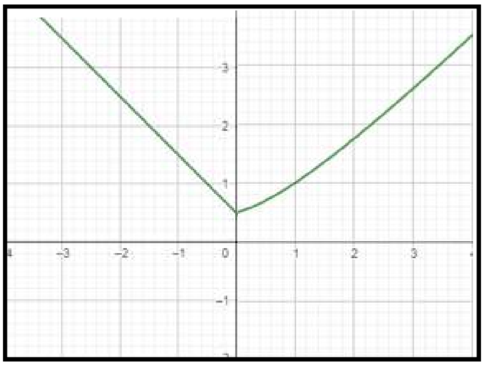
◀ f مستمرة عند قيمة a معناه $f(a)$ معرفة و :

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

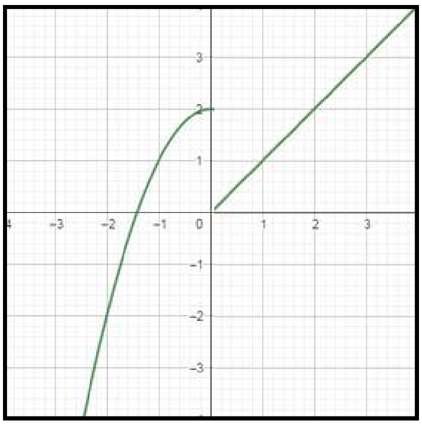
◀ f مستمرة على مجال I من R معناه f مستمرة عند كل قيمة من I .

التفسير الهندسي

◀ تكون الدالة f مستمرة على مجال I عندما يتم رسم منحناها بدون رفع القلم



مستمرة



غير مستمرة

مبرهنة القيم المتوسطة

تعريف

◀ f دالة معرفة و مستمرة على المجال $[a ; b]$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، يوجد على الأقل عدد حقيقي c محصور بين a و b بحيث : $f(c) = k$

التفسير الهندسي

◀ f دالة معرفة و مستمرة على مجال $[a ; b]$ و ليكن (C) منحناها البياني في معلم $(O;\vec{i};\vec{j})$ من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ ، المستقيم ذو المعادلة $y = k$ يقطع على الأقل مرة واحدة المنحنى (C) في نقطة فاصلتها c محصورة بين a و b

◀ إذا كانت الدالة f مستمرة على مجال $[a ; b]$ وكان

$$f(a) \times f(b) < 0$$

فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي α محصور بين a و b بحيث : $f(\alpha) = 0$

أي أن f تنعدم على الأقل مرة واحدة على $[a ; b]$

الإشتقاقية

قابلية الإشتقاق عند عدد

◄ دالة معرفة على مجال I من R ، a عدد من I

نقول أن الدالة f قابلة للإشتقاق عند العدد a معناه :

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$$

يسمى $f'(a)$ العدد المشتق للدالة f في العدد a .

ملاحظات:

- يمكن تعريف العدد المشتق للدالة f عند a بالعلاقة

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)$$

- إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند عدد a من I ، نقول أنها قابلة للإشتقاق على I ، و تسمى الدالة $f'(x)$ الدالة المشتقة لـ f

- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على مجال I ، فهي مستمرة على هذا المجال ، والعكس ليس دائما صحيح

مماس منحنى دالة

◄ f دالة معرفة على المجال I الذي يشمل a و (C_f) تمثيلها البياني .

إذا قبلت الدالة f الإشتقاق عند a فإن (C_f) يقبل عند النقطة $A(a;f(a))$ مماسا (T) معامل توجيهه $f'(a)$ و معادلته :

$$y = f'(a)(x-a)+f(a)$$

الإشتقاق من اليمين و من اليسار

◄ f قابلة للإشتقاق عند a من اليمين معناه :

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_d(a)$$

◄ f قابلة للإشتقاق عند a من اليسار معناه :

$$\lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'_g(a)$$

ملاحظات:

- إذا كان $f'_g(a) = f'_d(a)$ فإن الدالة f قابلة للإشتقاق عند a

- إذا كان $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ فإن الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند a و النقطة $A(a;f(a))$ تسمى نقطة زاوية

التفسير الهندسي:

- إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق عند a من اليمين فإن (C_f) يقبل نصف مماس من اليمين عند النقطة $A(a;f(a))$ معامل توجيهه $f'_d(a)$ و معادلته :

$$y = f'_d(a)(x-a)+f(a)$$

- إذا كانت الدالة f تقبل الإشتقاق عند a من اليسار فإن (C_f) يقبل نصف مماس من اليسار عند النقطة $A(a;f(a))$ معامل توجيهه $f'_g(a)$ و معادلته :

$$y = f'_g(a)(x-a)+f(a)$$

- إذا كان $f'_g(a) \neq f'_d(a)$ نقول أن (C_f) يقبل عند النقطة A نصفي مماسين يصنعان بينهما زاوية

المماس العمودي لمنحنى دالة

- إذا كانت الدالة f مستمرة عند a و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\infty$$

- فإن الدالة f لا تقبل الإشتقاق عند
- و المنحنى (C_f) يقبل عند النقطة $A(a\,;f(a))$ مماسا عموديا معادلته $x=a$

المشتقات و العمليات

مشتقات الدوال المألوفة :

مجال ت	المشتقة $f'(x)$	الدالة $f(x)$
R	0	$k\ \ (k\in R)$
R	a	ax
R	anx^{n-1}	$ax^n\ \ (n\geq 2/n\in N)$
$]0\,;+\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
R^*	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
R	$-sin(x)$	$cos(x)$
R	$cos(x)$	$sin(x)$

- الدالة كثير حدود قابلة للإشتقاق على R
- الدوال الناطقة قابلة للإشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها

المشتقات والعمليات على الدوال :

دالتان قابلتان للإشتقاق على مجال I من R و $k\in R$

المشتقة	الدالة
$u'+v'$	$u+v$
ku'	ku
$u'\times v+v'\times u$	$u\times v$
$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{1}{v}\ (v\neq 0)$
$\frac{u'\times v-v'\times u}{v^2}$	$\frac{u}{v}\ (v\neq 0)$

مشتق الدالة $u(ax+b)$

a و b عددان حقيقيان حيث $a\neq 0$ ، u دالة قابلة للإشتقاق على مجال I من R ، ليكن J المجال المكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى J

الدالة $f(x)=u(ax+b)$ قابلة للإشتقاق على J

ولدينا من أجل كل x من J

$$f'(x)=au'(ax+b)$$

إشتقاق دالة مركبة

مشتقة الدالة $v \circ u$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R
و قبلت الدالة v الإشتقاق على المجال $u(I)$ ، فإن
الدالة $v \circ u$ تقبل الإشتقاق على I و لدينا من
اجل كل x من I :

$$(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$$

مشتقة الدالة الجذرية

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R
و كانت موجبة تماما على I ، فإن الدالة $\sqrt{u(x)}$
تقبل الإشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I

$$\left(\sqrt{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

مشتقة الدالة $[u(x)]^n$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R
، فإن الدالة u^n قابلة للإشتقاق على I و لدينا
من أجل كل x من I :

$$(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$$

مشتقة الدالة $\frac{1}{u^n}$

إذا قبلت الدالة u الإشتقاق على المجال I من R و
لاتنعدم على I فإن الدالة $\frac{1}{u^n}$ قابلة للإشتقاق
على I و لدينا من أجل كل x من I :

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{n \times u'}{u^{n+1}}$$

المشتقات المتتابعة

- إذا كانت الدالة f قابلة للإشتقاق على مجال I ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $f'(x)$ و تسمى المشتقة الأولى للدالة f
- إذا كانت الدالة f' قابلة للإشتقاق على مجال I ، فإن الدالة التي ترفق بكل عدد حقيقي x من I العدد الحقيقي $(f'(x))'$ و تسمى المشتقة الثانية للدالة f و نرمز لها بالرمز f'' أو $f^{(2)}$
- تسمى الدوال f' ، f'' .... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f

إتجاه تغير الدالة

المشتقة و إتجاه التغير

f قابلة للإشتقاق على I من R

إذا كان من أجل كل x من I :

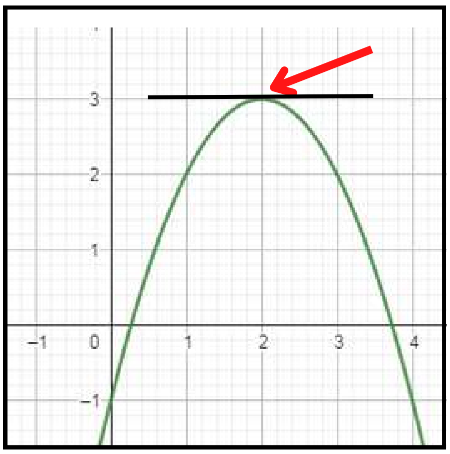
- $f'(x) > 0$ فإن الدالة f متزايدة تماما على I
- $f'(x) < 0$ فإن الدالة f متناقصة تماما على I
- $f'(x) = 0$ فإن الدالة f ثابتة تماما على I

القيم الحدية المحلية

f قابلة للإشتقاق على I من R يشمل x_0

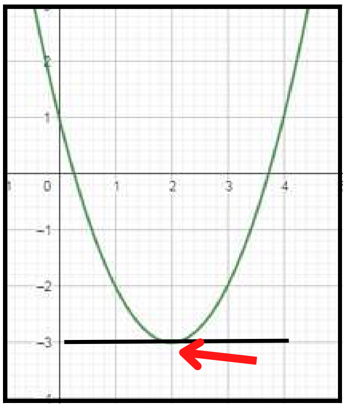
- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية عظمى للدالة f ،
يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و
يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J لدينا

$$f(x_0) > f(x)$$



- القول أن $f(x_0)$ قيمة حدية صغرى للدالة f ،
يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I و
يشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J لدينا

$$f(x_0) < f(x)$$



نقطة الإنعطاف

- نقول أن (C_f) يقبل نقطة إنعطاف $\omega\,(x_0; f(x_0))$
إذا تحقق أحد الشرطين :

- المشتقة الأولى f' تنعدم عند x_0 و لاتغير إشارتها
- المشتقة الثانية f'' تنعدم عند x_0 و تغير إشارتها
- المماس يخترق المنحنى (C_f) عند x_0