الأستاذ رمزي مانع

مراجعة

محور الدوال

I. ملخص و خصائص الدوال الأسية و اللوغارتمية:

الدالة الأسية: (e^x)

1– مجال التعريف: الدالة الأسية معرفة على R

إذا كانت الدالة f معرفة بـ: $f(x) = e^{u(x)}$ فان: $D_f = D_u$

2– مشتقة الدالة الأسية: الدالة الأسية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و دالتها المشتقة هي:

- $(e^x)' = e^x$
- $(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$

3– إشارتها: الدالة الأسية موجبة تماما على مجال تعريفها $(e^{u(x)} > 0)$

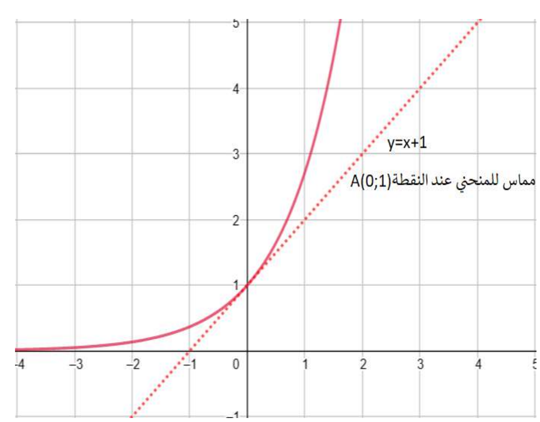
4– خواص:

- $e^{a+b} = e^a \times e^b$
- $e^{a\times b} = (e^a)^b$
- $e^{\frac{a}{2}} = \sqrt{e^a}$
- $e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$
- $e^a = \frac{1}{e^{-a}}$
- $e^{ln(a)} = a$
- $|e^x| = e^x$
- $e^0 = 1$

5– النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x\,e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\,e^x = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

6– منحني الدالة e^x: في المعلم المتعامد و المتجانس



الدالة اللوغارتمية: $(ln(x))$

1– مجال التعريف: الدالة اللوغارتمية معرفة على $]0,+\infty[$

اذا كانت الدالة f معرفة بـ: $f(x) = ln(u(x))$ فان:

$$D_f = \{x / u(x) > 0\}$$

2– مشتقة الدالة اللوغارتمية: الدالة اللوغارتمية قابلة للاشتقاق على مجال تعريفها و دالتها المشتقة هي:

- $(ln(x))' = \frac{1}{x}$
- $(ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$

3– اشارتها:

x	0		1		$+\infty$
$ln(x)$	‖	$-$	0	$+$	

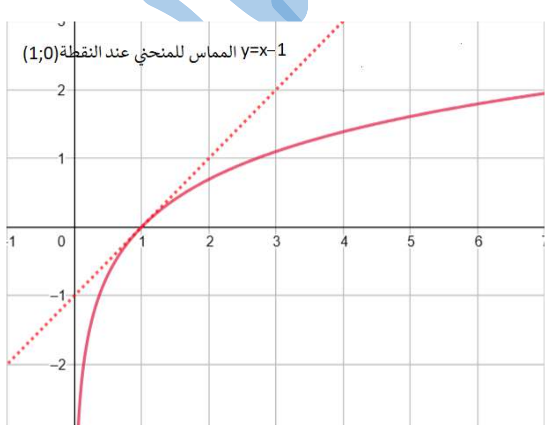
4– خواص:

- $ln(a\times b) = ln(a) + ln(b)$
- $ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln(a) - ln(b)$
- $ln\left(\frac{1}{a}\right) = -ln(a)$
- $ln(x^n) = n \times ln|x|$
- $\frac{1}{2}ln(a) = ln(\sqrt{a})$
- $ln(e^a) = a$
- $ln(e) = 1$
- $ln(1) = 0$

5– النهايات:

- $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x^n} = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x\,ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} x^n\,ln(x) = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^n}{ln(x)} = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to 0} \frac{ln(x+1)}{x} = 1$

6– منحني الدالة $ln(x)$: في المعلم المتعامد و المتجانس



II. ملخص الدوال الاصلية و التكامل:

الدوال الأصلية:

➢ **تعريف:**

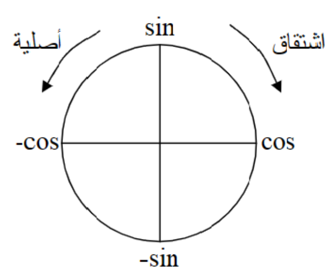
f دالة عددية معرفة على I ,نقول أن F دالة أصلية للدالة f إذا وفقط إذاكانت F قابلة للاشتقاق على I ونكتب: $F'(x) = f(x)$

➢ **مبرهنة:**

الدالة f تقبل دالة أصلية F على المجال I إذا وفقط إذاكانت f مستمرة على I

➢ **الدوال الأصلية لدوال مألوفة :**

الدالة f	الدالة الأصلية	ملاحظات
k	$kx + c$	$k, c \in \mathbb{R}$
x	$\frac{1}{2}x^2 + c$	$x \in \mathbb{R}$
x^n	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + c$	$n \in \mathbb{N}^*$ $x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + c$	$x \in \mathbb{R}^*$ $n \geq 2$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x} + c$	$x \in \mathbb{R}_+^*$
$\sin x$	$-\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
$\cos x$	$\sin x$	$x \in \mathbb{R}$
e^x	$e^x + c$	$x \in \mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + c$	$]0; +\infty[$



➢ **أمثلة:**

- $\int 2\, dx = 2x + c$
- $\int 3x\, dx = 3\int x\, dx = 3\frac{1}{2}x^2 + c = \frac{3}{2}x^2 + c$
- $\int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c$
- $\int \frac{1}{x^3} dx = \int x^{-3} dx = \frac{-1}{2x^2} + c$
- $\int 2\sin(2x) dx = -\cos(2x) + c$
- $\int \frac{3}{2\sqrt{x}} dx = 3\int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = 3\sqrt{x} + c$

➢ **العمليات على الدوال الأصلية:**

الدالة f	الدالة الأصلية	على المجال
$u + v$	$U + V$	I
λu	λU	I
$u'u$	$\frac{1}{2}u^2 + c$	I
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + c$	I
$\frac{u'}{u}$	$\ln u + c$	$x \in I / u(x) > 0$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{u^n}$	$-\frac{1}{(n-1)u^{n-1}} + c$	$x \in I, u(x) \neq 0$ $n \geq 2$
$u'e^u$	e^u	I
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + c$	$x \in I / u(x) > 0$

➢ **أمثلة:**

- $\int x + 1dx = \int xdx + \int 1dx = \frac{1}{2}x^2 + x + c$
- $\int 2(2x+1)^2 dx = \frac{1}{3}(2x+1)^3 + c$
- $\int \frac{3}{(3x+2)^2} dx = -\frac{1}{3x+2} + c$
- $\int \frac{1}{x+4} dx = ln(x+4) + c$
- $\int 2xe^{x^2} dx = e^{x^2} + c$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2+1} + c$

الحساب التكاملي:

➢ **تعريف:**

لتكن الدالة f مستمرة على المجال $[a; b]$ و F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a; b]$, يسمى العدد الحقيقي $F(b) - F(a)$ التكامل من a الى b لـ $f(x)$ ونرمز له بالرمز: $\int_a^b f(x)dx$ و نكتب:

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

مثال:

$$\int_1^2 2xdx = [x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 4 - 1 = 3$$

➢ خواص التكامل:

➢ إذا كان $f(x) \geq 0$ على $[a;]$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

1. إذا كان $\boldsymbol{f(x) \leq g(x)}$ على $[a;b]$ فإن:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

2. إذا كانت f دالة زوجية ومستمرة على $[-a;a]$ فإن:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$$

3. إذا كانت f دالة فردية ومستمرة على $[-a;a]$ فإن:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

4. إذا كانت f مستمرة مجال I حيث $a \in I$ فإن:

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

5. علاقة شال:

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$$

6. خاصية التناظر:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

7. خاصية الخطية: α و β اعداد حقيقية

$$\int_a^b \alpha f(x) + \beta g(x)dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx$$

8. القيمة المتوسطة لدالة على مجال $[a;b]$:

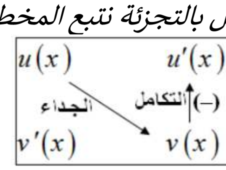
$$m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

➢ المكاملة بالتجزئة:

U و V دالتين قابلتين للاشتقاق على I , U' و V' مشتقاتهما على الترتيب مستمرتين على I, من اجل a و b من I حيث $a < b$ فان:

$$\int_a^b \boldsymbol{U(x)V'(x)dx} = [\boldsymbol{U(x)V(x)}]_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}} - \int_a^b \boldsymbol{U'(x)V(x)dx}$$

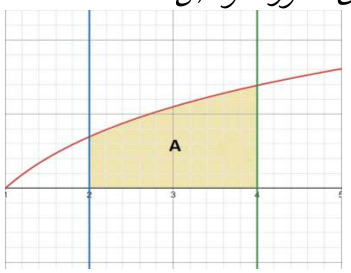
طريقه: لاستعمال التكامل بالتجزئة نتبع المخطط



حساب المساحات:

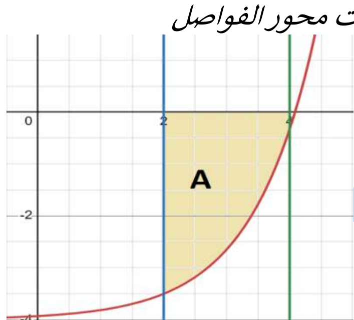
نرمز بـ A إلى مساحة حيز من المستوي محدد بالمنحنى (cf)و محور الفواصل و المستقيمين ذو المعادلتين $x = a$ و $x = b$ لحساب المساحة A نميز حالتين:

➢ إذا كان $f(x) \geq 0$ على المجال $[a;b]$ اي (cf) فوق محور الفواصل



$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x)dx}$$

➢ إذا كان $f(x) \leq 0$ على المجال $[a;b]$ اي (cf) تحت محور الفواصل



$$\boldsymbol{A = -\int_a^b f(x)dx}$$

➢ مساحة حيز محدودة بمنحنيين:

نرمز بـ A إلى مساحة حيز من المستوي محدد بالمنحنى (cf)و (cg) و المستقيمين ذو المعادلتين $x = a$ و $x = b$ لحساب المساحة A نميز حالتين:

إذا كان $f(x) \geq g(x)$ على المجال $[a;b]$ اي (cf) فوق (cg) و نكتب:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b f(x) - g(x)dx}$$

إذا كان $f(x) \leq g(x)$ على المجال $[a;b]$ اي (cf) تحت (cg) و نكتب:

$$\boldsymbol{A = \int_a^b g(x) - f(x)dx}$$

III. الاسئلة الشائعة وكيفية الاجابة عنها:

المستقيمات المقاربة:

السؤال	الجواب
$\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب عمودي موازي لحامل محور التراتيب معادلته $x=a$
$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب افقي موازي لحامل محور الفواصل معادلته $y=a$
$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$ فسر النتيجة بيانيا؟	(cf) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y=ax+b$
بين ان المستقيم $(\Delta): y=ax+b$ مقارب مائل لـ(cf)	نبين ان $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-(ax+b)]=0$
بين ان (cf) يقبل مستقيم مقارب مائل يطلب تعيين معادله؟	**طريقة 1:** نكتب f على الشكل: $f(x)=ax+b+h(x)$ بحيث $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$ ومنه (cf) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y=ax+b$ **طريقة 2:** نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=a$ ثم نحسب $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$ ومنه ( ) يقبل مستقيم مقارب مائل عند ∞ معادلته $y=ax+b$
ادرس الوضع النسبي للمنحنى (cf) و المستقيم $(\Delta): y=ax+b$	ندرس اشارة الفرق $f(x)-y$ اذاكان $f(x)-y>0$ فان (cf) يقع فوق (Δ) اذاكان $f(x)-y<0$ فان (cf) يقع تحت (Δ) اذاكان $f(x)-y=0$ فان (Δ) يقطع (cf)

مبرهنة القيم المتوسطة:

4

السؤال	الجواب
بين ان المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $a<\alpha<b$	f مستمرة و رتيبة (متزايدة تماما او متناقصة تماما على المجال $[a;b]$ و التحقق من: $f(a)\times f(b)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فان المعادلة $f(x)=0$ تقبل وحيدا α بحيث: $f(\alpha)=0$

المماسات:

السؤال	الجواب
اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (cf) عند النقطة ذات الفاصلة x_0 (بصيغة أخرى عند النقطة $A(x_0;y_0)$)	لدنيا معادلة المماس تكتب من الشكل: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$ نحسب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ ثم نعوضهما في العبارة
اكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (cf) عند النقطة ذات الترتيبة y_0	اولا نحل المعادلة $f(x)=y_0$ نجد قيمة x_0 ثم نحسب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ و نعوضهما في العبارة: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس (T) يوازي المستقيم (Δ) ذو المعادلة $(\Delta): y=ax+b$ يطلب تعيين معادلته بصيغة اخرى: بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس (T) معامل توجيهه يساوي a يطلب تعيين معادلته	$(T)//(\Delta)$ معناه ان لهما نفس معامل التوجيه اي $f'(x_0)=a$ نحل المعادلة لنجد قيمة x_0 ثم نحسب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ و نعوضهما في العبارة: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$
بين ان المنحنى (cf) يقبل مماس او اكثر يشمل النقطة $A(\alpha;\beta)$	نحل المعادلة $\beta=f'(x_0)(\alpha-x_0)+f(x_0)$ نجد قيمة x_0 ثم نحسب $f'(x_0)$ و $f(x_0)$ و نعوضهما في العبارة: $(T): y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0$

➢ التناظر:

الجواب	السؤال
يكفي تبيان: $f(-x)=f(x)$	بين ان الدالة f زوجية
يكفي تبيان: $f(-x)=-f(x)$	بين ان الدالة f فردية
يكفي تبيان: $f(2a-x)=f(x)$	بين ان $x=a$ محور تناظر للمنحنى (cf)
يكفي تبيان: $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$	بين ان النقطة $A(\alpha;\beta)$ مركز تناظر للمنحنى (cf)
$h(-x)=f(\lvert -x\rvert)=f(\lvert x\rvert)=h(x)$ ومنه الدالة h زوجية	بين ان الدالة h زوجية حيث: $h(x)=f(\lvert x\rvert)$

➢ النقاط الخاصة:

الجواب	السؤال
➢ اذا انعدمت المشتقة الثانية عند α وغيرة اشارة اشارتها فان $w(\alpha\,;f(\alpha))$ نقطة انعطاف للمنحنى (cf) **(شرط لازم)** ➢ اذا انعدمت المشتقة الاولى عند α و لم غيرة اشارة اشارتها فان $w(\alpha\,;f(\alpha))$ نقطة انعطاف للمنحنى (cf) **(شرط كافي)**	بين ان المنحنى (cf) يقبل نقطة انعطاف w يطلب تعيينها
نحل المعادلة $f(x)=0$ حيث حلول المعادلة هي فواصل نقاط التقاطع	عين نقاط تقاطع المنحنى (cf) مع محور الفواصل
نضع $x=0$ حيث نقطة التقاطع هي $(0\,;f(0))$	عين نقطة تقاطع المنحنى (cf) مع محور التراتيب

➢ استنتاج منحنى دالة انطلاقا من منحنى دالة اخرى:

الجواب	السؤال
(ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور الفواصل	استنتج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x)=-f(x)$
(ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور التراتيب	استنتج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x)=f(-x)$
(ch) نظير (cf) بالنسبة للمبدأ O	استنتج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x)=-f(-x)$
$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{لما } f(x)\geq 0 \\ -f(x) & \text{لما } f(x)<0 \end{cases}$ (ch) منطبق على (cf) لما يكون (cf) فوق محور الفواصل و (ch) نظير (cf) بالنسبة لمحور الفواصل لما يكون (cf) تحت محور الفواصل	اكتب الدالة h دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x)=\lvert f(x)\rvert$
$h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{لما } x\geq 0 \\ f(-x) & \text{لما } x<0 \end{cases}$ (ch) منطبق على (cf) على المجال $[0;+\infty[$ و نناظره بالنسبة لمحور التراتيب لان الدالة h زوجية	اكتب الدالة h دون رمز القيمة المطلقة ثم استنتج (ch) منحنى الدالة h انطلاقا من (cf) منحنى الدالة f حيث: $h(x)=f(\lvert x\rvert)$