- الدّالة f دّالة كثير حدود وبالتالي فهي مستمرة على $\mathbb{R}$ ومن ثَمَ على $[-3;-2]$.
- لدينا: $\begin{cases} f(-3) = -15 \\ f(-2) = 0 \end{cases}$، كما نلاحظ أن العدد -2 محصور بين العددين $f(-3)$ وَ $f(-2)$.

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $x^3 - 4x = -2$ تقبل على الأقل حلاً في المجال $[-3;-2]$.

④ الدّوال المستمرة والرتيبة تماما على مجال $[a;b]$:

مبرهنة:

إذا كانت f دّالة **مستمرة ورتيبة تماما** على مجال $[a;b]$ فإنّه من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ وَ $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا** في المجال $[a;b]$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدّالة f **مستمرة ورتيبة تماما** (متزايدة تماما أو متناقصة تماما) على مجال $[a;b]$ فإنّ **جدول تغيراتها** يأخذ أحد الشكلين التاليين:

x	a		x_0		b
$f(x)$	$f(a)$	↗	k	↗	$f(b)$

x	a		x_0		b
$f(x)$	$f(a)$	↘	k	↘	$f(b)$

من أجل كل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$، المعادلة $f(x) = k$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 في المجال $[a;b]$.

- **تقبل المبرهنة السابقة عدة تمديدات** في حالة دّالة f **مستمرة ورتيبة تماما** على مجال I **مفتوح** أو **مفتوح من إحدى الجهتين، محدود** أو **غير محدود**.

تذكير:

الأسهم المائلة في جدول تغيرات دّالة تترجم استمرارية ورتابة الدّالة **على المجال المعتبر**.

مثال: (● حل التمرين 01 ص58)

لتكن f دّالة **مستمرة** على المجال $]-3;+\infty[$، وجدول تغيّراتها كالآتي:

x	-3		0		2		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	-2	↗	4	↘	2

تبيان أنّ المنحنى (C_f) الممثل للدّالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين يُطلب إعطاء حصرا لفاصلتيهما:

أي: نُبين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين في المجال $]-3;+\infty[$.

⌧ f **مستمرة وَرتيبة تماما** على المجال $[-3;0]$ (لأنّها: من جدول التغيّرات **متناقصة تماما** على المجال $[-3;0]$)

ولدينا: $\begin{cases} \lim\limits_{x \to -3} f(x) = +\infty \\ f(0) = -2 \end{cases}$، أي: $0 \in [-2;+\infty[$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** x_0 في المجال $[-3;0]$؛

أي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة **وحيدة فاصلتها x_0**، حيث $-3 < x_0 < 0$.

⌧ f **مستمرة وَرتيبة تماما** على المجال $[0;2]$ (لأنّها: من جدول التغيّرات **متزايدة تماما** على المجال $[0;2]$)

ولدينا: $\begin{cases} f(0) = -2 \\ f(2) = +4 \end{cases}$، أي: $f(0) \times f(2) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ **تقبل حلا وحيدا** x_1 في المجال $[0;2]$؛

أي: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة **وحيدة فاصلتها x_1**، حيث $0 < x_1 < 2$.

⌧ لدينا: $\begin{cases} f(2) = 4 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 2 \end{cases}$، أي: $0 \notin]2;4]$

إذن: المعادلة $f(x) = 0$ **لا تقبل حلول** في المجال $]2;+\infty[$؛

أي: (C_f) لا يقطع حامل محور الفواصل في المجال $]2;+\infty[$.

الخلاصة:

المنحنى (C_f) الممثل للدّالة f يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين فاصلتيهما $-3 < x_0 < 0$ وَ $0 < x_1 < 2$.

تمارين: 56؛ 57؛ 58؛ 60؛ 61؛ 64 ص30-31.

❹ المشتقات والعمليات -مشتقة الدّالة مركب:

① مشتقات دّوال مألوفة:

$f(x) =$	$f'(x) =$	مجالات قابلية الاشتقاق
k $(k \in \mathbb{R})$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^n $(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$
$\frac{1}{x^n}$ $(n \in \mathbb{N}$ و $n \geq 2)$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$]-\infty;0[$ وَ $]0;+\infty[$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$cosx$	$-sinx$	$\mathbb{R}$
$sinx$	$cosx$	$\mathbb{R}$

② المشتقات والعمليات على الدّوال:

النتائج ملخصة في الجدول التالي:

u و v دالّتان **قابلتان للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و k عدد حقيقي.

الشروط	الدّالة المشتقة	العملية
	$u'+v'$	مجموع دالّتين $u+v$
	ku'	جداء دالّة بعدد حقيقي ku
	$u'.v+v'u$	جداء دالّتين $u.v$
الدّالة u **لا تنعدم** على I	$-\frac{u'}{u^2}$	مقلوب دالّة $\frac{1}{u}$
الدّالة v **لا تنعدم** على I	$\frac{u'.v-v'.u}{v^2}$	حاصل قسمة دالّتين $\frac{u}{v}$

نتائج:

- الدّوال **كثيرات الحدود قابلة للاشتقاق** على $\mathbb{R}$.
- الدّوال **الناطقة قابلة للاشتقاق** على **كل مجال محتوى في مجموعة تعريفها**.

مثال: ● حل التمرين 13 ص59)

③ الاشتقاقية والاستمرارية:

خاصية:

إذا كانت f **قابلة للاشتقاق** على مجال I، فإنّها **مستمرة** على هذا المجال **وعكس هذه الخاصية ليس صحيح.**

مثال: ● حل التمرين 02 ص58)

الدّالة $x \mapsto |x|$ مستمرة عند 0؛

بينما النسبة $\frac{|h|}{h}$ **لا تقبل نهاية** عند 0 لأن:

$$\lim_{h\to 0^>}\frac{|h|}{h}=-1 \text{ و } \lim_{h\to 0^<}\frac{|h|}{h}=-1$$

ومنه: الدّالة $x \mapsto |x|$ **غير قابلة للاشتقاق** عند 0.

④ اشتقاق دالّة مركبة:

أ. مشتقة الدّالة $v\circ u$:

مبرهنة (تقبل دون برهان):

إذا قبلت الدّالة u الاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$ وقبلت الدّالة v الاشتقاق على $u(I)$، فإنّ الدّالة $v\circ u$ تقبل الاشتقاق على I ولدينا من أجل كل x من I:

$$(v\circ u)'(x)=v'[u(x)]\times u'(x)$$

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(2x^2+x)^4$

نلاحظ أنّ $f=v\circ u$، حيث $u:x\mapsto 2x^2+x$

و $v:x\mapsto x^4$

ومنه:

$$\begin{aligned}f'(x)&=v'[u(x)]\times u'(x)\\&=v'(2x^2+x)\times u'(x)\\&=4(2x^2+x)^3\times(4x+1)\end{aligned}$$

ب. تطبيقات:

مشتقة الدّالة $x\mapsto u(ax+b)$ $(a\neq 0)$:

مبرهنة:

a و b عددان حقيقيان مع $a\neq 0$.

u دالّة قابلة للاشتقاق على مجال I من $\mathbb{R}$.

ليكن J المجال المُكون من الأعداد الحقيقية x حيث $ax+b$ ينتمي إلى I.

الدّالة $f:x\mapsto u(ax+b)$ قابلة للاشتقاق على J ولدينا:

$$f'(x)=au'(ax+b)$$

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\cos(2x-3)$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=-2\sin(2x-3)$$

مشتقة الدّالة $x\mapsto \sqrt{u(x)}$:

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$، وكانت **موجبة تماما** على I، فإنّ الدّالة $\sqrt{u}$ **تقبل الاشتقاق** على I ولدينا:

$$(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

مثال: ● حل التمرين 37 ص61)

● f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+3}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+3}}$$

مشتقة الدّالة $x\mapsto [u(x)]^n$ (n **عدد طبيعي يحقق** $n\geq 2$):

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$، فإنّ الدّالة u^n **تقبل الاشتقاق** على I ولدينا:

$$(u^n)'=nu'u^{n-1}$$

مثال: ● حل التمرين 34 ص61)

● f دالّة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(x^2+2x-3)^3$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x)=3(2x+2)(x^2+2x-3)^2$$

مشتقة الدّالة $x \mapsto \frac{1}{[u(x)]^n}$ (n عدد طبيعي يحقق $n \geq 1$)

مبرهنة:

إذا كانت الدّالة u **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$ و**لا تنعدم** على I، فإنّ الدّالة $\frac{1}{u^n}$ **تقبل الاشتقاق** على I ولدينا:

$$\left(\frac{1}{u^n}\right)' = -\frac{nu'}{u^{n+1}}$$

مثال:

● لتكن f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = \frac{1}{(x^2+3)^8}$.

حساب الدّالة المشتقة:

f دالّة معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$، ولدينا:

$$f'(x) = -\frac{8(2x)}{(x^2+3)^9}$$

تمارين: 40؛ 78 ص61-66.

❺ اتجاه تغيّر دّالة -القيم الحدية:

① المشتقة واتجاه التغير:

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دّالة **قابلة للاشتقاق** على مجال I من $\mathbb{R}$.

- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) > 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدّالة f من أجلها، فإنّ الدّالة f **متزايدة تماما** على I.
- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) < 0$ ما عدا ممكن من أجل عدد محدود من القيم التي تنعدم الدّالة f من أجلها، فإنّ الدّالة f **متناقصة تماما** على I.
- إذا كان من أجل كل x من I، $f'(x) = 0$، فإنّ الدّالة f **ثابتة** على I.

مثال:

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x^3$

f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $f'(x) = 3x^2$

و منه من إجل كل x من $\mathbb{R}^+$: $f'(x) > 0$ و $f'(0) = 0$

إذن : f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

② القيم الحدية المحلية:

تعاريف:

f دّالة معرّفة على مجال I من $\mathbb{R}$ وَ x_0 عدد حقيقي من I.

- القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية عظمى** للدّالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \leq f(x_0)$.
- القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية صغرى** للدّالة f يعني أنه يوجد مجال مفتوح J محتوى في I ويشمل x_0 بحيث من أجل كل x من J، $f(x) \geq f(x_0)$.
- القول أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية** لـf يعني أنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية عظمى أو صغرى**.

مبرهنة: (تقبل دون برهان)

f دّالة معرّفة و**قابلة للاشتقاق** على مجال مفتوح I من $\mathbb{R}$ و x_0 عدد حقيقي من I.

- إذا **انعدمت الدّالة المشتقة** f' عند x_0 **مُغيرة إشارتها** فإنّ $f(x_0)$ **قيمة حدية محلية** للدّالة f.

ملاحظات:

☑ النقطة $A(x_0; f(x_0))$ تسمى **نقطة حدية (الذروة) والمماس** عند هذه النقطة **يكون مُواز لحامل محور الفواصل** معادلته هي: $y = f(x_0)$.

☑ إذا قبلت f **قيمة حدية محلية** عند x_0 فإنّ $f'(x) = 0$.

مثال: (● حل التمرين 28 ص60)

f الدّالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = 2x^3 + 12x^2 + 1$.

دراسة التغيرات:

النهايات: $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} 2x^3 = -\infty$.

الدالة المشتقة: f معرّفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا:

$f'(x) = 6x^2 + 24x$.

x	$+\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

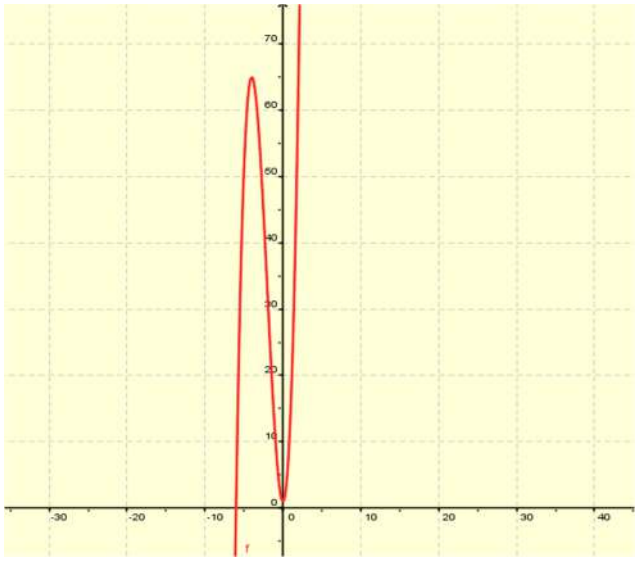
إذن: f **متزايدة تماما** على كل من المجالين $]-\infty; 4]$ وَ $[0; +\infty[$، و**متناقصة تماما** على المجال $[-4; 0]$.

جدول التغيرات:

x	$+\infty$		-4		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		↗	65	↘	1	↗	$+\infty$
	$-\infty$						

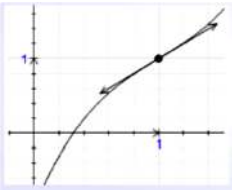
$f(-4) = 65$ **قيمة حدية محلية عظمى** للدّالة f،

وَ $f(0) = 1$ **قيمة حدية محلية صغرى** للدّالة f.



③ نقطة انعطاف منحنى:

تعريف:



نقطة الإنعطاف هي النقطة التي يخترق فيها المماس المنحنى البياني .

مبرهنة:

f دالّة معرّفة و**قابلة للاشتقاق** مرتين على مجال مفتوح يشمل x_0.

إذا **انعدمت الدّالة المشتقة الثانية** f'' عند x_0 **مُغيرة إشارتها** فإنّ النقطة التي إحداثييها $(x_0; f(x_0))$ تسمى **نقطة انعطاف** لمنحنى الدّالة f.

ملاحظة :

إذا انعدمت f' عند x_0 و لا تغير من إشارتها بجوار x_0 فإن النقطة التي إحداثياتها $(x_0; f(x_0))$ تسمى : نقطة إنعطاف لمنحنى الدالة f .

مثلا : الدالة $x \mapsto x^3$ مشتقتها الأولى تنعدم و لا تغير إشارتها بجوار $x_0 = 0$.

تمارين: 67؛ 70 ص64-65.

⑥ التقريب التآلفي -طريقة أولر:

① التقريب التآلفي:

خاصية:

f دالّة معرّفة على مجال مفتوح I.

إذا قبلت f **الاشتقاق** عند x من I، فإنّه توجد دالّة ε بحيث من أجل كل عدد حقيقي h حيث $x+h$ ينتمي إلى I

لدينا:

$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + h\varepsilon(h)$ مع $\lim\limits_{h\to 0} \varepsilon(h) = 0$.

من أجل h قريب من 0 نكتب عندئذ:

$$\boxed{f(x+h) \simeq f(x) + hf'(x)}$$

يسمى $f(x) + hf'(x)$ **التقريب التآلفي** لـِ$f(x+h)$ من أجل h قريب من 0، المُرفق بالدّالة f.

② طريقة أولر:

الهدف:

إنشاء **تمثيلات بيانية تقريبية** لدّالة f.

المعطيات:

f' معرّفة وَ$y_0 = f(x_0)$. من أجل h قريب من 0 لدينا:

$f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$.

انطلاقا من $A_0(x_0; y_0)$ بحيث $f'(x_0) \neq 0$ نُنشئ $A_1(x_1; y_1)$ ذات الفاصلة $x_1 = x_0 + h$ والتي تنتمي إلى المستقيم الذي معامل توجيهه $f'(x_0)$ والمار من A_0

وبالتالي: $y_1 = f(x_0) + hf'(x_0)$.

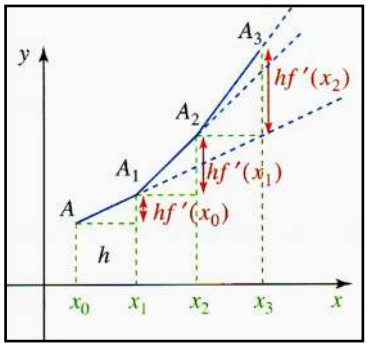
وبما أنّ: $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$

من أجل h قريب من 0 فإن A_1 قريبة من (C_f).

بنفس الطريقة نُنشئ $A_2(x_1 + h; f(x_1) + hf'(x_1))$، انطلاقا من A_1.

وهكذا على التوالي يمكن إنشاء النقط $A_n(x_n; y_n)$ حيث $x_n = x_{n-1} + h$ وَ $y_n = f(x_{n-1}) + hf'(x_{n-1})$ مع $n \geq 1$.

بربط النقط A_0، A_1، A_2، ... نحصل على تمثيل بياني تقريبي لـِf مرتبط باختيار h الذي يسمى **الخطوة**. ونحصل **على أكثر دقة** كلما كان h أقرب إلى 0.



مثال 01: (● حل التمرين 41 ص61)

تبرير التقريب التآلفي عند 0:

1)لدينا: $f(x) = (1+x)^3$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $(1+h)^3 \simeq (1+0)^3 + h(3(1+0)^2)$

إذن: $(1+h)^3 \simeq 1 + 3h$.

2)لدينا: $f(x) = \sqrt{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\sqrt{1+h} \simeq \sqrt{1+0} + h\left(\frac{1}{2\sqrt{1+0}}\right)$

إذن: $\sqrt{1+h} \simeq 1 + \frac{h}{2}$.

3)لدينا: $f(x) = \frac{1}{1+x}$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\frac{1}{1+h} \simeq \frac{1}{1+0} + h\left(-\frac{1}{(1+h)^2}\right)$

إذن: $\frac{1}{1+h} \simeq 1 - h$.

4)لدينا: $f(x) = \sin x$

التقريب التآلفي $f(0+h) \simeq f(0) + hf'(0)$

ومنه: $\sin x \simeq \sin 0 + h(\cos 0)$

إذن: $\sin x \simeq h$.

مثال 02: (● تمرين مقترح من طرف الأستاذ)

لتكن f دّالة تحقق $f(1) = 0$ ومن أجل كل x من $]0; +\infty[$، $f'(x) = \frac{1}{x}$.

- باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0{,}01$ شكّل جدولا يتضمن القيم التقريبية لـِ$f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[0; 5]$، ثم أنشئ تمثيلا تقريبيا للدّالة f.

يتبع -