

مجلة العبقري في الرياضيات (الدّوال الأسية)

الدروس // الشعبة: الثالثة علوم تجريبية؛ تقني رياضي.

دروس: حول الدّوال الأسية // التحضير الجيد للباكوريا // الشعبة: 03 ع؛ تر.

① الدّوال الأسية:

① النشاط 01 ص 76:

مقدمة:

تتم نمذجة العديد من الظواهر الفيزيائية والبيولوجية والاقتصادية وغيرها باستخدام دالة f متناسبة مع دالتها المشتقة f' . سوف نهتم هنا بدالة من هذا النوع وهي دالة تساوي دالتها المشتقة.

فرضية:

نقبل أنه توجد دالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ وتُحقق الشرطين التاليين:

$$(1) \quad f' = f \quad \text{و} \quad (2) \quad f(0) = 1$$

① باستعمال طريقة أولر وباختيار خطوة $h = 0,005$ أنجز جدولاً يتضمن القيم التقريبية لـ $f(x)$ من أجل x ينتمي إلى $[-3; 3]$ ، ثم أنشئ تمثيلاً تقريبياً للدالة f .

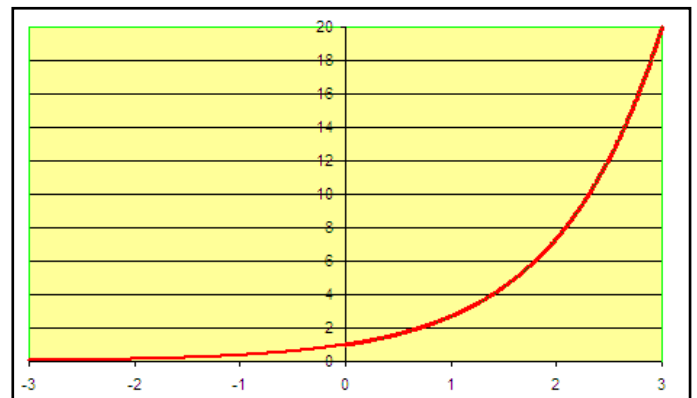
✗ نذكر أن: $f(x_0 + h) \simeq f(x_0) + hf'(x_0)$

وبما أن: $f' = f$ ، فإن: $f(x_0 + h) \simeq f(x_0)(1 + h)$

✗ لدينا كذلك: $f(x_0 - h) \simeq f(x_0) - hf'(x_0)$

وبما أن: $f' = f$ ، فإن: $f(x_0 - h) \simeq f(x_0)(1 - h)$

h	x	f(x-h)=f(x)*(1-h)	x	f(x+h)=f(x)*(1+h)
0.005	0	1	0	1
	-0.01	0.995	0.01	1.005
	-0.01	0.990025	0.01	1.010025
	-0.02	0.980149501	0.02	1.015075125
	-0.02	0.980149501	0.02	1.020150501
	-0.03	0.975248753	0.03	1.025251253
	-0.03	0.970372509	0.03	1.030377509
	-0.04	0.965520647	0.04	1.035529397
	-0.04	0.960693044	0.04	1.040707044
	-0.05	0.955889578	0.05	1.045910579
	-0.05	0.95111013	0.05	1.051140132
	-0.06	0.94635458	0.06	1.056395833
	-0.06	0.941622807	0.06	1.061677812
	-0.07	0.936914693	0.07	1.066986201



② نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$h(x) = f(x) \times f(-x)$$

● بين أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

● استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \times f(-x) = 1$ (3)

● برهن بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$ (4)

③ نفرض أنه توجد دالة ثانية g تُحقق

$$g' = g \quad \text{و} \quad g(0) = 1$$

بما أن الدالة f لا تنعدم على $\mathbb{R}$ ، نعتبر الدالة k المعرفة

$$k(x) = \frac{g(x)}{f(x)} \quad \text{على } \mathbb{R} \text{ بـ:}$$

● بين أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$.

● استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x)$.

④ ليكن y عدد حقيقي كفي ثابت. نعتبر الدالة i المعرفة

$$i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)} \quad \text{على } \mathbb{R} \text{ بـ:}$$

● بين أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ وأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$i(x) = f(y)$$

● استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$(5) \quad f(x+y) = f(x) \times f(y)$$

● استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،

$$(6) \quad f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$$

⑤ ليكن n عدداً صحيحاً نسبياً ولتكن j الدالة المعرفة

$$j(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]^n} \quad \text{على } \mathbb{R} \text{ بـ:}$$

● عيّن الدالة المشتقة للدالة j .

● استنتج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$$(7) \quad f(nx) = [f(x)]^n$$

تعريف:

تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث

$$f' = f \quad \text{و} \quad f(0) = 1 \quad \text{الدالة الأسية (النيبيرية).}$$

ونرمز إليها بالرمز "exp".

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \exp(x)$.

⑥ أكتب باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)،

...، (7).

مناقشة النشاط 01 ص 76:

إثبات خوارزمية f:

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث: $f' = f$ و $f(0) = 1$

② لدينا: h دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = f(x) \times f(-x)$

● تبيان أن h دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ ، واستنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \times f(-x) = 1$ (3):

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،
 $h'(x) = f'(x) \times f(-x) - f'(-x) \times f(x)$
 وبما أن: $f'(x) = f(x)$

إذن: $h'(x) = f(x) \times f(-x) - f(x) \times f(-x)$
 أي: $h'(x) = 0$
 وهذا يعني أن: h دالة ثابتة.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $h(x) = h(0)$ ،
 إذن: $h(x) = h(0) = f(0) \times f(-0) = 1$
 وبالتالي: $f(x) \times f(-x) = 1$

أي: $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$

● البرهان بالخلف أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) \neq 0$ (4):
 نفرض أنه يوجد عدد حقيقي x حيث: $f(x) = 0$
 $f(x) = 0$ معناه: $h(x) = 0$ (وهذا تناقض)

لأن: $h(x) = 1$
 ومنه: $f(x) \neq 0$

(3) بفرض أنه توجد دالة ثانية g تحقق
 $g'(x) = g(x)$ و $g(0) = 1$
 بما أن الدالة f لا تتعدم على $\mathbb{R}$ ، نعتبر الدالة k المعرفة

على $\mathbb{R}$ بـ: $k(x) = \frac{g(x)}{f(x)}$

● تبيان أن k دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،

$k'(x) = \frac{g'(x) \times f(x) - f'(x) \times g(x)}{[f(x)]^2}$

أي: $k'(x) = \frac{g(x) \times f(x) - f(x) \times g(x)}{[f(x)]^2}$

ومنه: $k'(x) = 0$
 وبالتالي: k دالة ثابتة.

● استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g(x) = f(x)$:

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $k(x) = k(0) = \frac{g(0)}{f(0)} = 1$

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $\frac{g(x)}{f(x)} = 1$

أي: $f(x) = g(x)$

(4) y عدد حقيقي كفي ثابت. i دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

● تبيان أن i دالة ثابتة على $\mathbb{R}$ وأنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،
 $i(x) = f(y)$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،
 $i'(x) = \frac{f'(x+y) \times f(x) - f'(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2}$

ومنه: $i'(x) = \frac{f(x+y) \times f(x) - f(x) \times f(x+y)}{[f(x)]^2} = 0$
 إذن: i دالة ثابتة.

ولدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x) = i(0)$
 إذن: $i(x) = i(0) = \frac{f(y)}{f(0)} = f(y)$

ومنه: $i(x) = f(y)$

● استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،
 $f(x+y) = f(x) \times f(y)$ (5):

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $i(x) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

أي: $f(y) = \frac{f(x+y)}{f(x)}$

ومنه: $f(x+y) = f(x) \times f(y)$

● استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ومن أجل كل y من $\mathbb{R}$ ،
 $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$ (6):

لدينا: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،
 $f(x-y) = f(x) \times f(-y)$

وبما أن: $f(-y) = \frac{1}{f(y)}$

إذن: $f(x-y) = f(x) \times \frac{1}{f(y)}$

ومنه: $f(x-y) = \frac{f(x)}{f(y)}$

(5) n عدداً صحيحاً نسبياً و j دالة معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:
 $j(x) = \frac{f(nx)}{[f(x)]^n}$

● تعيين الدالة المشتقة للدالة j ، استنتاج أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ،
 $j'(x) = \frac{nf'(nx) \times [f(x)]^n - nf'(x) \times [f(x)]^{n-1} \times f(nx)}{([f(x)]^n)^2}$

ومنه:

$j'(x) = \frac{nf(nx) \times [f(x)]^n - nf(x) \times [f(x)]^{n-1} \times f(nx)}{[f(x)]^{2n}}$

وعليه:

$j'(x) = \frac{nf(nx) \times [f(x)]^n - n[f(x)]^n \times f(nx)}{[f(x)]^{2n}} = 0$

إذن: j دالة ثابتة.

ومنه: من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $j(x) = j(0) = \frac{f(n \times 0)}{[f(0)]^n} = 1$

والتالي: $\frac{f(nx)}{[f(x)]^n} = 1$

أي: $f(nx) = [f(x)]^n$

تعريف:

تسمى الدالة الوحيدة f القابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث
 $f'(x) = f(x)$ و $f(0) = 1$ الدالة الأسية (النيبيرية).
 ونرمز إليها بالرمز "exp".
 من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f(x) = \exp(x)$

(6) كتابة باستعمال الترميز السابق كل النتائج (1)، (2)،
، (7):

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sqrt{x}} \quad (4) & f(x) &= e^{\frac{1}{x}} \quad (3) \\ f(x) &= e^x - e^{-x} \quad (6) & f(x) &= \frac{1}{xe^x} \quad (5) \end{aligned}$$

● حل التمرين 01 ص 102

مجموعة التعريف:

$$\mathbb{R} (1, \mathbb{R} (2, \mathbb{R}^* (3, \mathbb{R}_+ (4, \mathbb{R}^* (5, \mathbb{R} (6$$

● (التمرين 02 ص 102:

بسط العبارات التالية:

$$\begin{aligned} (1) & (e^x)^3 \times e^{-5x} \\ (2) & \frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} \\ (3) & \frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} \end{aligned}$$

● حل التمرين 02 ص 102

تبسيط العبارات:

$$(e^x)^3 \times e^{-5x} = e^{3x} \times e^{-5x} = e^{3x-5x} = e^{-2x} \quad (1)$$

$$\frac{e^{2x+3}}{e^{-2x}} = e^{(2x+3)-(-2x)} = e^{4x+3} \quad (2)$$

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{e^x}{e^{2x}} + \frac{e^{-x}}{e^{2x}} = \frac{1}{e^x} + e^{(-x)-(2x)} = e^{-x} + e^{-3x} \quad (3)$$

● (التمرين 03 ص 102:

بين من أجل كل عدد حقيقي x ما يلي:

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (2) \quad \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (1)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4) \quad (e^x + e^{-x})^2 = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} \quad (3)$$

● حل التمرين 03 ص 102

$$\frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^{2x}}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^{2x}}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (1)$$

$$e^{-x} - e^{-2x} = \frac{1}{e^x} - \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^x - 1}{e^{2x}} \quad (2)$$

$$(e^x + e^{-x})^2 = e^{2x} + 2e^x e^{-x} + e^{-2x} = \frac{e^{4x} + 1}{e^{2x}} + 2 \quad (3)$$

$$\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^x - \frac{1}{e^x}}{e^x + \frac{1}{e^x}} = \frac{\frac{e^{2x} - 1}{e^x}}{\frac{e^{2x} + 1}{e^x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \quad (4)$$

2 دراسة الدالة الأسية:

1 اتجاه تغير الدالة الأسية:

خواص:

1 من أجل كل عدد حقيقي x , $e^x > 0$.

2 الدالة الأسية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

البرهان:

1 من أجل كل x من $\mathbb{R}$, لدينا: $e^x = e^{2(\frac{x}{2})} = (e^{\frac{x}{2}})^2$

$$\begin{aligned} \exp(0) &= 1 \quad (2) & \exp'(x) &= \exp(x) \quad (1) \\ \exp(x) &\neq 0 \quad (4) & \exp(x) \times \exp(-x) &= 1 \quad (3) \\ \exp(x+y) &= \exp(x) \times \exp(y) \quad (5) \\ \exp(x-y) &= \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (6) \\ \exp(nx) &= [\exp(x)]^n \quad (7) \end{aligned}$$

مع تحيات الأستاذ (المعلم)

1) عموماً:

مبرهنة وتعريف:

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$f'(x) = f(x) \quad \text{و} \quad f(0) = 1$$

نرمز إلى هذه الدالة بالرمز "exp" ونسميها الدالة الأسية (النيبيرية).

ملاحظة:

الدالة الأسية هي الحل الخاص للمعادلة التفاضلية

$$y' = y \quad \text{التي تُحقق} \quad y(0) = 1$$

نتائج: من التعريف ينتج لدينا:

$$\exp(0) = 1 \quad \square$$

$$\exp'(x) = \exp(x), \quad x \text{ من أجل كل عدد حقيقي}$$

2 العدد e والتميز e^x :

العدد e هو صورة العدد 1 بالدالة الأسية،

$$e = \exp(1)$$

نُعطينا الحاسبة $e \approx 2,718281828$

من أجل كل عدد صحيح نسبي n ,

$$\exp(n) = \exp(n \times 1) = [\exp(1)]^n$$

إذن: من أجل كل عدد صحيح نسبي n , $\exp(n) = e^n$

اصطلاحاً:

نرمز، من أجل كل عدد حقيقي x , إلى $\exp(x)$ بـ e^x .

$$\exp(x) = e^x \quad \text{نقرأ} \quad e^x \quad \text{"أسية } x \text{"}$$

3 خواص الدالة الأسية:

قواعد الحساب:

من أجل كل عددين حقيقيين x, y ومن أجل كل عدد

صحيح نسبي n لدينا:

$$e^0 = 1 \quad (2) \quad \exp'(x) = e^x > 0 \quad (1)$$

$$(e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0) \quad e^x \times e^{-x} = 1 \quad (3)$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad (5) \quad e^x \neq 0 \quad (4)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (6) \quad e^{nx} = (e^x)^n \quad (7)$$

● (التمرين 01 ص 102:

في كل حالة من الحالات التالية عيّن مجموعة تعريف الدالة

f للمتغير الحقيقي x :

$$f(x) = e^{-x} \quad (1) \quad f(x) = e^{x^2+x} \quad (2)$$

طريقة 01.

المعادلة $e^{u(x)} = e^{v(x)}$ تعني $u(x) = v(x)$
المتراجحة $e^{u(x)} \geq e^{v(x)}$ تعني $u(x) \geq v(x)$

طريقة 02.

لحل معادلة من الشكل $ae^{2x} + be^x + c = 0$ مع $a \neq 0$
نضع $X = e^x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ، ثم
نستنتج قيم x في حالة وجودها.

(التمرين 05 ص 102)

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) e^{2x} = 1 \quad (2) e^{-5x} = e \quad (3) e^x = e^{-2x}$$

● حل التمرين 05 ص 102

$$(1) e^{2x} = 1 \text{ تكافئ: } e^{2x} = e^0$$

$$\text{أي: } 2x = 0$$

$$\text{ومنه: } x = 0 \text{، إذن: } S_1 = \{0\}$$

$$(2) e^{-5x} = e \text{ تكافئ: } e^{-5x} = e^1$$

$$\text{أي: } -5x = 1$$

$$\text{ومنه: } x = -\frac{1}{5} \text{، إذن: } S_2 = \left\{-\frac{1}{5}\right\}$$

$$(3) e^x = e^{-2x} \text{ تكافئ: } x = -2x$$

$$\text{أي: } 3x = 0$$

$$\text{ومنه: } x = 0 \text{، إذن: } S_3 = \{0\}$$

(التمرين 07 ص 102)

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية:

$$(1) e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \quad (2) \frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}}$$

$$(3) e^{2x+1} - (e^x)^3 = 0$$

● حل التمرين 07 ص 102

$$(1) e^{x^2} = e^{-3(x+1)} \text{ تكافئ: } x^2 = -3(x+1)$$

$$\text{أي: } x^2 + 3x + 3 = 0$$

$$\text{المعادلة } x^2 + 3x + 3 = 0 \text{ مميزها } \Delta = -3 < 0$$

$$\text{ومنه: ليس لها حلول، إذن: } S_1 = \{\}$$

$$(2) \frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \text{، لتكن } D_2 \text{ مجموعة تعريفها.}$$

$$\text{تكون المعادلة (2) معرفة إذا وفقط إذا كان } x \neq 0 \text{ و } 6-x \neq 0$$

$$\text{أي: } x \neq 6 \text{ و } x \neq 0$$

$$\text{إذن: } D_2 = \mathbb{R} - \{0; 6\}$$

$$\frac{x+4}{e^{6-x}} = e^{\frac{1}{x}} \text{ تكافئ: } \frac{x+4}{6-x} = \frac{1}{x}$$

$$\text{ومنه: } x^2 + 4x = 6 - x$$

$$\text{وعليه: } x^2 + 5x - 6 = 0$$

$$\text{المعادلة } x^2 + 5x - 6 = 0 \text{ مميزها } \Delta = 49 > 0$$

$$\text{ومنه: لها حلين متمايزين هما 1 و (-6)،}$$

$$\text{إذن: } S_2 = \{-6; 1\}$$

بما أن: $e^x \neq 0$ فإن: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$.

② من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $(e^x)' = e^x$

وكون $e^x > 0$ فإن: $(e^x)' > 0$

ومنه: الدالة الأسية متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

نتائج:

□ من أجل كل عددين حقيقيين a و b لدينا:

$$a < b \text{ يعني } e^a < e^b$$

$$a = b \text{ يعني } e^a = e^b$$

$$a > b \text{ يعني } e^a > e^b$$

□ من أجل كل عدد حقيقي x لدينا:

$$x < 0 \text{ يعني } 0 < e^x < 1$$

$$x > 0 \text{ يعني } e^x > 1$$

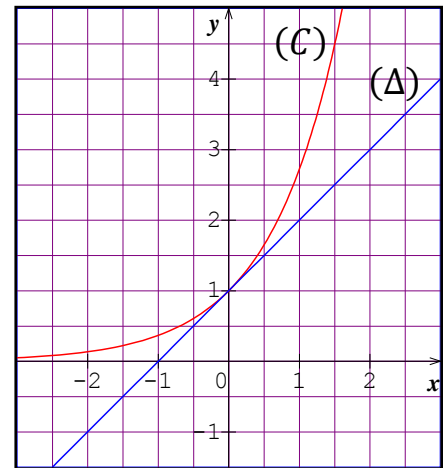
② النهايات:

خواص:

$$\textcircled{1} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad \textcircled{2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$$

③ جدول التغيرات - التمثيل البياني:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		+	
e^x	0^+	1	$+\infty$



✗ المنحني (C) المُمثل للدالة الأسية يقبل محور الفواصل كمستقيم مقارب لما يؤول x إلى $-\infty$.

✗ لدينا: $\exp'(0) = 1$ و $e^0 = 1$ ، إذن: يقبل المنحني (C) عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً $y = x + 1$: (Δ).

✗ من تعريف العدد المشتق لدينا:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(0+x) - \exp(0)}{x} = \exp'(0)$$

$$\text{إذن: } \textcircled{3} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

نتيجة:

الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تآلفي للدالة e^x بجوار 0.

أي من أجل x قريب من 0 لدينا: $e^x \simeq x + 1$.