

العُبْقَرِي في الرياضيات

المسؤول العمومي

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (الدوال العددية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدوال العددية // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: تسيير وإ.

1 المستقيمات المقاربة:

المستقيم المقارب $\mathbb{P}$	النهاية	التفسير الهندسي
① العمودي	$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$	المستقيم ذو المعادلة $x = a$ (الموازي لمحور الترتيب) مقارب لـ (C_f) .
② الأفقي	$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$	المستقيم ذو المعادلة $y = b$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C_f) عند ∞ .
③ المائل	$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (ax + b)] = 0$	المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞ .

ملاحظة: إذا كان: $\begin{cases} f(x) = ax + b + g(x) \\ \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0 \end{cases}$

فإن: المستقيم ذو المعادلة $y = ax + b$ مقارب مائل لـ (C_f) عند ∞ .

2 الدالة الزوجية، والدالة الفردية:

الدالة f $\mathbb{P}$	معناه	ويكون
① الزوجية	(1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f , فإن $-x$ من D_f) (2) $f(-x) = f(x)$	منحناها متناظر بالنسبة إلى محور الترتيب.
② الفردية	(1) D_f متناظرة بالنسبة إلى الصفر (أي: من أجل كل x من D_f , فإن $-x$ من D_f) (2) $f(-x) = -f(x)$ أو $f(-x) + f(x) = 0$	منحناها متناظر بالنسبة إلى مبدأ المعلم.

3 مركز التناظر، ومحور التناظر:

① محور التناظر	المستقيم ذو المعادلة $x = \alpha$ محور تناظر للمنحنى (C_f) , معناه: $f(2\alpha - x) = f(x)$ أو $f(\alpha - x) = f(\alpha + x)$
② مركز التناظر	النقطة $\omega(\alpha; \beta)$ مركز تناظر للمنحنى (C_f) , معناه: $f(2\alpha - x) + f(x) = 2\beta$ أو $f(\alpha - x) + f(\alpha + x) = 2\beta$

4 تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب، ومع حامل محور الفواصل:

الطريقة	ونكتب	م
نحسب $f(0)$.	$(C_f) \cap (yy') = \{A(0; \dots)\}$	① تقاطع (C_f) مع حامل محور الترتيب $(C_f) \cap (yy')$
نحل المعادلة $f(x) = 0$ في D_f .	$(C_f) \cap (xx') = \{A(\dots; 0); B(\dots; 0)\}$	② تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل $(C_f) \cap (xx')$

5 المماس:

هناك ست (06) صيغ -تقريباً- لطرح سؤال المماس، لكن تبقى معرفة فاصلة نقطة التماس x_0 هي المفتاح للإجابة على أي منها كما سنرى:

الصيغة	الطرح	كيفية الإجابة
الصيغة الأولى (العادية)	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 .	نكتب الدستور: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ حيث نعوض x_0 بقيمتها المُعطاة.
الصيغة الثانية	اكتب معادلة المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الترتيب y_0 .	نحلّ المعادلة $f(x_0) = y_0$ ، وعند تعيين قيمة x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).
الصيغة الثالثة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) ميله (أو معامل توجيهه) يساوي α .	نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية). <u>ملاحظة:</u> عدد الحلول يدلّ على عدد المماسات.
الصيغة الرابعة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يُوازي المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $f'(x_0) = \alpha$ ، عُدنا إلى الحالة الثانية. <u>ملاحظة:</u> مستقيمان متوازيان لهما نفس معامل التوجيه.
الصيغة الخامسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يُعامد المستقيم ذا المعادلة $y = \alpha x + \beta$.	نحلّ المعادلة $\alpha \times f'(x_0) = -1$. <u>ملاحظة:</u> مستقيمان متعامدان، جداء معاملي توجيهيهما يساوي (-1) .
الصيغة السادسة	بيّن أنّه يوجد مماس -أو أكثر- للمنحنى (C_f) يشمل النقطة ذات الإحداثيين $(x_M; y_M)$.	نحلّ المعادلة $y_M = f'(x_0)(x_M - x_0) + f(x_0)$ وعند تعيين قيمة (أو قيم) x_0 نكون قد عُدنا إلى الحالة الأولى (العادية).

6 وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم $ax + b$: (Δ) :

الطريقة	إشارة الفرق	الوضعية النسبية
ندرس إشارة الفرق $f(x) - (ax + b)$	$f(x) - (ax + b) > 0$ $f(x) - (ax + b) < 0$ $f(x) - (ax + b) = 0$	(C_f) يقع فوق (Δ). (C_f) يقع تحت (Δ). (C_f) يقطع (Δ).

7 النهايات:

(أ) حالات <<عدم التعيين>> (ح ع ت):

توجد	الجمع	الجداء	حاصل القسمة
أربع (04) أشكال	$(+\infty) + (-\infty)$ والعكس	$0 \times \infty$ والعكس	$\frac{\infty}{\infty}$ $\frac{0}{0}$

(ب) نهاية # دالة كثير حدود عند $+\infty$ أو $-\infty$:○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة كثير حدود هي نهاية حدها الأعلى درجة عند $+\infty + (-\infty)$.

$g(x) = x^2 - 2x^3 + 1$	$f(x) = x^3 + x - 2$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^3)$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3)$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-2x^3)$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3)$

(ج) نهاية # دالة ناطقة عند $+\infty$ أو $-\infty$:○ النهاية عند $+\infty$ و عند $-\infty$ لدالة ناطقة هي نهاية حاصل قسمة الحدين الأعلى درجة عند $+\infty + (-\infty)$.○ لحساب نهايات # دالة ناطقة عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها؛ نتذكر أن: $\frac{l}{0} = \infty$ ويُحدّد بدراسة إشارة

المقام على اليمين واليسار وحسب مجموعة التعريف.

المقام من الشكل / حيث	n فردي	n زوجي
x^n ($n \in \mathbb{N}^*$)	إشارة x^n من إشارة x النهاية عند 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^-} \right)$	إشارة x^n موجب ($x^n \geq 0$) النهاية عند 0 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$
$(ax + b)^n$ ($n \in \mathbb{N}^*$)	إشارة $(ax + b)^n$ من إشارة $(ax + b)$ النهاية عند $-\frac{b}{a}$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$ عكس إشارة $0^+ a$ و $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^-} \right)$ عكس إشارة $0^- a$	إشارة $(ax + b)^n$ موجب ($(ax + b)^n \geq 0$) النهاية عند $-\frac{b}{a}$ $\lim_{x \rightarrow -\frac{b}{a}} \frac{1}{(ax+b)^n} \left(\frac{l}{0^+} \right)$
$ax^2 + bx + c$	ندرس إشارة $ax^2 + bx + c$ باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$	

(د) إشارة $ax + b$ ($a \neq 0$):

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	مثل إشارة a	عكس إشارة a	مثل إشارة a

(ج) إشارة $P(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$):

المميز	حلول المعادلة	إشارة $P(x)$		تحليل $P(x)$																				
$\Delta = b^2 - 4ac$	$P(x) = 0$ في $\mathbb{R}$																							
$\Delta < 0$	$S = \emptyset$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td colspan="2">مثل إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$+\infty$	$P(x)$	مثل إشارة a		لا يُمكن تحليل $P(x)$															
x	$-\infty$	$+\infty$																						
$P(x)$	مثل إشارة a																							
$\Delta = 0$	$S = \left\{ -\frac{b}{2a} \right\}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>$-\frac{b}{2a}$</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مثل</td><td> </td><td>مثل</td></tr><tr><td></td><td>إشارة a</td><td></td><td>إشارة a</td></tr></table>	x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$	$P(x)$	مثل		مثل		إشارة a		إشارة a	$P(x) = a(x - x_0)^2$ ($x_0 = -\frac{b}{2a}$)									
x	$-\infty$	$-\frac{b}{2a}$	$+\infty$																					
$P(x)$	مثل		مثل																					
	إشارة a		إشارة a																					
$\Delta > 0$	$S = \{x_1; x_2\}$ <u>حيث:</u> $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>x_1</td><td>x_2</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>$P(x)$</td><td>مثل</td><td>عكس</td><td>مثل</td><td>مثل</td></tr><tr><td></td><td>إشارة a</td><td> </td><td>إشارة a</td><td> </td></tr><tr><td></td><td>a</td><td>a</td><td>a</td><td>a</td></tr></table> (نفرض أن $x_1 < x_2$)	x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	$P(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل		إشارة a		إشارة a			a	a	a	a	$P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$	
x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$																				
$P(x)$	مثل	عكس	مثل	مثل																				
	إشارة a		إشارة a																					
	a	a	a	a																				

8 الاشتقاقية:

أ. مشتقات دوال مألوفة:

مجالات قابلية الاشتقاق	$f'(x) =$	$f(x) =$
$\mathbb{R}$	0	$(k \in \mathbb{R}) k$
$\mathbb{R}$	1	x
$\mathbb{R}$	nx^{n-1}	$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) x^n$
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x}$
$]-\infty; 0[$ و $]0; +\infty[$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$(n \geq 2 \text{ و } n \in \mathbb{N}) \frac{1}{x^n}$
$]0; +\infty[$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
$\mathbb{R}$	$-\sin x$	$\cos x$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x$

ب. المشتقات والعمليات على الدوال: u و v دالتان قابلتان للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

$\frac{u}{v}$ (الدالة v لا تنعدم على I)	$\frac{1}{v}$	uv	ku	$u + v$	الدالة
$\frac{u'v - v'u}{v^2}$	$-\frac{v'}{v}$	$u'v + v'u$	ku'	$u' + v'$	المشتقة

ناتج:

- الدوال كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة قابلة للاشتقاق على كل مجال محتوي في مجموعة تعريفها.

ج. الاشتقاقية والاستمرارية:

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I ، فإنها مستمرة على هذا المجال وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.

اشتقاق دالة مركبة:

أ. مشتقة الدالة $v \circ u$: $(v \circ u)'(x) = u'(x) \times v'[u(x)]$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدالة $x \mapsto u(ax + b)$ ($a \neq 0$)

$$f(x) = u(ax + b) \quad f'(x) = au'(ax + b)$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \sqrt{u(x)}$

$$f(x) = \sqrt{u(x)} \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$$

مشتقة الدالة $x \mapsto [u(x)]^n$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 2$)

$$f(x) = [u(x)]^n \quad f'(x) = nu'(x)[u(x)]^{n-1}$$

مشتقة الدالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

$$f(x) = \frac{1}{[u(x)]^n} \quad f'(x) = \frac{-nu'(x)}{[u(x)]^{n+1}}$$

9 الإستمرارية:

f دالة معرفة على مجال I من $\mathbb{R}$ ، إذا كانت f مستمرة على I فإن تفسيرها البياني (أو الهندسي) هو: أنه يمكن رسم منحناها البياني على I دون رفع القلم (اليد).

نتائج:

- الدوال المرجعية مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- الدوال كثيرات الحدود؛ " $\cos$ " و " $\sin$ " هي دوال مستمرة على $\mathbb{R}$.
- الدوال الناطقة (حاصل قسمة كثيري حدود) هي دوال مستمرة على كل مجال من مجموعة تعريفها.
- مجموع؛ جداء وتركيب دوال مستمرة هي دوال مستمرة.

مبرهنة القيم المتوسطة:

مبرهنة القيم المتوسطة (تقبل دون برهان)	التفسير البياني (أو الهندسي) "لمبرهنة القيم المتوسطة"
الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، فإن: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ على الأقل في نقطة واحدة في المجال $[a; b]$.
الحالة الخاصة ($k = 0$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة على المجال $[a; b]$، وكان 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$، فإن: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل على الأقل في نقطة واحدة في المجال $[a; b]$.
وحدانية الحل	
الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتيبة تماما على المجال $[a; b]$، من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، فإن: المعادلة $f(x) = k$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع المستقيم ذو المعادلة $y = k$ في نقطة واحدة فاصلتها α في المجال $[a; b]$.

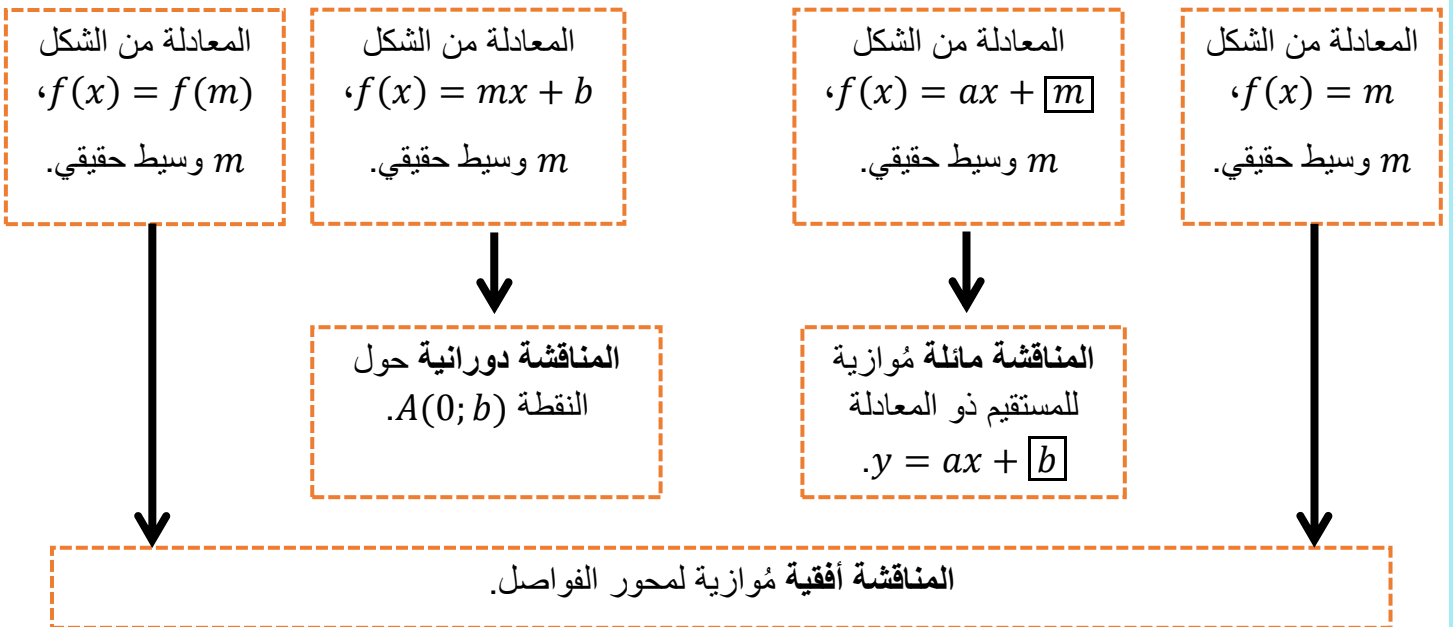
الحالة الخاصة ($k = 0$) إذا كانت f دالة معرفة ومستمرة ورتبية تماماً على المجال $[a; b]$، وكان 0 محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، أي: $f(a) \times f(b) < 0$، فإن: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[a; b]$.	المنحنى (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة واحدة فاصلتها α في المجال $[a; b]$.
---	---

طرق إثبات "وجود" حلول معادلة في مجال $[a; b]$ باستعمال "مبرهنة القيم المتوسطة"

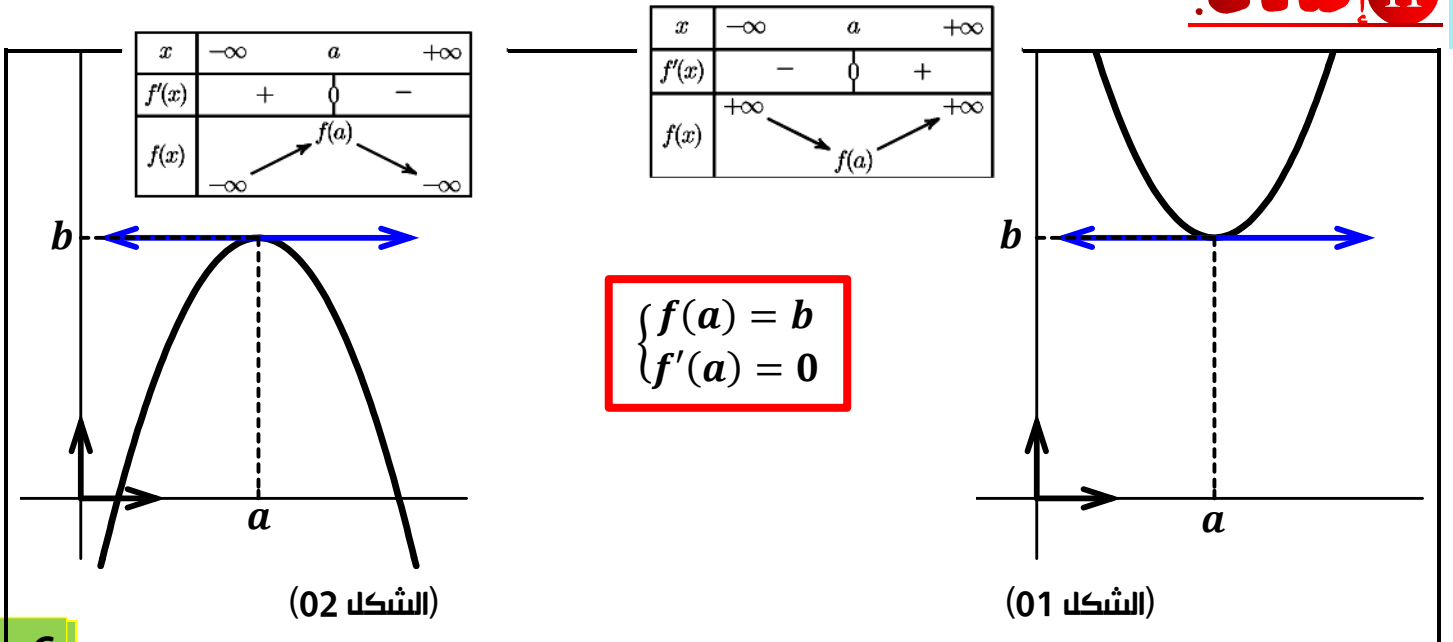
الحالة الخاصة ($k = 0$)	الحالة العامة ($k \in \mathbb{R}$)
1/ نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = 0$ (إن لم تُعطى لنا) 2/ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$. 3/ نتحقق من أن $f(a) \times f(b) < 0$، وذلك بعد حسابهما.	1/ نكتب المعادلة من الشكل $f(x) = k$ (إن لم تُعطى لنا) 2/ نتحقق من استمرارية الدالة f على المجال $[a; b]$. 3/ نتحقق من أن k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، وذلك بعد حسابهما.

ملاحظة: تقبل المبرهنات السابقة عدة تمديدات في حالة الدالة f مستمرة ورتبية تماماً على مجال مفتوح أو مفتوح من إحدى الجهتين، محدود أو غير محدود. (في حالة المجال مفتوح نستعمل النهايات)

10 المناقشة البيانية:



11 إضافات:



12 الكلفة:

- دالة الكلفة الهامشية C_m حيث، $C_m(x) = f(x)$ ، نعوض x بـ q حيث كمية الإنتاج.
- دالة الكلفة الإجمالية C_T حيث، $C_T'(x) = C_m(x)$ ، أي: دالة الكلفة الإجمالية C_T هي دالة أصلية لدالة الكلفة الهامشية C_m .
- دالة الكلفة المتوسطة C_M .

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال العددية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن f دالة عددية قابلة للاشتقاق على كل مجال من مجموعة تعريفها. لها جدول التغيرات التالي:

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$-$	0	$+$
$f(x)$						

Diagram illustrating the behavior of the function $f(x)$ near the vertical asymptote $x=1$ and the local maximum at $x=\frac{3}{2}$.

For $x < 1$:

- As $x \rightarrow -\infty$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
- At $x = \frac{1}{2}$, $f'(x) = 0$ (local maximum).
- As $x \rightarrow 1^-$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

For $x > 1$:

- As $x \rightarrow 1^+$, $f(x) \rightarrow -\infty$.
- At $x = \frac{3}{2}$, $f'(x) = 0$ (local minimum).
- As $x \rightarrow +\infty$, $f(x) \rightarrow +\infty$.

تكتب عبارة $f(x)$ على الشكل: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$ حيث a, b, c أعداد حقيقية.

(1) احسب $f'(x)$.

(2) اعتمادا على جدول تغيرات الدالة f :

أ- عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c .

ب- عيّن $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ وفسر النتيجة بيانياً.

ج- قارن بين صورتى العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f معللاً إجابتك.

(3) نأخذ فيما يلي: $c = \frac{1}{4}$; $b = 1$; $a = 1$ وليكن (C) المنحنى البياني الممثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

(أ) بين أنه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيماً مقارباً (Δ) معادلته:

$$y = x + 1$$

(ب) ادرس وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

(ج) اثبت أن النقطة $\omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) .

(د) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل.

(4) λ عدد حقيقي، عيّن بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$.

التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الدالة كثير الحدود P معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1. شكّل جدول تغيرات الدالة P على $\mathbb{R}$.

2. بين أن المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-\frac{1}{2}; 0[$.

3. استنتج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$.

4. الدالة العددية G معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

عيّن اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$ (لا يُطلب حساب $G(\alpha)$).

التمرين 03: (03 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

f دالة معرفة على $]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$ ، (C_f) تمثيلها البياني وجدول تغيراتها مُعطى كما يلي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
f(x)	2	$+\infty$	2

أجب بـ: خطأ أو صحيح على كل سؤال مما يلي مع تبرير الإجابة.

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى (C_f) .
2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا.
3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $S =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$.
4. في المجال $]-\infty; -1[$ يكون: " $f(-2) > f(x)$ " عندما يكون $x < -2$.
5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f) .
6. الدالة f زوجية.

التمرين 04: (09 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الدالة العددية f معرفة على $\mathbb{R} - \{-1\}$ كما يلي: $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

يُرمز (C_f) إلى المنحنى المُمثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.I. عيّن الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$.

2. احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها.

3. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لمحور الترتيب يُطلب تعيين معادلة له.

4. بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

5. ادرس وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

1.II. بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإن: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ و f' هي الدالة المشتقة للدالة f .

2. عيّن اتجاه تغيّر الدالة f على مجالي مجموعة تعريفها وشكّل جدول تغيّراتها.

3. اكتب معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0.

1.III. بيّن أنّ النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2. ارسم كلا من: (Δ) ، (D) و (C_f) .

3. عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان.

4. احسب مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x = 1$ و $x = e^2 - 1$.

التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- 1) الف الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بـ: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- (1) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2}$ ، حيث a عدد حقيقي يُطلب تعيينه.
- (2) أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
- (3) أـبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن: $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$ ، استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .
- بـ شكّل جدول تغيرات الدالة f .
- (4) أثبت أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما.
- (5) أوجد معادلة لـ (Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1.
- (6) أرسم (Δ) والمنحنى (C_f) .
- (7) أـعّين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تُحقق: $F(2) = -10$.
- بـ أحسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = 2$.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- نعتبر الدالة العددية f المعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$
- (C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- الوحدة 1 cm على محور الفواصل و 4 cm على محور الترتيب.
- (1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2 + 1}$.
- (2) احسب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، واستنتج أنّ (C) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.
- (3) ادرس وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$.
- (4) احسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.
- (5) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(-x) = 2 - f(x)$ ، واستنتج أنّ (C) يقبل مركز تناظر يُطلب تعيينه.
- (6) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C).
- (7) أـ احسب التكامل: $\int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} dx$.
- بـ احسب بالسنتمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$.

التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

- 1) f هي الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بالعلاقة: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$.
- (1) أحسب نهايتي f عند -1 بـقيم أكبر وعند $+\infty$.
- (2) أـبين أنه من أجل كل x من المجال $]-1; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$.
- بـ استنتج اتجاه تغيّر الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

جـ-جد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تتعدم من أجل $x = 0$.

(3) تُنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 آلة على الأكثر. تُنمذجُ الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أنّ: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.

أما هو عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن؟

ب-نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أنّ $C'(x) = C_m(x)$.

جد الكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علما أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA، ثم استنتج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

اختر الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة مع التبرير في كل حالة من الحالات الآتية:
(1) 2 متتاليات عددية.

(3) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 - 1)^3$ ، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته:

(أ) $y = \sqrt{2}x + 1$ (ب) $y = 6\sqrt{2}x - 11$ (ج) $y = 6\sqrt{2}x + 1$

(4) 5 (6) احتمالات.

التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^3 - x^2 - 1$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

(2) ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,46 < \alpha < 1,48$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) مؤسسة صناعية تنتج يوميا كمية q (مقدرة بالطّن) من منتج بكلفة متوسطة C_M (مقدرة بملايين الدنانير) معرفة

على $[0; 10]$ بـ: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$.

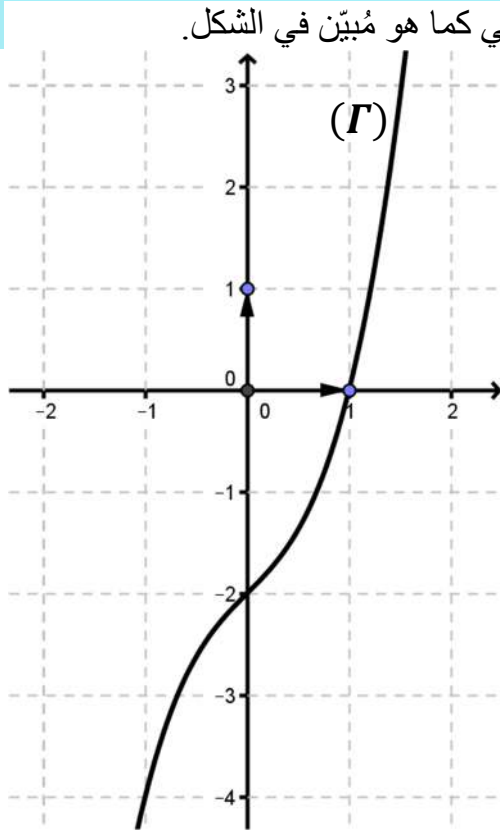
(1) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي q من $[0; 10]$ ، $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2 + 1}$.

(2) عيّن اتجاه تغيّر الكلفة المتوسطة C_M ثم شكّل جدول تغيراتها. (نأخذ $\alpha \simeq 1,47$)

(3) عيّن الكمية التي تُنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثم حدّد هذه الكلفة المتوسطة.

(4) ما هي الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا؟

التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.



$g(I)$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} : g(x) = x^3 + x - 2$ و (Γ) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل.
بقراءة بيانية عين $g(1)$ واستنتج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

$f(II)$ الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\} : f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1(أ) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

ب) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

2) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم $x : f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$.

-استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

3(أ) بين أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) .

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]-1,4; -1,3[$.

5) ارسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) .

6) أحسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمتين

التي معادلاتها: $y = x$ ، $x = 1$ و $x = 3$.

مجلة العقبري في الرياضيات (الدوال العددية - الكالوريات جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (08 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

تذكير: $\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{0 \times u - u \times c}{u^2} = \frac{-cu'}{u^2}$ أو $\left(\frac{c}{u}\right)' = \frac{-cu'}{u^2}$ حيث c عدد حقيقي.

لدينا: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x-1}$

(1) حساب $f'(x)$:

f قابلة للاشتقاق على $]-\infty; 1[$ و $]1; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = a - \frac{c}{(x-1)^2}$

(2) بالاعتماد على جدول تغيرات الدالة f :

أ- تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c :

$$\begin{cases} a - \frac{c}{\left(\frac{1}{2}-1\right)^2} = 0 \\ a - \frac{c}{\left(\frac{3}{2}-1\right)^2} = 0 \\ \frac{1}{2}a + b + \frac{c}{\frac{1}{2}-1} = 1 \\ \frac{3}{2}a + b + \frac{c}{\frac{3}{2}-1} = 3 \end{cases} \quad \text{ولديه:} \quad \begin{cases} f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \\ f'\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \\ f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = 3 \end{cases}$$

من (1) نجد $a = 4c$ وبالتعويض في (2) يكون $2c + b - 2c = 1$ أي: $b = 1$

وبالتعويض في (3) نجد $6c + 1 + 2c = 3$ أي: $c = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ، وبالتالي: $a = 4c = 4\left(\frac{1}{4}\right) = 1$

$$\text{إذن} \quad \boxed{f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}} \quad \text{و} \quad \boxed{f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}}$$

ب- تعيين $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$

تفسير النتيجة بيانياً:

المستقيم ذو المعادلة $x = 1$ (الموازي لمحور الترتيب) مُقارب للمنحنى المُمثل للدالة f .

ج- المقارنة بين صورتَي العددين $\frac{1}{2}$ و $\frac{3}{4}$ بالدالة f مع التعليل:

لدينا: $f\left(\frac{1}{2}\right) > f\left(\frac{3}{2}\right)$ لأن: $\frac{1}{2} < \frac{3}{2}$ و f متناقصة تماماً على المجال $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

$$\text{(3) } a = 1; b = 1; c = \frac{1}{4} \quad \text{لدينا:} \quad f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \quad \text{و} \quad f'(x) = 1 - \frac{\frac{1}{4}}{(x-1)^2}$$

(C) المنحنى البياني المُمثل لتغيرات الدالة f في معلم متعامد ومتجانس.

(أ) تبيان أنه عندما يؤول x إلى $(+\infty)$ أو $(-\infty)$ فإن المنحنى (C) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) معادلته،

$$y = x + 1$$

ط01: لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1} \right] = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} - (x + 1) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\frac{1}{4}}{x-1} \right] = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ط02: بمأن: $\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = 0 \end{array} \right.$ ، فإن: المستقيم $y = x + 1$: (Δ) مقارب مائل لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية المنحنى (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ ومنه: إشارة الفرق $f(x) - y = \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$ من إشارة المقام $(x - 1)$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x - 1$	-		+
$f(x) - y$	-		+
الوضعية	(C) يقع تحت (Δ)		(C) يقع فوق (Δ)

(ج) اثبات أن النقطة $\omega(1; 2)$ مركز تناظر للمنحنى (C) :

نثبت أن $f(2(1) - x) + f(x) = 2(2)$ أي: $f(2 - x) + f(x) = 4$

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

ومنه: $f(2 - x) = (2 - x) + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{(2-x)-1} = -x + 3 + \frac{\frac{1}{4}}{-x+1} = -x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1}$

وعليه: $f(2 - x) - f(x) = \left[-x + 3 - \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \right] - \left[x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} \right] = 4$

إذن: $\omega(1; 2)$ مركز تناظر لـ (C) .

(د) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة: $f(x) = 0$)

لدينا: $f(x) = x + 1 + \frac{\frac{1}{4}}{x-1} = x + 1 + \frac{1}{4(x-1)} = \frac{(x+1)[4(x-1)]+1}{4(x-1)} = \frac{4x^2-3}{4(x-1)}$

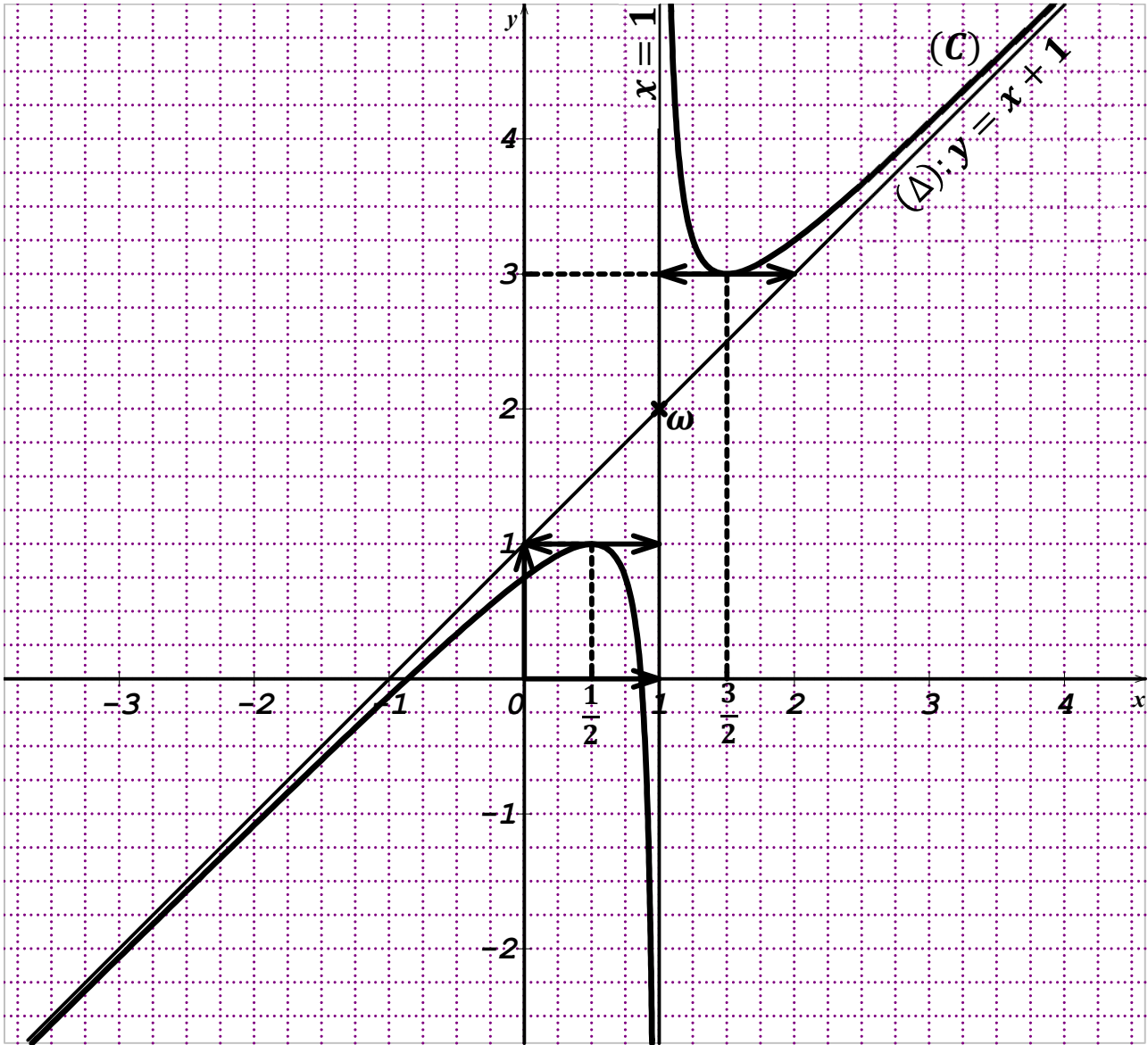
$f(x) = 0$ معناه: $\frac{4x^2-3}{4(x-1)} = 0$

ومنه: $4x^2 - 3 = 0$ و $4(x - 1) \neq 0$

أي: $x^2 = \frac{3}{4}$ و $x \neq 1$

وعليه: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ أو $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ و $x \neq 1$ ؛ إذن: $(C) \cap (xx') = \left\{ A\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}; 0\right); B\left(\frac{\sqrt{3}}{2}; 0\right) \right\}$

4) λ عدد حقيقي، تعيين بيانياً، حسب قيم λ عدد حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$: الرسم:



من البيان نجد:

إذا كان	فإنّ المعادلة $f(x) = \lambda $
$\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$	لها حلان
$\lambda = -3$ أو $\lambda = 3$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[$	ليس لها حلول
$\lambda = -1$ أو $\lambda = 1$	لها حل مضاعف
$\lambda \in]-1; 1[$	لها حلان

المناقشة أفقية
عدد حقيقي $f(x) = |\lambda|$

إضافات: توضيح فقط

حلول المعادلة $f(x) = |\lambda|$ بيانياً هي فواصل نقط تقاطع المنحنى (C) مع المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$.
(المستقيم ذو المعادلة $y = |\lambda|$ ينطبق على حامل محور الفواصل أو يقع فوقه ويوازيه لأن $|\lambda| \geq 0$)

الحالة الأولى: $|\lambda| > 3$ (التقاطع نقطتين)، $\lambda > 3$ أو $\lambda < -3$ أي: $\lambda \in]-\infty; 3[\cup]3; +\infty[$.

الحالة الثانية: $|\lambda| = 3$ (التقاطع نقطة)، $\lambda = 3$ أو $\lambda = -3$.

الحالة الثالثة: $1 < |\lambda| < 3$ (لا يوجد تقاطع)، $1 < \lambda < 3$ أو $-3 < \lambda < -1$ أي: $\lambda \in]-3; -1[\cup]1; 3[$.

الحالة الرابعة: $|\lambda| = 1$ (التقاطع نقطة)، $\lambda = 1$ أو $\lambda = -1$.

الحالة الخامسة: $0 \leq |\lambda| < 1$ (التقاطع نقطتين)، $-1 < \lambda < 1$ أي: $\lambda \in]-1; 1[$.

حل التمرين 02: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: P دالة كثير حدود معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2}$.

1. تشكيل جدول تغيرات الدالة P على $\mathbb{R}$:

(أ) النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$

(ب) المشتقة (حساب $P'(x)$): P دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا $P'(x) = 3x^2 - 8x + 4$.

(ج) إشارة المشتقة (إشارة $P'(x)$):

نضع: $P'(x) = 0$ نجد: $3x^2 - 8x + 4 = 0$ ، مميزها: $\Delta = (-8)^2 - 4(3)(4) = 64 - 48 = 16 > 0$

لها حلين متمايزين هما: $x_1 = \frac{8-4}{6} = \frac{2}{3}$ و $x_2 = \frac{8+4}{6} = 2$.

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	α	0	$\frac{2}{3}$	2	$+\infty$	
$P'(x)$			+		$\bigcirc$	-	$\bigcirc$	+
$P(x)$					$\frac{91}{54}$			$+\infty$
	$-\infty$	-	-	$\bigcirc$	+	+	+	
						+	+	
							+	

2. تبين أن المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\frac{1}{2}; 0[$:

الدالة P مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-\frac{1}{2}; 0[$

(لأنها من جدول التغيرات متزايدة تماما على المجال $]-\infty; \frac{2}{3}[$)

ولدينا: $\begin{cases} P(-\frac{1}{2}) = -2,62 \\ P(0) = \frac{1}{2} \end{cases}$ أي: $P(-\frac{1}{2}) \times P(0) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $P(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\frac{1}{2}; 0[$.

3. استنتاج إشارة $P(x)$ على $\mathbb{R}$: من جدول التغيرات نجد:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$P(x)$	-	○	+

4. لدينا: G دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $G(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2 + \frac{1}{2}x$.

تعيين اتجاه تغير الدالة G على $\mathbb{R}$:

(ب) المشتقة (حساب $G'(x)$):

$G'(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + \frac{1}{2} = P(x)$ ولدينا: G دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$G'(x)$ و $P(x)$ نفس الإشارة

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$G'(x)$	-	○	+

إذن: الدالة G متناقصة تماما على المجال $]-\infty; \alpha[$ و متزايدة تماما على المجال $]\alpha; +\infty[$.

حل التمرين 03: (03 نقاط) بكالكوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

الإجابة بـ: خطأ أو صحيح مع تبرير الإجابة:

1. المستقيم الذي معادلته $y = 2$ مقارب للمنحنى (C_f) ، _____ (صحيح)

لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 2$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$

2. المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا، _____ (خطأ)

لأن: (C_f) لا يقطع حامل محور الفواصل

(توضيح (C_f) يقع فوق المقارب الأفقي الذي معادلته $y = 2$ أي $f(x) > 2$).

3. مجموعة حلول المتراجحة $f(x) > 0$ هي $D_f =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[= S$ ، _____ (صحيح)

لأن: من أجل كل x من D_f ، فإن $f(x) > 2$.

4. في المجال $]-\infty; -1[$ يكون: " $f(-2) > f(x)$ " عندما يكون $x < -2$ ، _____ (صحيح)

لأن: بما أن f متزايدة تماما على المجال $]-\infty; -1[$ ، فإنه "لما $x < -2$ يكون $f(x) < f(-2)$ ".

5. النقطة $A(-3; 1)$ تنتمي إلى المنحنى (C_f) ، _____ (خطأ)

لأن: من أجل كل x من D_f ، فإن $f(x) > 2$.

6. الدالة f زوجية، _____ (خطأ)

لأن: D_f غير متناظرة بالنسبة إلى الصفر ($1 \in D_f$ و $-1 \notin D_f$).

حل التمرين 04: (09 نقاط) بكالكوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$ و $D_f = \mathbb{R} - \{-1\} =]-\infty; -1[\cup]-1; +\infty[$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1.I) تعيين الأعداد الحقيقية a, b, c بحيث يكون، $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1}$:

ط 01: لدينا: $f(x) = ax + b + \frac{c}{x+1} = \frac{(ax+b)(x+1)}{x+1} + \frac{c}{x+1} = \frac{ax^2+(a+b)x+b+c}{x+1}$

ولدينا من جهة أخرى: $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1}$

بالمطابقة نجد: $\begin{cases} a = 1 \\ a + b = 0 \\ b + c = 3 \end{cases}$ وبالتالي: $\begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 4 \end{cases}$ إذن: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ط 02: $f(x) = \frac{x^2+3}{x+1} = \frac{x^2-1+4}{x+1} = \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{4}{x+1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} + \frac{4}{x+1} = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

2) حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجالي مجموعة تعريفها:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$

ولدينا: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} (x^2 + 3) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} (x + 1) = 0^- \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} (x + 1) = 0^+ \end{cases}$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty \end{cases}$

(3) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مُوازيا لمحور التّراتيب يُطلب تعيين معادلة له:

بمّا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

فإنّ: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (المُوازي لمحور التّراتيب) مقارب للمنحنى (C_f) .

(4) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x - 1$ مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[x - 1 + \frac{4}{x+1} - (x - 1) \right] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[\frac{4}{x+1} \right] = 0$

و $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{4}{x+1} \right] = 0$

إذن: المستقيم $y = x - 1$ (Δ) مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(5) دراسة وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{4}{x+1}$ ومنه إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة المقام $(x + 1)$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$x + 1$	-		+
$f(x) - y$	-		+
الوضع النسبي	(C_f) يقع تحت (Δ)		(C_f) يقع فوق (Δ)

(1.II) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R} - \{-1\}$ فإنّ: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]-\infty; -1[$ و $] -1; +\infty[$ ، ولدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنّه: $f'(x) = 1 - \frac{4(1)}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 4}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)^2 - 2^2}{(x+1)^2} = \frac{(x+1-2)(x+1+2)}{(x+1)^2} = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$

(2) تعيين اتجاه تغيّر الدّالة f على مجالى مجموعة تعريفها وتشكيل جدول تغيّراتها:

لدينا: $f'(x) = \frac{(x-1)(x+3)}{(x+1)^2}$ ومنّه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $((x-1)(x+3))$

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$x - 1$		-		-	+
$x + 3$	-		+	+	
$f'(x)$	+		-	-	+

إذن: f متناقصة تماماً على كل من المجالين $[-3; -1]$ و $]-1; 1]$

وَمُتزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; -3]$ و $]1; +\infty[$ ؛ ويكون جدول تغيّراتها كالتالى:

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	-6		$+\infty$	$+\infty$

حيث: $f(-3) = -6$ و $f(1) = 2$.

(3) كتابة معادلة للمماس (D) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0:

معادلة المماس (D) من الشكل: $y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

ولدينا:
$$\begin{cases} f'(0) = \frac{((0)-1)((0)+3)}{((0)+1)^2} = -3 \\ f(0) = \frac{(0)^2+3}{(0)+1} = 3 \end{cases}$$
 إذن: $(D): y = -3x + 3$

1.III) تبيان أن النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) :

نُبين أن $f(2(-1) - x) + f(x) = 2(-2)$ أي: نُبين أن $f(-2 - x) + f(x) = -4$

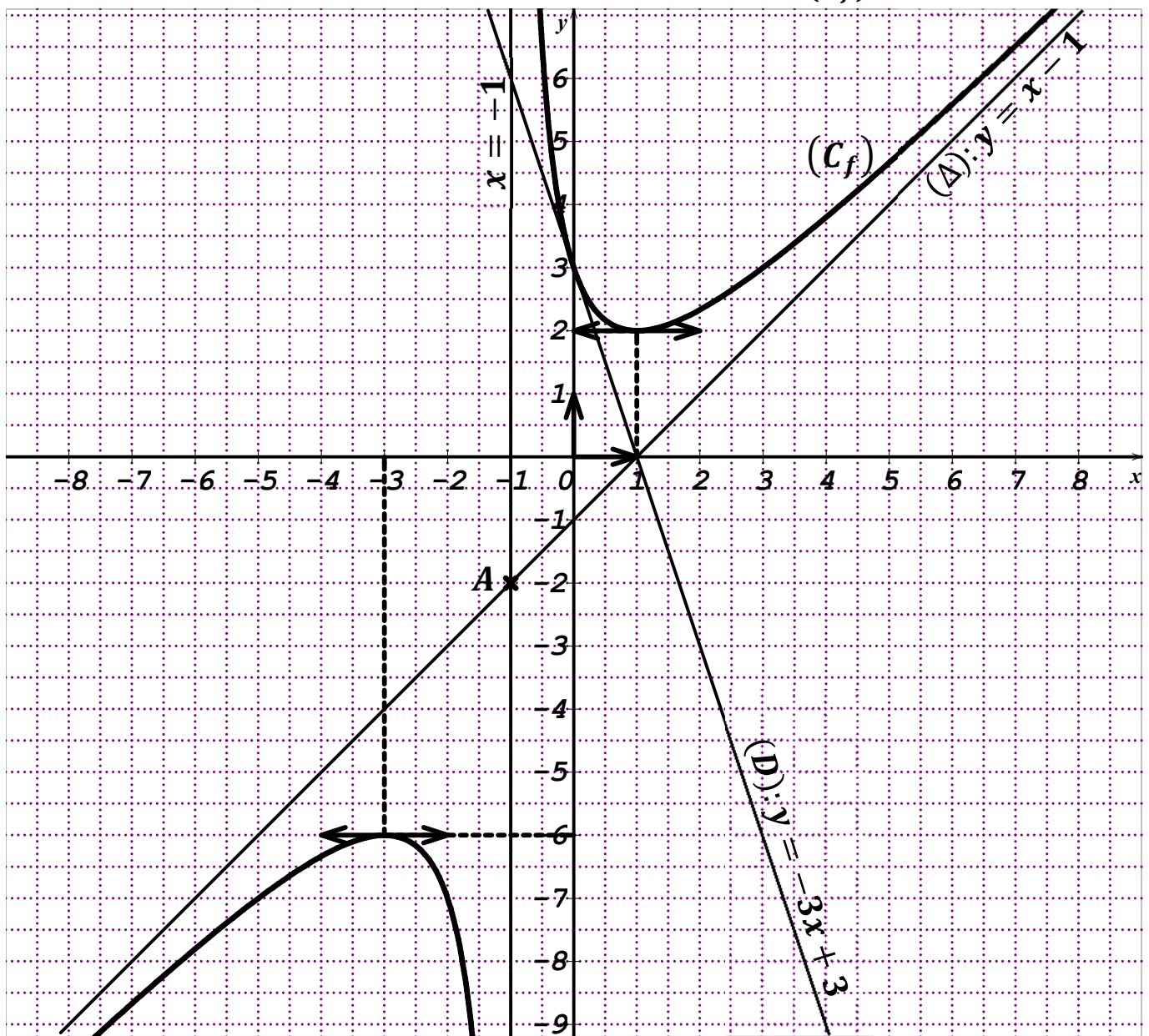
لدينا: $f(x) = x - 1 + \frac{4}{x+1}$

ومنه: $f(-2 - x) = (-2 - x) - 1 + \frac{4}{(-2-x)+1} = -x - 3 + \frac{4}{-x-1} = -x - 3 - \frac{4}{x+1}$

وعليه: $f(-2 - x) + f(x) = -x - 3 - \frac{4}{x+1} + x - 1 + \frac{4}{x+1} = -4$

إذن: النقطة $A(-1; -2)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f) .

2) رسم كلا من (Δ) ، (D) و (C_f) :



3) تعيين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان:

يكون للمعادلة $f(x) = m$ حلان مختلفان إذا كان: $m \in]-\infty; -6[\cup]2; +\infty[$

توضيح فقط: (المناقشة عبارة عن مناقشة أفقية)

حلول المعادلة $f(x) = m$ بيانياً هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = m$.

(استعمل مسطرة وقم بتحريكها من الأسفل إلى الأعلى بالتوازي مع محور الفواصل عدد التقاطعات مع المنحنى هو عدد الحلول ولا تنسى في نفس الوقت قراءة m على محور الترتيب)

4) حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتهما

$$x = 1 \text{ و } x = e^2 - 1$$

بمأن (C_f) يقع فوق (Δ) على المجال $[1; e^2 - 1]$

$$S = \int_1^{e^2-1} [f(x) - y] dx = \int_1^{e^2-1} \left(\frac{4}{x+1} \right) dx = [4 \ln|x+1|]_1^{e^2-1} = [4 \ln(x+1)]_1^{e^2-1}$$

$$\text{فإن: } S = 4[\ln((e^2 - 1) + 1) - \ln((1) + 1)] = 4[\ln(e^2) - \ln(2)] = 4[2 - \ln(2)]$$

$$\text{ومنه: } S = 4[2 - \ln(2)]$$

$$\text{إذن: } S = (8 - 4\ln(2)) u. a$$

حل التمرين 05: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$ و $D_f = \mathbb{R}^* =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(0; \vec{i}; \vec{j})$.

1) تبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن، $f(x) = x - 5 + \frac{a}{x^2}$:

$$\text{ط 01: لدينا: } f(x) = x - 5 + \frac{a}{x^2} = \frac{(x-5)x^2 + a}{x^2} = \frac{x^3 - 5x^2 + a}{x^2}$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2} \text{ بالمطابقة نجد: } a = 4 \text{ إذن: } f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2}$$

$$\text{ط 02: } f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2} = \frac{x^2(x-5)}{x^2} + \frac{4}{x^2} = x - 5 + \frac{4}{x^2}$$

2) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$:

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\text{وبمأن } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \text{ فإن: } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} (x^3 - 5x^2 + 4) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \end{cases}$$

3) أتبين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$ فإن، $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$:

$$\text{ط 01: باستعمال العبارة: } f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2}$$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{4(2x)}{(x^2)^2} = 1 - \frac{8x}{x^4} = 1 - \frac{8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\text{ولدينا من جهة أخرى: } \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3} = \frac{x^3 + 2x^2 + 4x - 2x^2 - 4x - 8}{x^3} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\text{إذن: } f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

$$\text{ط 02: باستعمال العبارة: } f(x) = \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2}$$

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{(3x^2 - 10x) \times x^2 - (2x)(x^3 - 5x^2 + 4)}{[x^2]^2} = \frac{3x^4 - 10x^3 - 2x^4 + 10x^3 - 8x}{x^4} = \frac{x^4 - 8x}{x^4} = \frac{x^3 - 8}{x^3}$$

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3} = \frac{x^3+2x^2+4x-2x^2-4x-8}{x^3} = \frac{x^3-8}{x^3}$$

$$f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3}$$

استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

إشارة $f'(x)$: يُمكن كتابتها على الشكل $f'(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x^3} = \frac{x-2}{x} \times \frac{x^2+2x+4}{x^2}$

ولدينا من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x ، $x^2 + 2x + 4 > 0$ (لأن مميزه سالب تماماً $\Delta = -12 < 0$)
إذن: إشارة $f'(x)$ من إشارة $\frac{x-2}{x}$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$x - 2$	-		-	+
x	-		+	
$f'(x)$	+		-	+

إذن: f متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $[2; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $]0; 2]$.
ب-تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$	-2	$+\infty$

حيث: $f(2) = -2$

4) اثبات أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين أحدهما مائل، يُطلب تعيين معادلتيهما:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ؛ إذن: محور الترتيب مقارب لـ (C_f) .

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0 \end{array} \right.$$

ولدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{x^2} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4}{x^2} = 0$

5) إيجاد معادلة لـ (Δ) مماس (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 1:

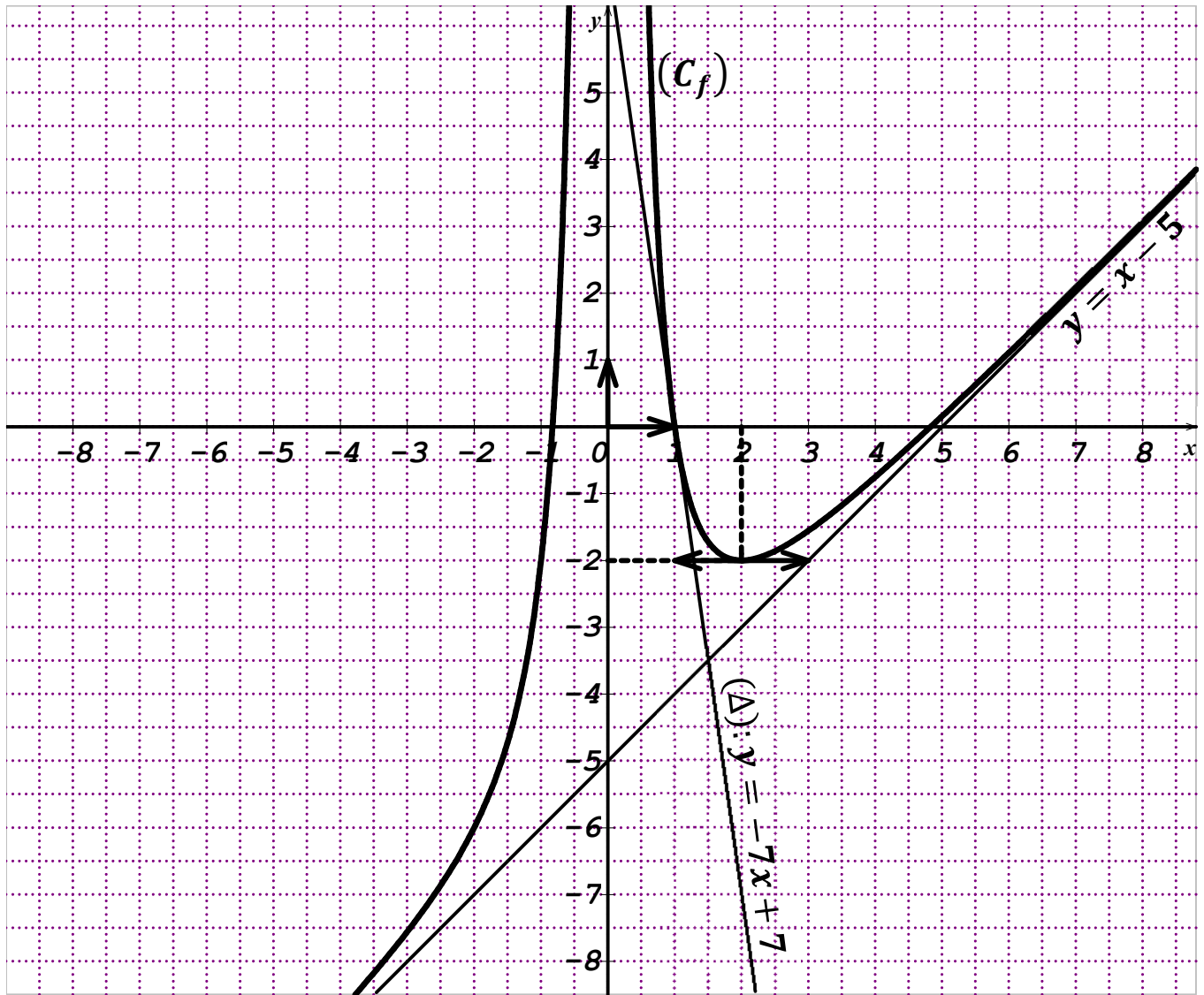
معادلة (Δ) من الشكل: $y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} f'(1) = \frac{(1)^3 - 8}{(1)^3} = \frac{1 - 8}{1} = -7 \\ f(1) = (1) - 5 + \frac{4}{(1)^2} = -4 + 4 = 0 \end{array} \right.$$

بالتعويض نجد: $y = -7(x - 1) + 0$

$$(\Delta): y = -7x + 7$$

(6) رسم (Δ) والمنحنى (C_f) :



(7) أتعين الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $]0; +\infty[$ والتي تحقق، $F(2) = -10$:

لدينا: $f(x) = x - 5 + \frac{4}{x^2} = x - 5 + 4 \times \frac{1}{x^2}$ ومنه: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x} + c$ حيث $c \in \mathbb{R}$

ولدينا: $F(2) = -10$ معناه: $\frac{1}{2}(2)^2 - 5(2) - \frac{4}{(2)} + c = -10$

أي: $2 - 10 - 2 + c = -10$

وبالتالي: $c = 0$ إذن: $F(x) = \frac{1}{2}x^2 - 5x - \frac{4}{x}$

ب- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتهما

$x = 1$ و $x = 2$:

بما أن (C_f) يقع تحت محور الفواصل على المجال $[1; 2]$ ، فإن:

$$S = \int_1^2 -f(x)dx = \int_2^1 f(x)dx = [F(x)]_2^1 = F(1) - F(2) = -\frac{17}{2} - (-10) = -\frac{17}{2} + 10$$

إذن: $S = \frac{3}{2} u. a$

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$ و $D_f =]-\infty; +\infty[$

(C) المنحنى البياني الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
الوحدة 1 cm على محور الفواصل و 4 cm على محور الترتيب.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا، $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2+1}$:

لدينا: $f(x) = 1 - \frac{x}{x^2+1}$ إذن: $f(x) = \frac{x^2-x+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1-x}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} - \frac{x}{x^2+1} = 1 - \frac{x}{x^2+1}$

(2) حساب نهاية الدالة f عند $-\infty$ وعند $+\infty$ ، واستنتاج أن (C) يقبل مستقيما مقاربا يطلب تعيين معادلة له:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2} = 1$ نستنتج أن

المستقيم ذو المعادلة $y = 1$ (الموازي لمحور الفواصل) مقارب لـ (C) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

(3) دراسة وضعية (C) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = 1$: (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = 1 - \frac{x}{x^2+1} - 1 = \frac{-x}{x^2+1}$

إذن: إشارة الفرق $f(x) - y$ من إشارة البسط $(-x)$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	-	○	+
$f(x) - 1$	+	○	-
الوضع النسبي	(C) يقع فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) يقع تحت (Δ)

(4) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ، ولدينا:

$f'(x) = \frac{(2x-1)(x^2+1) - (2x)(x^2-x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^3+2x-x^2-1-2x^3+2x^2-2x}{(x^2+1)^2} = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2} = \frac{(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$
ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(x^2 - 1)$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+

إذن: f متزايدة تماما على كل من المجالين $[-\infty; -1]$ و $[1; +\infty[$ ، ومتناقصة تماما على المجال $[-1; 1]$ ؛
ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-	+
$f(x)$	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	1

(5) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ، $f(-x) = 2 - f(x)$:

لدينا: $2 - f(x) = 2 - \left(1 - \frac{x}{x^2+1}\right) = 2 - 1 + \frac{x}{x^2+1} = 1 + \frac{x}{x^2+1} = 1 - \frac{(-x)}{(-x)^2+1} = f(-x)$

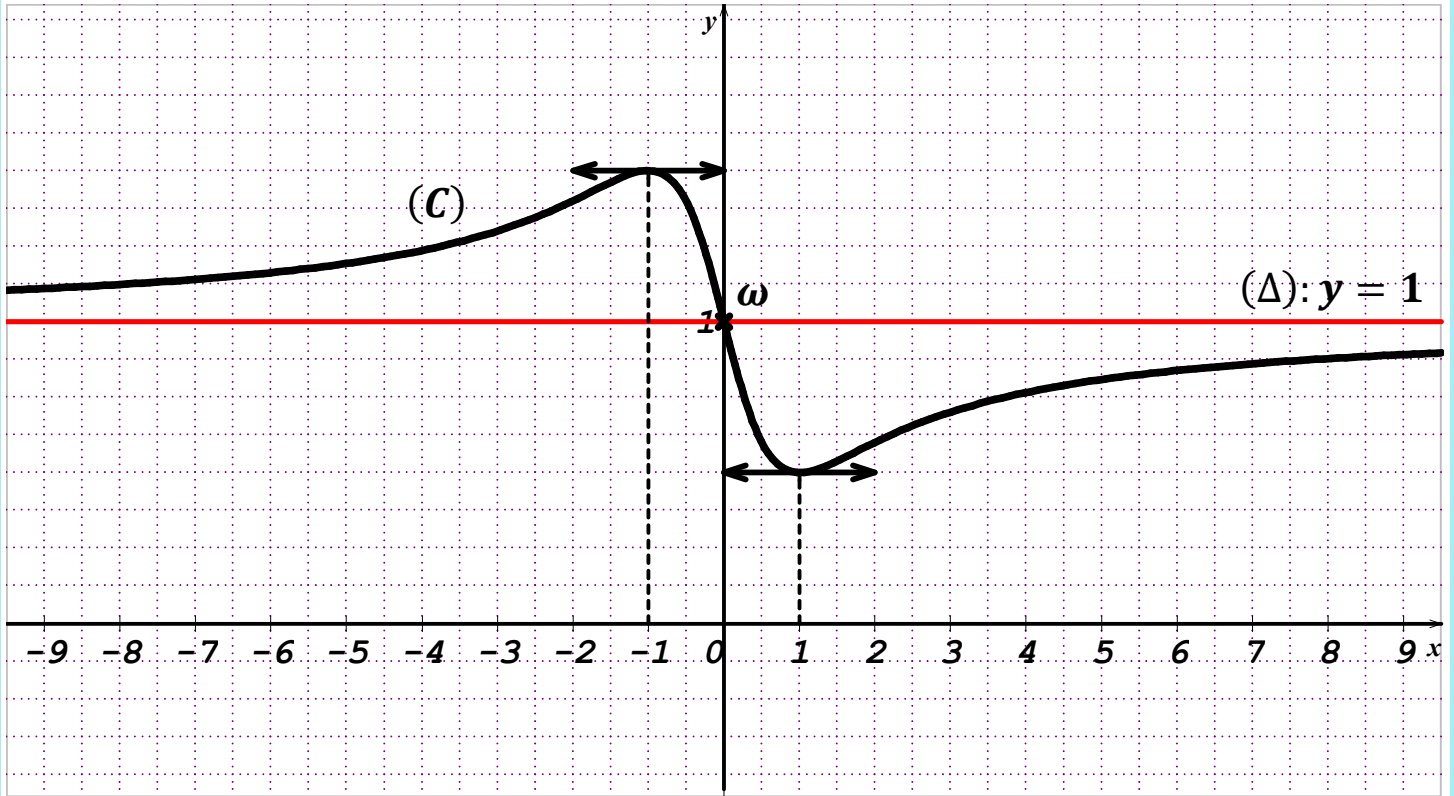
إذن: $f(-x) = 2 - f(x)$

استنتاج أن (C) يقبل مركز تناظر يطلب تعيينه:

لدينا: $f(-x) = 2 - f(x)$ يعني: $f(-x) + f(x) = 2$ من الشكل: $f(2(0) - x) + f(x) = 2(1)$

إذن النقطة $\omega(0; 1)$ هي مركز تناظر لـ (C) .

6) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C) :



7) أ. حساب التكامل، $\int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx$:

$$\text{لدينا: } \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{2x}{x^2+1} dx = \frac{1}{2} [\ln(x^2+1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$$

ب. حساب بالسنتيمتر مربع مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 0$ و $x = 1$:

$$\text{لدينا: } A = 4cm^2 \times \int_0^1 f(x) dx = 4cm^2 \times \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{x^2+1}\right) dx$$

$$\text{ومنه: } A = 4cm^2 \times \left(\int_0^1 1 dx - \int_0^1 \frac{x}{x^2+1} dx\right) = 4cm^2 \times \left([x]_0^1 - \frac{\ln 2}{2}\right)$$

$$\text{وعليه: } A = 4cm^2 \times \left(1 - \frac{\ln 2}{2}\right) = (4 - 2\ln 2)cm^2$$

حل التمرين 07: (05 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$\text{لدينا: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}, D_f =]-1; +\infty[$$

1) حساب نهايتي f عند -1 بقيم أكبر وعند $+\infty$:

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow -1^+} (x+1) = 0^+ \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \left(\frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}\right) = +\infty$$

$$\text{و } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{57600}{x+1} = 0 \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}x^3\right) = +\infty$$

$$2) \text{ أتبين أنه من أجل كل من المجال }]-1; +\infty[, f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2}$$

f قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = x^2 - \frac{57600}{(x+1)^2} = \frac{x^2(x+1)^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x(x+1))^2 - 57600}{(x+1)^2} = \frac{(x^2+x)^2 - (240)^2}{(x+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2+x-240)(x^2+x+240)}{(x+1)^2} \text{ وبالتالي:}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ، ثم تشكيل جدول تغيراتها:
لدينا: $x^2 + x + 240 > 0$ (لأن مميزه سالب تماما $\Delta = (1)^2 - 4(1)(240) = -959 < 0$)
وبالتالي: إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 + x - 240)$

$$\text{نضع: } x^2 + x - 240 = 0 (*)$$

$$\Delta = (1)^2 - 4(1)(-240) = 1 + 960 = 961 > 0 \text{ نحسب المميز } \Delta: (*)$$

$$x' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1+31}{2} = \frac{30}{2} = 15 \in]-1; +\infty[\text{ ومنه:}$$

$$x'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{961}}{2(1)} = \frac{-1-31}{2} = \frac{-32}{2} = -16 \notin]-1; +\infty[\text{ و}$$

x	-1	15	$+\infty$
$x^2 + x - 240$	-	○	+
$f'(x)$	-	○	+

إذن: f متناقصة تماما على المجال $]-1; 15]$ ، و متزايدة تماما على المجال $[15; +\infty[$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	-1	15	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	+
$f(x)$	$+\infty$	4825	$+\infty$

ج- ايجاد الدالة الأصلية H للدالة $h: x \mapsto \frac{1}{x+1}$ على المجال $]-1; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = 0$:

مجموعة الدوال الأصلية للدالة h على المجال $]-1; +\infty[$ هي الدوال: $H(x) = \ln(x+1) + c$ ، حيث c ثابت حقيقي، ونعلم أن $H(0) = 0$ ومنه: $c = 0$ إذن: $H(x) = \ln(x+1)$.

3) تنتج إحدى شركات تركيب آلات الغسيل خلال أسبوع 5 آلات على الأقل و 200 آلة على الأكثر.
ننمذج الكلفة الهامشية C_m لإنتاج x آلة إضافية للشركة على المجال $[5; 200]$ بالدالة f أي أن: من أجل كل x من المجال $[5; 200]$ ، $C_m(x) = f(x)$.

أ- ايجاد عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن:

$$\text{لدينا: } C_m(x) = f(x)$$

من جدول تغيرات الدالة f ، 4825 هي قيمة حدية صغرى لـ f على المجال $[5; 200]$ ، من أجل $x = 15$.
إذن: عدد الآلات التي يجب أن تنتجها الشركة خلال أسبوع لكي تكون الكلفة الهامشية أقل ما يمكن هو 15.

ب- نرمز بالرمز $C(x)$ للكلفة الإجمالية لإنتاج x آلة. ونذكر أن $C'(x) = C_m(x)$.

ايجاد الكلفة الإجمالية $C(x)$ ، علما أن الكلفة الإجمالية لإنتاج 5 آلات الأولى هي 40000DA:

لدينا: $C'(x) = C_m(x) = f(x)$ أي: C هي الدالة الأصلية للدالة $C_m = f$ حيث $C(5) = 4 \times 10^4$

$$\text{ولدينا: } f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 100 + \frac{57600}{x+1}$$

$$\text{يكون: } C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln(x+1) + c \text{ (حيث } c \in \mathbb{R})$$

من جهة أخرى: $C(5) = 4 \times 10^4$ نجد: $\frac{1}{12}5^4 + 100(5) + 57600 \ln(5+1) + c = 4 \times 10^4$

$$c = -\frac{6625}{12} - 57600 \ln 6 + 4 \times 10^4 \text{ ومنه:}$$

$$c = \frac{473375}{12} - 57600 \ln 6 \text{ وبالتالي:}$$

$$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln(x+1) + \frac{473375}{12} - 57600 \ln 6 \text{ بالتعويض نجد:}$$

$$C(x) = \frac{1}{12}x^4 + 100x + 57600 \ln\left(\frac{x+1}{6}\right) + \frac{473375}{12} \text{ إذن:}$$

استنتاج قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 15 آلة الأولى:

$$C(15) = \frac{1}{12}(15)^4 + 100(15) + 57600 \ln\left(\frac{15+1}{6}\right) + \frac{473375}{12} = 101662,43 \text{ DA لدينا:}$$

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

اختيار الاقتراح الصحيح الوحيد، مع التبرير:

(1) 2 متتاليات عددية.

(3) منحنى الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = (x^2 - 1)^3$ ، يقبل مماساً في النقطة ذات الفاصلة $\sqrt{2}$ معادلته من

$$\text{الشكل: } y = f'(\sqrt{2})(x - \sqrt{2}) + f(\sqrt{2})$$

$$\begin{cases} f(x) = (x^2 - 1)^3 \\ f'(x) = 3 \times 2x(x^2 - 1)^2 = 6x(x^2 - 1)^2 \end{cases} \text{ لأن: } \begin{cases} f(\sqrt{2}) = (\sqrt{2}^2 - 1)^3 = 1 \\ f'(\sqrt{2}) = 6\sqrt{2}(\sqrt{2}^2 - 1)^2 = 6\sqrt{2} \end{cases} \text{ ولدينا:}$$

$$y = 6\sqrt{2}(x - \sqrt{2}) + 1 = 6\sqrt{2}x - 11 \text{ بالتعويض نجد:}$$

$$\text{إذن: الاقتراح الصحيح هو ب) } y = 6\sqrt{2}x - 11$$

(4) 5 (6) احتمالات.

حل التمرين 09: (08 نقاط) بكالوريا 2017 د 02 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإ.

$$I \text{ لدينا: } g(x) = x^3 - x^2 - 1 \text{ و } D_g =]-\infty; +\infty[$$

$$(1) \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x):$$

$$\text{لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^3) = +\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3) = -\infty$$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكّل جدول تغيراتها:

$$g \text{ قابلة للاشتقاق على } \mathbb{R}, \text{ ولدينا: } g'(x) = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$$

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	$+\infty$	
$g'(x)$	$+$	$\bigcirc$	$-$	$\bigcirc$	$+$

إذن: g متزايدة تماماً على كل من المجالين $]-\infty; 0]$ و $[\frac{2}{3}; +\infty[$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[0; \frac{2}{3}]$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	$-\infty$	0	$\frac{2}{3}$	α	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	$\circ$	$-$	$\circ$	$+$
$g(x)$	$-\infty$	-1	$-\frac{31}{27}$	$+$	$+\infty$

(3) تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46 < \alpha < 1,48$:

لدينا: g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $[1,46; 1,48]$ (لأنها متزايدة تماما على $[\frac{2}{3}; +\infty[$)

ولدينا: $\begin{cases} g(1,46) = -0,02 \\ g(1,48) = +0,05 \end{cases}$ أي: $g(1,46) \times g(1,48) < 0$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,46 < \alpha < 1,48$ أي: $g(\alpha) = 0$.

(4) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

من السؤال (3) نلخص إشارة $g(x)$ على المجال $\mathbb{R}$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	$\circ$	$+$

(II) مؤسسة صناعية تنتج يوميا كمية q (مقدرة بالطن) من منتج بكلفة متوسطة C_M (مقدرة بملايين الدنانير) معرفة

على $[0; 10]$ بـ: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$.

(1) تبيان أن من أجل كل عدد حقيقي q من $[0; 10]$: $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2+1}$:

لدينا: $C_M(q) = \frac{1}{2}q^2 - q + 1 - \frac{1}{2}\ln(q^2 + 1)$

ومنه: $C'_M(q) = q - 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{2q}{q^2+1}\right) = q - 1 - \frac{q}{q^2+1} = \frac{(q-1)(q^2+1)-q}{q^2+1} = \frac{q^3-q^2-1}{q^2+1} = \frac{g(q)}{q^2+1}$.

(2) تعيين اتجاه تغير الكلفة المتوسطة C_M ثم تشكيل جدول تغيراتها: (بأخذ $\alpha \simeq 1,47$)

لدينا: $C'_M(q) = \frac{g(q)}{q^2+1}$ ومنه: إشارة $C'_M(q)$ من إشارة $g(q)$ على المجال $[0; 10]$ (لأن $q^2 + 1 > 0$)

q	1	α	10
$C'_M(q)$	$-$	$\circ$	$+$

إذن: C_M متناقصة تماما على المجال $[1; \alpha]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; 10]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

q	1	α	10
$C'_M(q)$	$-$	$\circ$	$+$
$C_M(q)$	$0,15$	$0,04$	$38,69$

(3) تعيين الكمية التي تنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة ثم تحديد هذه الكلفة المتوسطة:

الكمية التي تنتج يوميا بأقل كلفة متوسطة هي $q = \alpha \simeq 1,47t$ ، و $C_M(\alpha) \simeq 0,04$ أي: $40000D$

(4) إيجاد الكلفة الإجمالية C لإنتاج 2 طن يوميا: (أي: $C(2)$)

$$C(2) = 2C_M(2) = 2 \left(\frac{1}{2}(2)^2 - 2 + 1 - \frac{1}{2} \ln(2^2 + 1) \right) = 2 \left(1 - \frac{1}{2} \ln(5) \right)$$

لدينا: $C(2) \simeq 0,39$ أي: $390000D$.

حل التمرين 10: (07 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشّعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = x^3 + x - 2$ و $D_g = \mathbb{R}$

بقراءة بيانية تعيين $g(1)$ واستنتاج إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$:

من البيان، لدينا: $g(1) = 0$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g(x)$	-	○	+

(II) لدينا: $f(x) = x - \frac{x-1}{x^2}$ و $D_f =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[$

و (C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وتفسير النتيجة بيانيا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0^+ \quad \text{لأن} \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(x-1)}{x^2} = +\infty$$

تفسيرها البياني: محور الترتيب مقارب لـ (C_f) .

(2) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي غير معدوم x , $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$:

f قابلة للاشتقاق على كل من المجالين $]0; +\infty[$ و $]-\infty; 0[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - \frac{1(x^2) - 2x(x-1)}{(x^2)^2} = 1 - \frac{x^2 - 2x^2 + 2x}{x^4} = 1 - \frac{-x+2}{x^3} = \frac{x^3 + x - 2}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}$$

-استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

إشارة $f'(x)$ نلخصها في الجدول التالي:

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
x	-		+	
$g(x)$	-		- ○ +	
$f'(x)$	+		- ○ +	

إن:

متزايدة تماما على كل من المجالين $]-12; \infty[$ و $]\infty; 1[$ ، و متناقصة تماما على المجال $]-12; 1[$;

112؛ ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	$-\infty$	α	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+		-	+
$f(x)$		$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$

Diagram showing a function $f(x)$ with a vertical asymptote at $x = \alpha$ and a horizontal asymptote at $y = 0$. The function approaches $+\infty$ as $x \rightarrow \alpha^-$ and $+\infty$ as $x \rightarrow \alpha^+$. The function approaches $-\infty$ as $x \rightarrow -\infty$ and $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

(3) أ) تبيان أن المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(-\frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - \frac{x-1}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{x-1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{x} = 0$$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$ وعند $+\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) :

ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$.

$$\text{لدينا: } f(x) - y = \frac{-x+1}{x^2} \text{، ومنه: إشارة الفرق من إشارة البسط } (-x+1)$$

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$-x+1$	+		+	-
$f(x) - x$	+		+	-
الوضع النسبي	(C) يقع فوق (Δ)	(C) يقع فوق (Δ)	(C) يقطع (Δ)	(C) يقع تحت (Δ)

(4) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1, 4[$:

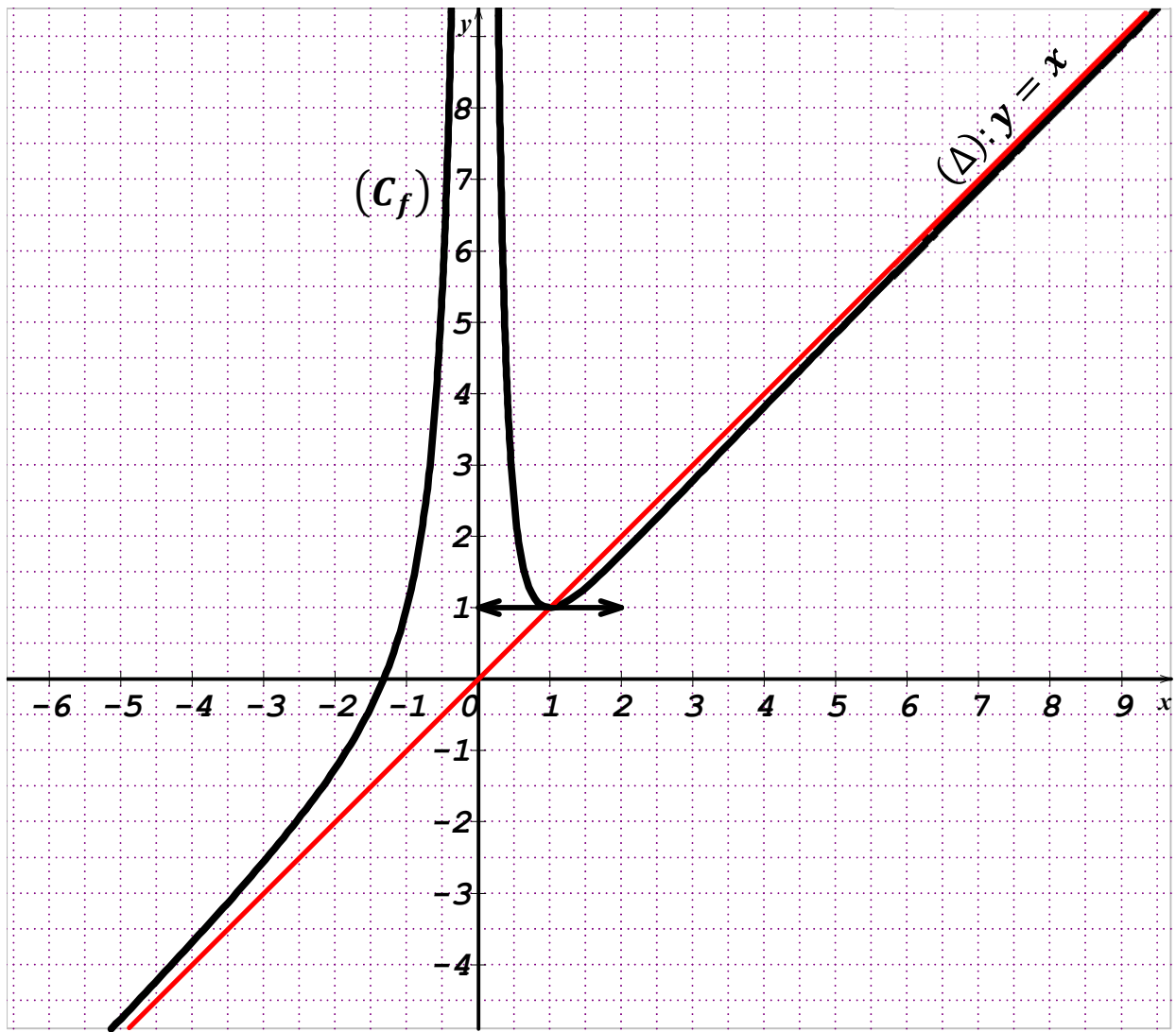
لدينا: f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1, 4[$ (لأنها متزايدة تماما على $]-\infty; 0[$)

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} f(-1,4) \simeq -0,18 \\ f(-1,3) \simeq +0,06 \end{cases} \text{ أي: } f(-1,4) \times f(-1,3) < 0$$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-1, 4[$ ،

$$\text{أي: } f(\alpha) = 0$$

(5) رسم (Δ) ثم المنحنى (C_f) :



(6) حساب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها، $y = x$ ،

$x = 1$ و $x = 3$:

$$\int_1^3 [x - f(x)] dx = \left[\frac{1}{x} + \ln x \right]_1^3 = \left(\ln 3 - \frac{2}{3} \right) u.a$$