الباب 03

تجدون في هذا الملف

1 الدرس
2 تطبيقات محلولة
3 مسائل ★☆☆☆☆
4 مسائل ★★☆☆☆
5 مسائل ★★★☆☆
6 مسائل ★★★★☆
7 مسائل ★★★★★
8 حلول المسائل

الأستاذ: عبد الحفيظي عادل

الدوال الأسية

لهذه الدوال تطبيقات واسعة ، فالدوال الأسية تستعمل على سبيل المثال للتعبير عن النمو والاضمحلال بمرور الزمن ، مثل النمو السكاني غير المحدود أو اضمحلال المواد المشعة . أما الدوال اللوغاريتمية فهي أساس مقياس ريختر للزلازل وأساس قياس نسبة الأحماض في السوائل (مقياس PH). للدوال الأسية واللوغاريتمية أيضا دور أساس في الدراسات المالية ، خصوصا في قواعد حساب الفوائد المركبة ومعرفة القيم المستقبلية .

+ لمزيد من الأعمال...

- قرص الجامع في الرياضيات
- قرص EXTRA BAC
- أولمبياد الرياضيات
- حوليات شهادة البكالوريا مع الحل
- فروض واختبارات محلولة لكل المستويات

1 تعريف الدالة الأسية :

تعريف: الدالة الأسية f هي الدالة الوحيدة قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ وتحقق : [1]

$f' = f$ و $f(0) = 1$ ونكتب $f(x) = \exp(x)$ أو $f(x) = e^x$

خواص: x و y عددان حقيقيان و $n \in \mathbb{Z}$

$e^0 = 1$ ، $e^1 = e \approx 2,71$ ، $e^{x+y} = e^x \times e^y$ ، $e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y}$ ، $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$

$e^{nx} = (e^x)^n$ ، $e^x > 0$ ، $\ln e^x = x$ ومن أجل كل $x > 0$: $e^{\ln x} = x$

$x = y$ يعني $e^x = e^y$ ، $x \leq y$ يعني $e^x \leq e^y$ ، $x \geq y$ يعني $e^x \geq e^y$

■ دراسة تغيرات الدالة الأسية:

1 مجموعة التعريف لدينا : $f(x) = e^x$ وهي معرفة على $\mathbb{R}$ إذن $D_f =]-\infty;+\infty[$

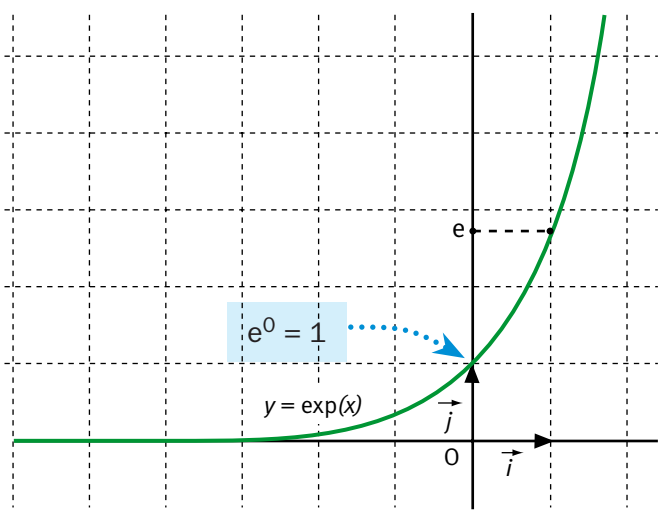
2 النهايات : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0^+$

3 إتجاه التغير : من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $f'(x) = e^x > 0$ وبالتالي f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

4 جدول التغيرات : [2]

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\exp'(x) = \exp(x)$		$+$		$+$	
$\exp(x) = e^x$	0	↗	1	↗	$+\infty$

5 التمثيل البياني :



تطبيق 01: بسط العبارات التالية : [3] الانتقال الى الحل

(1 $(e^x)^4 \times e^{-3x}$ (2 $\frac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}}$ (3 $\frac{e^x + e^{-x}}{e^{-x}}$ (4 $e^{2x} + e^{-2x} - (e^x - e^{-x})^2$

الحل:

.....

.....

.....

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)

[2] : © Cned – Académie en ligne

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 02: حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية : [3]

الانتقال الـــى الحـــل

1) $e^{-2x}=1$

2) $e^{3x-8}=\dfrac{1}{e^{2}}$

3) $e^{x^{2}+9}=e^{6x}$

4) $e^{2x}+5e^{x}-6=0$

5) $e^{x}-3e^{-x}+2=0$

الحل:

تطبيق 03: حل في $\mathbb{R}$ المتراجحات التالية : [3]

الانتقال الـــى الحـــل

1) $e^x > -2$ 2) $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ 3) $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$

الحل:

2 مجموعة تعريف دالة أسية:

مبرهنة: نضع $f(x) = e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية [1]

مجموعة تعريف الدالة f هي نفسها مجموعة تعريف الدالة u إذن $D_f = D_u$

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)
[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)

تطبيق 04: عين مجموعة تعريف الدالة f في كل حالة [4]

الانتقال الى الحل

1) $f(x)=\sqrt{e^x+e^{-x}}$ 2) $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$ 3) $f(x)=\sin xe^{\cos x}$ 4) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 5) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ 6) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ 7) $f(x)=\left(x^2-4x+5\right)e^x$ 8) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-1}$

الحل:

3 مشتقة دالة أسية :

مبرهنة: نضع $f(x)=e^{u(x)}$ حيث u دالة عددية .

إذا كانت الدالة u قابلة للإشتقاق على المجال I فإن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال I و بالتالي : $f'(x)=u'(x)e^{u(x)}$. [1]

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

تطبيق 05: أحسب الدالة المشتقة للدالة f في كل حالة [4] الانتقال الـــى الحـــل

1) $f(x)=e^{2x}-e^{-x}$ 2) $f(x)=xe^{x-1}$ 3) $f(x)=e^{\frac{1}{x}}$ 4) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{e^x+1}$

5) $f(x)=\sqrt{e^x-1}$ 6) $f(x)=\sin xe^{\cos x}$ 7) $f(x)=(x^2-4x+5)e^x$ 8) $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2-1}$

الحل:

4 النهايات الشهيرة :

مبرهنة:

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} e^x = 0^+ \quad ، \quad \lim_{x\to-\infty} x e^x = 0^- \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، لدينا:

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ : n \text{ زوجي} \\ 0^- : n \text{ فردي} \end{cases} \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

[1]

■ إزالة حالات عدم التعيين:

إزالة حالات عدم التعيين في الدالة الأسية

حالة $(\infty)(0)$

لإزالتها ننشر (فك الأقواس) ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ : n \text{ زوجي} \\ 0^- : n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$$\lim_{x\to-\infty} (x-1)e^x$$

حالة عدم التعيين من الشكل $(-\infty)(0)$

$$f(x) = (x-1)e^x$$
$$= xe^x - e^x$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0 - 0 = 0$$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

حالة $\frac{0}{0}$

نغير شكل الدالة f ونستفيد من المبرهنة :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^x-1}{x} = 1$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية :

$$\lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{3x}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{0}{0}$

$$f(x) = \frac{e^{2x}-1}{3x}$$
$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{e^{2x}-1}{x}$$

نبعد بين x و 3 ثم نضرب البسط والمقام بالعدد (2)

$$f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{e^{2x}-1}{2x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = \frac{2}{3}(1) = \frac{2}{3}$$

حيث أن :

$$\lim x \to 0 \frac{e^x-1}{x} = 1$$

حالة $\frac{\infty}{\infty}$

نفرق الكسر إذا كان المقام حد واحد.

نخرج عامل مشترك مناسب من البسط والمقام إذا كان المقام أكثر من حد .

ونستفيد من المبرهنات :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

مثال توضيحي 1: حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x-1}{x}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$$f(x) = \frac{e^x-1}{x} = \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}$$
$$\lim_{x\to0} f(x) = +\infty - 0 = +\infty$$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

مثال توضيحي 2: حساب النهاية :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x-1}{e^x-1}$$

حالة عدم التعيين من الشكل $\frac{\infty}{\infty}$.

$f(x) = \frac{x-1}{e^x-1}$ ، نخرج x كعامل مشترك من البسط ، و e^x من المقام ، ومنه:

$$f(x) = \frac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{e^x\left(1-\frac{1}{e^x}\right)} = \frac{x}{e^x}\left[\frac{1-\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{e^x}}\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0\left[\frac{1-0}{1-0}\right] = 0$$

حيث أن : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

حالة $+\infty-\infty$

إخراج عامل مشترك مناسب عادة:

e^x عندما $x \to +\infty$

ويمكن e^{2x} أو e^{3x} أو ...

e^{-x} عندما $x \to -\infty$

ويمكن e^{-2x} أو ...

ونستفيد من المبرهنات :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ، \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x\to-\infty} x^n e^x = \begin{cases} 0^+ : n \text{ زوجي} \\ 0^- : n \text{ فردي} \end{cases}$$

مثال توضيحي :

حساب النهاية : $\lim_{x\to-\infty} e^{-x} + x$

حالة عدم التعيين من الشكل $-\infty+\infty$.

$$f(x) = e^{-x} + x$$
$$= e^{-x}\left[1 + \frac{x}{e^{-x}}\right]$$

(أخرجنا e^{-x} لأن $x \to -\infty$)

$$= e^{-x}[1 + xe^x]$$
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty[1+0] = +\infty$$

حيث أن : $\lim_{x\to-\infty} xe^x = 0$

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)

تطبيق 06: أحسب النهايات التالية : [3] [4]

الانتقال
الـــى الحـــل

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x-1)e^{-x}$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(3e^{x}-7x\right)$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{x}}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{x^{3}}}$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)$

5) $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\cos x$

6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{\sin x}$

7) $\lim\limits_{x\to0}xe^{\frac{1}{x}}$

8) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}$

الحل:

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

5 المعادلات التفاضلية :

تعريف:
- المعادلة التفاضلية هي معادلة المجهول فيها دالة نرمز إليها غالبا بالرمز y ، z ، ...
- كل معادلة تشمل الدالة ومشتقتها نسميها معادلة تفاضلية من الدرجة الأولى .
- حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$ يعني البحث عن كل الدوال القابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$. و التي تحقق : $f'(x) = af(x) + b$ [1]

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay$

مبرهنة: a عدد حقيقي غير معدوم

حلول المعادلة $y' = ay$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^{ax}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

تطبيق 07: [5] الانتقال إلى الحل

- f_1 حلٌ للمعادلة التفاضلية $y' = y$ و الذي يحقق $f_1(0) = -3$. عيّن عبارة f_1.

الحل:

.....

.....

.....

.....

■ حل معادلة تفاضلية من الشكل $y' = ay + b$

مبرهنة: a وَ b عددان حقيقيان مع a غير معدوم

حلول المعادلة $y' = ay + b$ على $\mathbb{R}$ هي الدوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ ، حيث c عدد حقيقي ثابت .

تطبيق 08: [5] الانتقال إلى الحل

- f_1 حلٌ للمعادلة التفاضلية $y' = 2y + 4$ و الذي يحقق $f_1(0) = 3$. عيّن عبارة f_1.

الحل:

.....

.....

.....

.....

[1] : مجلة الدالة الأسية النيبيرية (لعويجي وليد + بخدة أمين)

[5] : مجلة الدالة الأسية (محمد سراي)

6 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

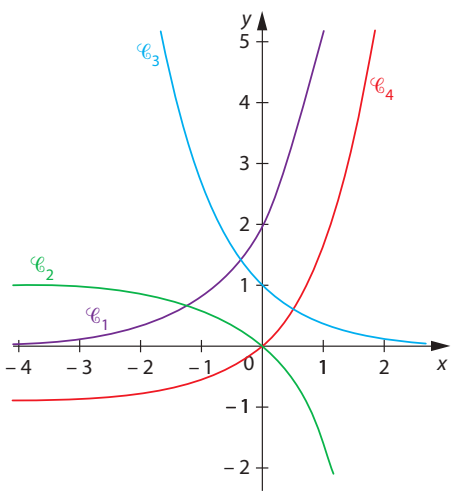
الانتقال الـــى الحـــل

أجب ب "صح" أو " خطأ": [4]

1. $e^{-3} < 0$ ☐
2. $e^{-5} = -e^{5}$ ☐
3. $\sqrt{e^{2x}} = e^{x}$ ☐
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ ☐
5. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$ ☐
6. $\lim\limits_{x > \to 0} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ ☐
7. إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^{x} \geq e^{2}$ ☐
8. إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^{x} \leq 0$ ☐
9. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x} = 1$ ☐
10. إشارة $(x-1)e^{x}$: هي نفس إشارة $x-1$ ☐
11. من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$ ☐
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$ ☐
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ex}{x^{3}} = +\infty$ ☐
14. $e^{x} - e = e^{x-1}$ ☐
15. $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = (e^{x} - 1)^{2}$ ☐
16. التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{x}$ يقطع محور الفواصل. ☐
17. الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ☐
18. $e^{x^{2}-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$ ليس للمتراجحة ☐
19. الدالة : $x \mapsto e^{x^{2}-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$ ☐
20. $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ ☐

صل بما يناسب: [6]

$(\mathscr{C}_1)$	$f : x \mapsto 2e^{x}$
$(\mathscr{C}_2)$	$k : x \mapsto e^{-x}$
$(\mathscr{C}_3)$	$g : x \mapsto 1 - e^{x}$
$(\mathscr{C}_4)$	$l : x \mapsto e^{x} - 1$



[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

[6] : MATH'X TS SPÉCIFIQUE

حلول التطبيقات

تطبيق 01: [3]

1. $\left(e^{x}\right)^{4}\times e^{-3x}=e^{4x}\times e^{-3x}=e^{4x-3x}=e^{x}$

2. $\dfrac{e^{3x+4}}{e^{3x+2}}=e^{3x+4}\times e^{-(3x+2)}=e^{3x+4}\times e^{-3x-2}=e^{3x+4-3x-2}=e^{2}$

3. $\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{e^{-x}}=e^{x}\left(e^{x}+e^{-x}\right)=e^{2x}+e^{x-x}=e^{2x}+1$

4. $e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{x}-e^{-x}\right)^{2}=e^{2x}+e^{-2x}-\left(e^{2x}-2e^{x}\times e^{-x}+e^{-2x}\right)=2$

تطبيق 02: [3]

1. $e^{-2x}=1$ تكافئ $e^{-2x}=e^{0}$ أي $-2x=0$ ومنه $x=0$ إذن $S=\{0\}$.

2. $e^{3x-8}=\dfrac{1}{e^{2}}$ تكافئ $e^{3x-8}=e^{-2}$ ومنه $3x-8=-2$ وبالتالي $S=\{2\}$.

3. $e^{x^{2}+9}=e^{6x}$ تكافئ $x^{2}+9=6x$ تكافئ $x^{2}-6x+9=0$ ومنه $S=\{3\}$

4. $e^{2x}+5e^{x}-6=0$ تكافئ $\left(e^{x}\right)^{2}+5\left(e^{x}\right)-6=0$ ، بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+5X-6=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد $X=1$ أو $X=-6$

ومنه $e^{2x}+5e^{x}-6=0$ تكافئ $e^{x}=1$ أو $e^{x}=-6$ (حالة مرفوضة لأن $e^{x}>0$) .

إذن فقط لدينا $e^{x}=1$ ومنه $x=0$ وأخيرا $S=\{0\}$.

5. $e^{x}-3e^{-x}+2=0$ تكافئ $e^{x}-\dfrac{3}{e^{x}}+2=0$ تكافئ $e^{2x}+2e^{x}-3=0$

بوضع $e^{x}=X$ نحصل على $X^{2}+2X-3=0$ نحل هذه المعادلة باستعمال المميز نجد

$X=1$ أو $X=-3$ ومنه $e^{x}-3e^{-x}+2=0$ تكافئ $e^{x}=1$ أو $e^{x}=-3$

(حالة مرفوضة لأن $e^{x}>0$) . إذن فقط لدينا $e^{x}=1$ ومنه $x=0$ وأخيرا $S=\{0\}$.

تطبيق 03: [3]

1. $e^x > -2$ دوما محققة لأن من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $e^x > 0$ وبالتالي $S = \mathbb{R}$.

2. $(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$. لدينا دوما $e^x + 3 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 3)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.
$(e^x - 1)(e^x + 3) < 0$ تكافئ $e^x - 1 < 0$ تكافئ $e^x < 1$ تكافئ $e^x < e^0$ تكافئ $x < 0$ وأخيرا $S =]-\infty , 0[$.

3. $e^x - 5e^{-x} + 4 \leq 0$ تكافئ $e^x - \frac{5}{e^x} + 4 \leq 0$ تكافئ $e^{2x} + 4e^x - 5 \leq 0$
بوضع $e^x = X$ نحصل على $X^2 + 4X - 5 \leq 0$ ومنه $(X - 1)(X + 5) \leq 0$ وهذه تكافئ
$(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ لدينا دوما $e^x + 5 > 0$ وبالتالي $(e^x - 1)(e^x + 5)$ لها نفس إشارة $e^x - 1$.
$(e^x - 1)(e^x + 5) \leq 0$ تكافئ $e^x - 1 \leq 0$ تكافئ $e^x \leq 1$ تكافئ $e^x \leq e^0$ تكافئ $x \leq 0$ وأخيرا $S =]-\infty , 0]$.

تطبيق 04: [4]

1. لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x + e^{-x}}$ ومنه : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x + e^{-x} \geq 0\}$
و هي محققة دوما لأن $e^x > 0$ و $e^{-x} > 0$ ، $D_f = \mathbb{R}$

2. لدينا : $f(x) = \frac{e^x + x}{e^x - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

3. لدينا : $f(x) = \sin x . e^{\cos x}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

4. لدينا : $f(x) = e^{\frac{1}{x}}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}^*$

5. لدينا : $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ حيث : $D_f = \{x \in \mathbb{R} : e^x - 1 \geq 0\}$
ومنه : $e^x - 1 \geq 0$ وعليه : $e^x \geq 1$ وبالتالي : $x \geq 0$ إذن : $D_f = [0; +\infty[$

6. لدينا : $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$

7. لدينا : $f(x) = (x^2 - 4x + 5)e^x$ حيث : $D_f = \mathbb{R}$

8. لدينا : $f(x) = \frac{e^x}{x^2 - 1}$ الدالة f معرفة على $\mathbb{R}\{-1;1\}$.

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

تطبيق 05: [4]

1. $f'(x)=2e^{2x}+e^{-x}$.

2. $f'(x)=1.e^{x-1}+xe^{x-1}$ ومنه : $f'(x)=(1+x)e^{x-1}$

3. $f'(x)=\frac{-1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

4. $f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-(e^x-1)e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+e^x-e^{2x}+e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$

5. $f'(x)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$

6. $f'(x)=\cos x.e^{\cos x}+\sin x(-\sin x)e^{\cos x}$ ومنه : $f'(x)=e^{\cos x}(\cos x-\sin^2 x)$

وعليه : $f'(x)=e^{\cos x}\left[\cos x-(1-\cos^2 x)\right]$ وبالتالي : $f'(x)=(\cos^2 x+\cos x-1)e^{\cos x}$

7. $f'(x)=(2x-4)e^{3x}+(x^2-4x+5)e^x$ وعليه : $f'(x)=(2x-4+x^2-4x+5)e^x$

ومنه : $f'(x)=(x^2-2x+1)e^x$

8. $f'(x)=\frac{e^x(x^2-1)-2x.e^x}{(x^2-1)^2}$ ومنه : $f'(x)=\frac{(x^2-2x-1)e^x}{(x^2-1)^2}$

تطبيق 06: [4] [3]

1. $\lim_{x\to+\infty}(3x-1)e^{-x}=\lim_{x\to+\infty}\left(3\frac{x}{e^x}-\frac{1}{e^x}\right)=3(0)-0=0$ لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x}}=0$

و $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$.

2. $\lim_{x\to+\infty}(3e^x-7x)=\lim_{x\to+\infty}x\left(3\frac{e^x}{x}-7\right)=+\infty$ لأن $\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$.

3. $\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{\frac{1}{x}+\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3e^x}{x^2+2}=0$ لأن $\lim_{x\to-\infty}x^ne^x=0$

つづく

[3] : الممتاز في الرياضيات (ساعد أحمد)
[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

4 $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)$

نضع $X=\dfrac{1}{x}$ عندما $x\to-\infty$ فإن $X\to0$ نستعمل النهاية الشهيرة $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$ نحصل على

$$\lim_{x\to-\infty}\left(xe^{\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{x\to-\infty}x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}\right)=\lim_{X\to0}\frac{e^X-1}{X}=1.$$

5 من أجل كل عدد حقيقي x لدينا $-1\le\cos x\le1$ نضرب في العدد الحقيقي الموجب تماما e^{-x}

نحصل على $-e^{-x}\le e^{-x}\cos x\le e^{-x}$ أي $-e^{-x}\le f(x)\le e^{-x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ وبالتالي حسب مبرهنة النهايات والحصر تكون $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$.

6 من أجل $x\neq k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$: $\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\dfrac{e^{-x}\left(e^{2x}-1\right)}{\sin x}=e^{-x}\times\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}$.

لدينا $\lim\limits_{x\to0}e^{-x}=1$ و $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=2\times\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2\times1=2$ لأن $\lim\limits_{X\to0}\dfrac{e^X-1}{X}=1$.

لدينا كذلك $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}=1$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

وبالتالي $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\left[e^{-x}\times\dfrac{\left(e^{2x}-1\right)}{x}\times\dfrac{x}{\sin x}\right]=1\times2\times1=2$

7 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\<}}xe^{\frac{1}{x}}=0$ و $\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}xe^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{\substack{x\to0\\>}}\dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{e^t}{t}=+\infty$ (نضع : $\dfrac{1}{x}=t$)

8 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{2x}-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}2\times\dfrac{e^{2x}-1}{2x}=2$

تطبيق 07 : [5]

- $y'=y$ معناه $y(x)=C'e^x$

لدينا إذن: $f_1(x)=C'e^x$ و $f_1(0)=-3$ و بالتالي : $\boxed{f_1(x)=-3e^x}$.

تطبيق 08 :

- $y'=2y+4$ معناه $y(x)=Ce^{2x}-2$

لدينا إذن: $f_1(x)=Ce^{2x}-2$ و $f_1(0)=3$ و بالتالي : $\boxed{f_1(x)=5e^{2x}-2}$.

حل المراجعة السريعة

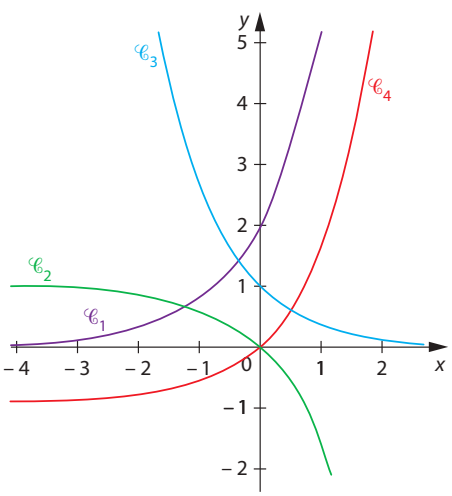
6 تحقق من فهمك الجيد للدرس :

أجب ب "صح" أو " خطأ": [4]

1. $e^{-3} < 0$ ✗
2. $e^{-5} = -e^{5}$ ✗
3. $\sqrt{e^{2x}} = e^{x}$ ✓
4. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{e^{x}} = 0$ ✓
5. الدالة المشتقة للدالة $x \mapsto e^{3x}$ هي $x \mapsto e^{3x}$ ✗
6. $\lim\limits_{x > \to 0} \dfrac{e^{x}}{x} = +\infty$ ✓
7. إذا كان $x \geq 2$ فإن $e^{x} \geq e^{2}$ ✓
8. إذا كان $x \leq 0$ فإن $e^{x} \leq 0$ ✗
9. من أجل كل عدد حقيقي x : $e^{x}.e^{-x} = 1$ ✓
10. إشارة : $(x-1)e^{x}$ هي نفس إشارة $x-1$ ✓
11. من أجل $x < 1$: $e^{x-1} < 0$ ✗
12. $\lim\limits_{x \to +\infty} xe^{x} = 0$ ✗
13. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{ex}{x^{3}} = +\infty$ ✗
14. $e^{x} - e = e^{x-1}$ ✗
15. $e^{2x} - 2e^{x} + 1 = (e^{x} - 1)^{2}$ ✓
16. التمثيل البياني للدالة $x \mapsto e^{x}$ يقطع محور الفواصل. ✗
17. الدالة : $x \mapsto e^{-1}x + 3$ متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ ✓
18. $e^{x^{2}-4x} < 0$ حل في $\mathbb{R}$ ليس للمتراجحة ✗
19. الدالة : $x \mapsto e^{x^{2}-4}$ هي حل للمعادلة : $y' = y$ ✗
20. $e^{-\frac{1}{2}} < 1$ ✓

صل بما يناسب: [6]

- $(\mathscr{C}_1)$ ← $f : x \mapsto 2e^{x}$
- $(\mathscr{C}_2)$ ← $k : x \mapsto e^{-x}$
- $(\mathscr{C}_3)$ ← $g : x \mapsto 1 - e^{x}$
- $(\mathscr{C}_4)$ ← $l : x \mapsto e^{x} - 1$



[4] : الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات
[6] : MATH'X TS SPÉCIFIQUE

1 سلسلة الدوال الأسية (مصطفاي عبد العزيز) ★

الانتقال الـــى الحـــل

f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{3e^x-1}{e^x+1}$

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 ادرس اتجاه تغيّر الدالة f، ثمّ شكل جدول تغيراتها.

3 حدّد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

4 بيّن أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$ وفسّر النتيجة هندسيا.

5 بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

6 احسب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل ثم ارسم كلا من (T) و (C_f).

7 ناقش بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^x=m+1$

2 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات ★

الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=x+1-\dfrac{2e^x}{e^x+1}$

و ليكن (C) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O;I,J)$ حيث وحدة الطول هي $1cm$.

1 بين أن الدالة f فردية. ماذا تستنتج بالنسبة للمنحني (C) ؟

2 أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$

ب) استنتج نهاية الدالة f عند $+\infty$.

3 أ) بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=x-1+\dfrac{2}{e^x+1}$

ب) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x-1$ مستقيم مقارب للمنحني (C) عند $+\infty$.

ج) حدد وضعية المنحني (C) بالنسبة للمستقيم المقارب (Δ).

4 أدرس اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0;+\infty[$ ثم شكل جدول تغيراتها.

5 عين معادلة لـِ (d) مماس المنحني (C) عند النقطة التي فاصلتها 0.

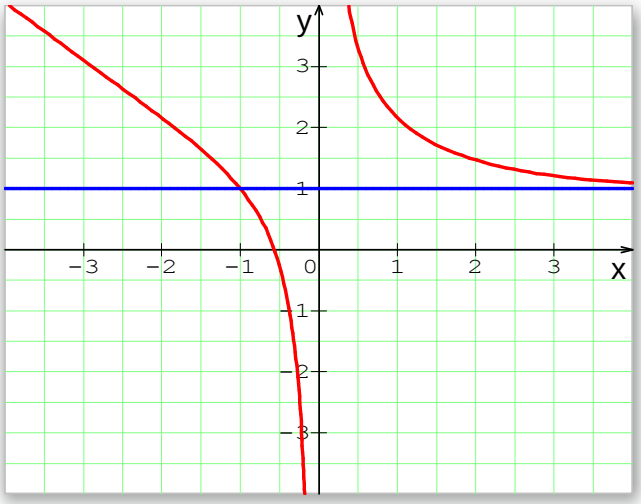
6 أرسم (d) ، (Δ) ، (Δ') و (C) حيث (Δ') هو المستقيم المقارب للمنحني (C) عند $-\infty$.

3 الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات ★ الانتقال الـــى الحـــل

الجزء A :

المنحنى $(\mathcal{C})$ في الشكل الموالي هو التمثيل البياني لدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

محور التراتيب و المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقاربان للمنحني $(\mathcal{C})$.



1 اقرأ بيانيا نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة التعريف .

2 حل بيانيا كل من : أ) $f(x)=1$ ؛ ب) $f(x)>1$

الجزء B :

نقبل أن الدالة f معرفة على $\mathbb{R}-\{0\}$ بـــ : $f(x)=\dfrac{e^x+x}{e^x-1}$

1 أ- تحقق أن : $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$

ب- نقبل أن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ، جد من جديد إذن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2 أ- ادرس ، حسب قيم x إشارة (e^x-1)

ب- حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

3 بين أن $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]=0$. ماذا تستنتج ؟

4 ادرس وضعية المنحني $(\mathcal{C})$ بالنسبة إلى المستقيم الذي معادلته $y=-x$.

4 BAC علوم تجريبية 2011 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★ الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب- أحسب $f'(x)$ ثم أدرس إشارتها.

جـ- شكّل جدول تغيّرات الدالة f.

2 أ- بيّن أن المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=-ex-1$ مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $(-\infty)$.

ب- أكتب معادلة للمستقيم (T) مماس للمنحني (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

جـ- بيّن أن المعادلة $f(x)=0$ ، تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

د- أرسم المستقيمين (Δ) و (T) ثم المنحنى (C_f) على المجال $]-\infty;2]$.

3 أ- أحسب بدلالة α ، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحني (C_f) ، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ ، $x=\alpha$.

ب- أثبت أن : $A(\alpha)=\left(\dfrac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$ (ua هي وحدة المساحات).

I - لتكن g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1 أ) احسب $g'(x)$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، ثم ادرس اتجاه تغير الدالة g' (حيث g' هي مشتقة الدالة g)

ب) بيّن أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$.

جـ) احسب نهايتي الدالة g عند كل من $-\infty$ و $+\infty$، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3 استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم العدد الحقيقي x .

II - لتكن f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب) بيّن أنّه ، من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=\dfrac{xe^x\,g(x)}{(e^x-x)^2}$ (حيث f' هي مشتقة الدالة f).

جـ) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ شكّل جدول تغيّراتها .

2 أ) بيّن أنّ $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$ ، ثمّ استنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

ب) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]$ ، ثمّ فسر النتيجة بيانيا .

جـ) أنشئ المنحنى (C_f) . (تعطى $f(\alpha)\approx 0.29$)

1 BAC علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (07,5 نقط) ★★ — الانتقال الـــى الحـــل

I) نعتبر الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$.
حيث a و b عددان حقيقيان.
(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ وحدة الطول $1\,cm$.
عيّن قيمتي a و b بحيث تكون النقطة $A(-1;1)$ تنتمي إلى (C_f) و معامل توجيه المماس عند A يساوي $(-e)$.

II) نعتبر الدالة العددية g للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1$.
(C_g) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1. بيّن أن $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=1$ و فسر النتيجة بيانيا. (نذكر أن $\lim\limits_{u\to-\infty} ue^{u}=0$)
2. أدرس تغيّرات الدالة g ، ثم أنشئ جدول تغيراتها .
3. بيّن أن المنحنى (C_g) يقبل نقطة إنعطاف I يطلب تعيين إحداثييها .
4. أكتب معادلة المماس للمنحى (C_g) عند النقطة I .
5. أرسم (C_g) .
6. H الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$ حيث α و β عددان حقيقيان
ـ عيّن α و β بحيث تكون H دالة أصلية للدالة : $x\mapsto g(x)-1$. استنتج الدالة الأصلية للدالة g و التي تنعدم عند القيمة 0 .

III) لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]-2;+\infty[$ كما يأتي : $k(x)=g(x^2)$
باستعمال مشتقة دالة مركبة ، عيّن اتجاه تغيّر الدالة k ثم شكل جدول تغيّراتها .

2 BAC علوم تجريبية 2019 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★ — الانتقال الـــى الحـــل

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. تُؤخذ وحدة الطول $2\,cm$
$(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ التمثيلان البيانيان للدالتين f و g المعرّفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$g(x)=e^x-ex \quad \text{و} \quad f(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2$$

1. أ) ادرس اتجاه تغير الدالة g .
   ب) استنتج اشارة $g(x)$ حسب قيم x الحقيقية.
2. ادرس اتجاه تغيّر الدالة f .
3. احسب كلاً من $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ؛ ثمّ شكّل جدول تغيّرات الدالة f .
4. ادرس الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على $\mathbb{R}$.
5. ارسم على المجال $[0;2]$ المنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في نفس المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$. (يُعطى $e^2-2e\approx 2$)
6. احسب بالسنتمتر المربّع، مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$.
7. h الدالة المعرّفة على المجال $[-2\ ;\ 2]$ كما يلي: $h(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}$ و ليكن (Γ) تمثيلها البياني في المعلم السابق.
   أ) بيّن أنّ h دالة زوجية.
   ب) من أجل $x\in[0\ ;\ 2]$ احسب $h(x)+f(x)$ ثم استنتج كيفية رسم (Γ) انطلاقا من $(\mathcal{C}_f)$ ثم ارسمه.

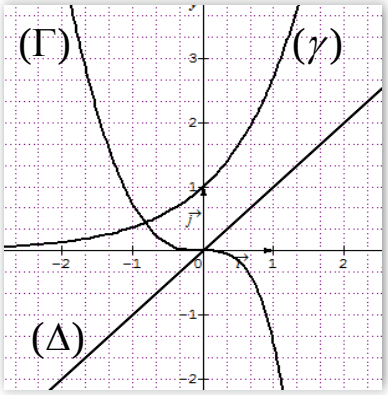
3 BAC علوم تجريبية 2020 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال الـــى الحـــل

I) المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

في الشّكل المرفق، (Γ) المنحنى الممثِّل للدّالة g المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2x^2+2x-2xe^x$

(Δ) المستقيم ذو المعادلة: $y=x$ و (γ) المنحنى الممثل للدالة: $x\mapsto e^x$.



بقراءة بيانية:

1. برّر أنّه من أجل كل عدد حقيقي x : $e^x-x>0$
2. حدّد تبعا لقيم العدد الحقيقي x اشارة $g(x)$ علما أنّ $g(0)=0$.

II) الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=-1+\dfrac{2e^x}{e^x-x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم السابق.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ واحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثمّ فسّر نتيجتي النهايتين هندسيا.
2. أ . بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون: $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{(e^x-x)^2}$.

ب. استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3. أ . اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) في النّقطة A ذات الفاصلة 0.

ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x يكون: $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$.

جـ. استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (T) على $\mathbb{R}$، ماذا تمثّل النقطة A بالنسبة إلى (C_f)؟

4. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]-\infty;1]$، ثم تحقق أنّ: $-0.6<\alpha<-0.5$.
5. أنشئ المماس (T) والمستقيمين المقاربين ثم المنحنى (C_f).

4 BAC علوم تجريبية 2017 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★

الانتقال الـــى الحـــل

I) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2-x^2e^{1-x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1. بيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=2$ وأعط تفسيرا هندسيا لهذه النتيجة ، ثمّ احسب النهاية $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.
2. أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$.

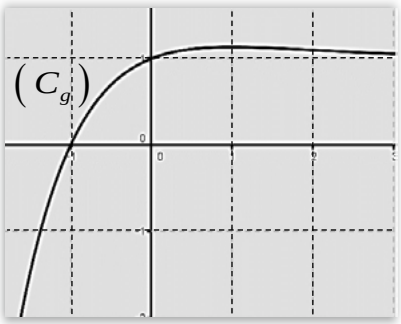
ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3. اكتب معادلة لـ (T) المماس للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1 .

II) نعتبر الدالة العددية h المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1. بيّن أنّه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن: $h(x)\geq 0$، ثمّ ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) والمماس (T).
2. بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.
3. أنشئ المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[-1;+\infty[$.
4. F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$.

تحقّق أنّ F دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ ، ثمّ احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=1$.



I الدّالة العددية g معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=1+xe^{-x-1}$، (C_g) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ (الشكل المقابل)

1 احسب $g(-1)$.

2 بقراءة بيانية، حدّد حسب قيم x إشارة $g(x)$.

II الدّالة العددية f معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=x-(x+1)e^{-x-1}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$

1 تَحقّق أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x غير معدوم: $f(x)=x[1-(1+\frac{1}{x})e^{-x-1}]$

ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 أ. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x: $f'(x)=g(x)$

ب. استنتج أنّ الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$ ومتناقصة تماما على $]-\infty;-1[$ ثمّ شكّل جدول تغيّراتها.

3 أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)$ ثمّ فسّر النّتيجة هندسيا.

ب. ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y=x$

جـ. بيّن أنّ (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا للمستقيم (Δ) يُطلب كتابة معادلة له.

4 أ. بيّن أنّ (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتاهما α و β

حيث: $0,3<\alpha<0,4$ و $-1,9<\beta<-1,8$

ب. ارسم المستقيمين (Δ) و (T) ثمّ ارسم المنحنى (C_f) على المجال $]-2;+\infty[$.

5 الدّالة العددية h معرّفة على المجال $[-2;2]$ بـ: $h(x)=-|x|+(|x|-1)e^{|x|-1}$

(C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ. بيّن أنّ الدّالة h زوجية.

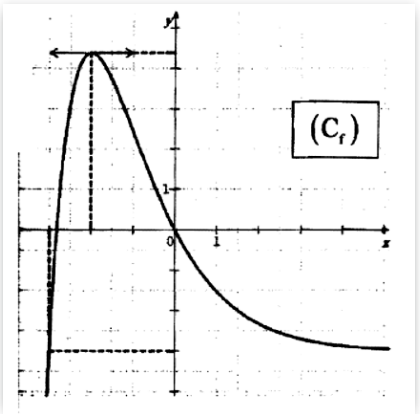
ب. بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $[-2;0]$: $h(x)=f(x)$

جـ. اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثمّ ارسمه.

1 BAC تسيير واقتصاد 2009 الموضوع الثاني (05 نقاط) ★★★

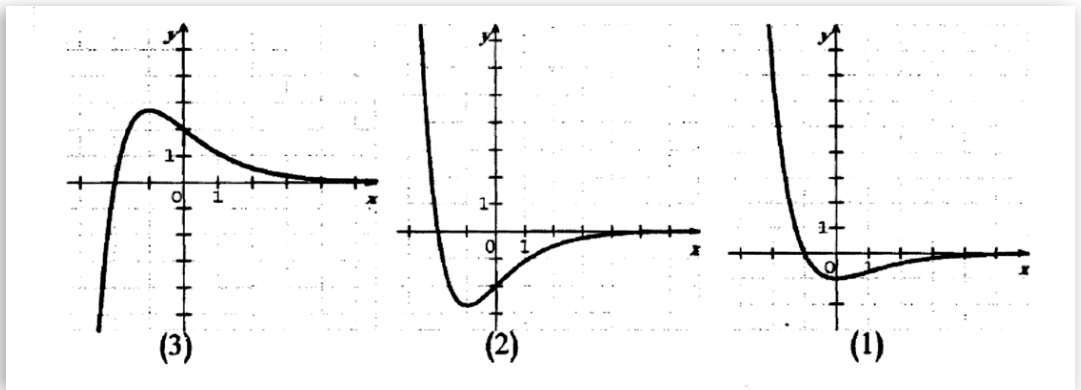
الانتقال الـــى الحـــل

f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $f(x) = (x+a)e^{-x} + b$
حيث a وb عددان حقيقيان وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستو منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.



1 بقراءة بيانية للمنحنى (C_f):
أ) عيّن $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$.
ب) عيّن حسب قيم x إشارة $f'(x)$.

ج) من بين المنحنيات الثلاثة (1)، (2)، (3) عيّن، مع التبرير، المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f.



2 أ) بيّن أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x) = (x+3)e^{-x} - 3$.
ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f.
جـ) بيّن أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له.
د) بيّن أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0;+\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 و1,52.

3 نعتبر الدالة F المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ وليكن I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.
أ) احسب $F'(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.
ب) أعط تفسيرا بيانيا للعدد I مبررا الحصر التالي $4,5 < I < 5$ باعتبارات بيانية محضة.
جـ) احسب العدد I.

2 BAC علوم تجريبية 2013 الموضوع الأول (06.5 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

I) f الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $f(x) = \frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$.
و (C) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)$، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحنى (C).

2 أحسب $f'(x)$. بيّن أن الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

3 بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في $]-\infty;1[$ حلا وحيدا α. باستعمال جدول القيم أعلاه جد حصرا للعدد α.

x	$f(x)$
0,20	0,037
0,21	0,016
0,22	-0,005
0,23	-0,026
0,24	-0,048
0,25	-0,070

つづく

4 أرسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C)، ثم أرسم المنحنى (C') الممثل للدالة $|f|$.

5 عيّن بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m التي من أجلها يكون للمعادلة $|f(x)|=m$ حلان مختلفان في الإشارة.

II g الدالة المعرّفة على $]-\infty;1[$ بـ: $g(x)=f(2x-1)$. ($g(x)$ عبارة غير مطلوبة)

1 أدرس تغيّرات الدالة g على $]-\infty;1[$، ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 أ- تحقق أن $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$، ثم بيّن أن: $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$.

ب- إستنتج معادلة (T) المماس لمنحنى الدالة g في النقطة ذات الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$.

ج- تحقق من أن: $y=\frac{2}{(\alpha-1)^3}x-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$، معادلة للمستقيم (T).

3 BAC رياضيات 2017 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$.

(C_f) المنحنى الممثل للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$، استنتج وجود مستقيم مقارب للمنحنى (C_f) يطلب تعيين معادلة له.

ب) بيّن أنّ: من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$

ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f وشكّل جدول تغيّراتها.

2 اكتب معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2.

3 h الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ كما يلي: $h(x)=x^2e^{-x+2}-4$.

ادرس اتجاه تغير الدالة h ثم استنتج إشارة $h(x)$ حدّد عندئذ وضعية المنحنى (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0;+\infty[$.

4 ارسم المماس (T) والمنحنى (C_f) على المجال $[0;+\infty[$.

5 نعتبر m وسيط حقيقي والمعادلة ذات المجهول الحقيقي x الموجب: $(E)\ \ldots\ f(x)=m(x-2)$

ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة (E).

6 g الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$.

اعتمادا على السؤال رقم (1)، شكل جدول تغيّرات الدالة g.

4 BAC رياضيات 2010 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال الـــى الحـــل

I g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(3-x)e^x-3$.

1 ادرس تغيّرات الدالة g.

2 بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث: $2,82<\alpha<2,83$.

3 استنتج أشارة $g(x)$ حسب قيم x.

つづく

II f الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^3}{e^x-1};\ x\neq 0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

$(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ ، اكتب معادلة لـ (T) مماس $(\mathcal{C}_f)$ عند المبدأ O.

2 أ ـ بيّن أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} x^3e^{-x}=0$ ثمّ احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

ب ـ بيّن أنه من أجل $x\neq 0$ فإن: $f'(x)=\dfrac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$.

جـ ـ تحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$ ثمّ عيّن حصرا له.

د ـ أنشئ جدول تغيّرات الدالة f.

3 احسب $f(x)+x^3$ واستنتج الوضعية النسبية لـ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة $x\mapsto -x^3$

بيّن أن: $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x^3\right]=0$ وفسّر النتيجة هندسيا.

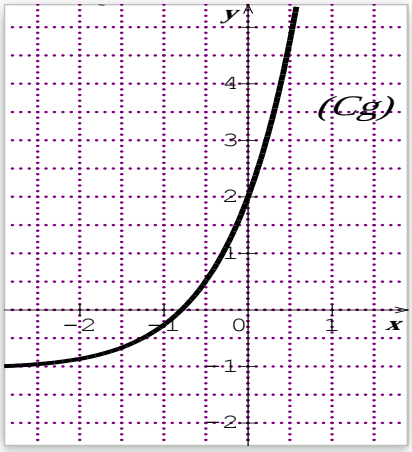
4 أنشئ في نفس المعلم المماس (T) والمنحنيين $(\mathcal{C})$ و $(\mathcal{C}_f)$.

5 BAC تقني رياضي 2019 الموضوع الأول (07 نقاط) ★★★

الانتقال ← الحل

I g الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=(x+3)e^x-1$

و (C_g) تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل .



بقراءة بيانية

أ) حدّد إشارة $g(-1)$ و $g\left(\dfrac{-1}{2}\right)$.

ب) استنتج وجود عدد حقيقي α وحيد من المجال $\left]-1;\dfrac{-1}{2}\right[$ بحيث $g(\alpha)=0$ ثم تحقّق أنّ: $-0,8<\alpha<-0,7$.

جـ) استنتج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

II f الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=(x+2)\left(e^x-1\right)$

و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x ، $f'(x)=g(x)$ ثم شكّل جدول تغيرات الدالـة f .

3 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$ ثم استنتج انّ (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ).

جـ) اكتب معادلة لـ (T) مماس (C_f) الموازي للمستقيم (Δ).

つづく

4 ارسم المستقيم (Δ) والمنحني (C_f) على المجال $]-\infty;1]$ (يعطى $f(\alpha)\approx -0.7$)

5 احسب $f(x)-g(x)$ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$.

6 h الدّالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$ و (C_h) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

أ) بيّن أنّ الدّالة h زوجية .

ب) تأكد أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإنّ : $h(x)=f(x-2)+1$.

جـ) اشرح كيف يمكن رسم (C_h) انطلاقا من (C_f) ثم ارسم (C_h) على المجال $[-3;3]$.

1 تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين) ★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

- نعتبر الدالة f المعرفة على $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ كما يلي : $f(x)=2x+\dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$.

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم $(O;\vec{i},\vec{j})$

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$.

1 حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $g(x)=0$.

2 حلل $g(x)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$.

الجزء الثاني :

1 بين انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f(-x)+f(x)=-3$ ؛ ماذا تستنتج بيانيا ؟

2 أ)- بين انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f(x)=2x+\dfrac{2-e^{x}}{e^{x}-1}$

- أوجد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x$.

ب)- أوجد $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-2x$.

جـ)- حدد إشارة $(1-e^{-x})$ على $\mathbb{R}$ ثم أوجد $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x)$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)$.

د)- استنتج أن (C_f) يقبل ثلاث مستقيمات مقاربة من بينها مقاربين مائلين (Δ') و (Δ)

- يطلب معادلة كل منهم .

3 أ)- برهن انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^*$ لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^{x}-1)^2}$.

ب)- استنتج اتجاه تغير f ثم شكل جدول تغيراتها .

4 أرسم كل من المنحنى (C_f) و المقاربات .

5 α عدد حقيقي موجب تماما ، نعتبر المعادلة (1) ذات المجهول الحقيقي x حيث

$$(-2-\ln\alpha)e^{-x}+1+\ln\alpha=0 \quad \rightarrow(1)$$

- أوجد قيم α التي من أجلها المعادلة (1) لاتقبل حلا في $\mathbb{R}$.

أ)- بيانيا ب)- حسابيا .

2 BAC رياضيات 2018 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★

الانتقال الـى الحـــل

I) g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $g(x)=(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1$.

1 بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $g'(x)=\dfrac{(x+1)(2x^2+1)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$ ،

واستنتج اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0;+\infty[$.

2 بيّن أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $0.9<\alpha<1$ ،

و استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) f الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$.

و (C_f) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب) بيّن أنّه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

واستنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكّل جدول تغيراتها.

2 بـيّن أنّ $\lim\limits_{x\to+\infty}(xe^{-\frac{1}{x}}-x)=-1$ (يمكـن وضـع $t=-\dfrac{1}{x}$) ثـم اسـتنتج أن المسـتقيم (Δ) ذو المعادلـة $y=x$ مقارب للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

3 h الدالة العددية المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ : $h(x)=\dfrac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) احسب $\lim\limits_{x\to+\infty} h(x)$ وادرس اتجاه تغير الدالة h واستنتج إشارة $h(x)$ على $]0;+\infty[$.

ب) تَحقّق أن $f(x)-x=(1+x)h(x)$ ثم استنتج الوضعية النسبية لـ (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ).

4 ارسم المستقيم (Δ) و المنحنى (C_f). (نأخذ $f(\alpha)\approx 1.73$).

5 (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدها العام u_n حيث: $u_n=\dfrac{n}{n+1}f\left(\dfrac{1}{n}\right)-\dfrac{n^2}{n+1}$.

أ) اكتب u_n بدلالة n ثم بيّن أن المتتالية (u_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول u_1.

ب) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث:

$$S_n=\left(\frac{1}{2}f(1)-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{2}{3}f\left(\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{3}{4}f\left(\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{1}{n+1}\right).$$

3 BAC رياضيات 2016 الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★

الانتقال الـى الحـــل

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $\varphi(x)=(x^2-x+1)e^{-x+1}-1$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغير الدالة φ ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلاّ α يختلف عن 1 ثم تحقّق أنّ : $2,79<\alpha<2,80$.

3 استنتج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$.

つづく

II f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x)=\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$.
(C_f) و (C_g) تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;i,j)$.

1 أ) احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

ب) ادرس اتجاه تغيّر الدالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها .

2 بيّن أنّ للمنحنيين (C_f) و (C_g) مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 ثم جد معادلة له.

3 ارسم المماس (T) و المنحنى (C_f).

4 أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب) ادرس إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على $\mathbb{R}$ ثم استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C_f) و (C_g).

جـ) باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة العدد الحقيقي x : $\int_1^x f(t)\,dt$.

د) احسب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C_f) و (C_g) و المستقيمين اللذيْن معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$.

III 1 احسب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$. أعط تخمينا لعبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم.
($f^{(n)}$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).

2 برهن بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n، $f^{(n)}(x)=(-1)^n\left[2x-(2n+1)\right]e^{1-x}$.

3 (u_n) المتتالية العددية المعرّفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n=f^{(n)}(1)$.

أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع : u_k+u_{k+1}.

ب) استنتج بدلالة n ، المجموع : $u_1+u_2+\ldots+u_{2n}$.

4 BAC رياضيات 2017 الدورة الاستثنائية الموضوع الثاني (07 نقاط) ★★★★ الانتقال الـــى الحـــل ☹ 😐

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ حيث: $\|\vec{i}\|=1cm$.

I نعتبر الدّالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=(x+1)^2e^{-x}$. (C) تمثيلها البياني .

1 احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

2 ادرس اتجاه تغيّر الدّالة f ثمّ شكّل جدول تغيراتها.

3 أثبت أنّ المنحنى (C) يقبل نقطتي انعطاف يطلب تعيين إحداثييهما، احسب $f(-2)$ ، ثمّ ارسم المنحنى (C).

II ليكن m وسيط حقيقي ، نعتبر الدّالة f_m المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f_m(x)=(x^2+mx+1)\,e^{-x}$
وليكن (C_m) تمثيلها البياني في المعلم السابق.

1 أثبت أنّ جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω يطلب تعيين إحداثييها.

2 ادرس اتجاه تغير الدّالة f_m واستنتج قيم m التي من أجلها تقبل الدّالة f_m قيمتين حدّيتين يطلب تعيينهما.

3 M_m نقطة من المنحنى (C_m) فاصلتها x_m حيث $x_m=1-m$.
أثبت أنّه عندما m يمسح $\mathbb{R}$ فإنّ M_m تنتمي إلى منحن يطلب تعيين معادلة له.

4 ادرس حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، حيث $m\neq 2$، الوضعية النّسبية للمنحنيين (C) و (C_m).

5 احسب بدلالة العدد الحقيقي الموجب تماما α، $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنيين (C) و (C_3) والمستقيمين اللّذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$، ثمّ احسب : $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

I) f_k الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ حيث k وسيط حقيقي.

ليكن $(\mathcal{C}_k)$ التمثيل البياني للدالة f_k في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 بيّن أنّ كل المنحنيات $(\mathcal{C}_k)$ تمر من نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما.

2 احسب نهايتي الدالة f_k عند $-\infty$ وعند $+\infty$. (ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k).

3 أ) احسب $f_k'(x)$، ثم حدّد حسب قيم الوسيط الحقيقي k اتجاه تغير الدالة f_k.

ب) شكّل جدول تغيرات الدالة f_k من أجل k عدد حقيقي موجب تماما.

4 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي k الأوضاع النسبية للمنحنيين $(\mathcal{C}_k)$ و $(\mathcal{C}_{k+1})$.

II) f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـِ: $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$

نسمي $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 شكّل جدول تغيرات الدالة f، ثم أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$.

2 أ) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلّين في $\mathbb{R}$ أحدهما α حيث: $-1,28<\alpha<-1,27$.

ب) عيّن قيّم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ حلا وحيدا.

3 g الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيّن أنّه من أجل كل عدد حقيقي x فإنّ: $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ ثمّ استنتج دالة أصلية لِـ g على $\mathbb{R}$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب A مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ ومحور الفواصل والمستقيمين اللّذين معادلتاهما $x=-1$ و $x=0$.

1 تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين) ★★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

وليكن $(\mathcal{C}_f)$ تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى المعلم المتعامد $(O;\vec{i},\vec{j})$

(نأخذ $1cm$ وحدة الطول على محور الفواصل و $2cm$ وحدة الطول على محور التراتيب) .

1 برهن ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$. (يمكنك استبدال المتغير بوضع $t=\frac{1}{2}(x-1)^2$)

2 برهن ان f تقبل الاشتقاق على IR و من اجل كل x من IR لدينا : $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$.

3 اوجد إشارة $f'(x)$ على IR ، ثم استنتج اتجاه تغير f .

4 شكل جدول تغيرات الدالة f .

5 أوجد معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة من $(\mathcal{C}_f)$ ذات الفاصلة $(+1)$.

6 برهن ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم ؛ يطلب تحديد :

أ) إحداثيتي نقطة التماس لكل واحد منهم (القيم تكون مضبوطة) .

ب) معامل توجيه لكل مماس (القيم تكون مضبوطة) . ثم أكتب معادلة لكل من (d_1) ، (d_2) و (d_3) .

7 أرسم كل من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) في المعلم السابق .

8 m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y=m\,x$.

أ) برهن ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة يطلب إحداثياها .

ب) بقراءة بيانية ، اوجد قيم m الحقيقية التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة .

2 تماين مقترحة (ساعد أحمد) ★★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

أولا : g الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $g(x)=(4-2x)e^x-4$.

1 أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها.

2 بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α حيث $1,5<\alpha<1,6$.

3 استنتج إشارة $g(x)$.

ثانيا: f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$ وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1 بين أن المنحني (C_f) يقبل عند $-\infty$ و عند $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

2 برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{(e^x-2x)^2}$.

3 استنتج إشارة $f'(x)$ وشكل جدول تغيرات الدالة f .

つづく

4 أحسب $f(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

5 بين أن $f(\alpha)=-1+\frac{1}{\alpha-1}$ واستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

6 أنشئ المستقيمين المقاربين والمنحنى (C_f).

ثالثا: أ) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)m$.

ب) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد وإشارة حلول المعادلة $2x-2=(e^x-2x)(m+2)$

رابعا: 1 لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x)=-f(x)$

أ) أحسب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتج إشارة $F'(x)$.

ب) شكل جدول تغيرات الدالة F وانشئ تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

2 لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

* أحسب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $h'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة h .

3 لتكن u الدالة المعرفة كما يلي : $u(x)=\frac{1}{f(x)}$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة u .

ب) أحسب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $u'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة u .

4 لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة v .

ب) أحسب $v'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $v'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة v .

5 لتكن s الدالة المعرفة كما يلي : $s(x)=\ln f(x)$

أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة s .

ب) أحسب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $s'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة s .

6 لتكن t الدالة المعرفة كما يلي : $t(x)=e^{f(x)}$

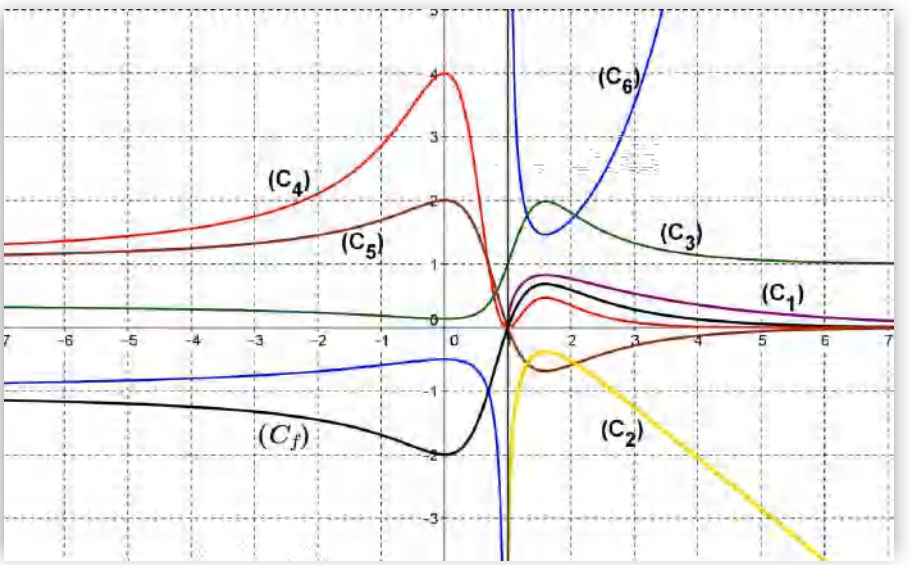
أ) أوجد مجموعة التعريف للدالة t .

ب) أحسب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتج إشارة $t'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة t .

つづく

خامسا : أرفق كل دالة بتمثيلها البياني

المنحنى	(C_1)	(C_2)	(C_3)	(C_4)	(C_5)	(C_6)
هو التمثيل البياني للدالة.....						



3 تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى) ★★★★★

الانتقال الـــى الحـــل

من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n لتكن الدالة f_n المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_n(x)=x^n e^{-x}$.

وليكن (C_n) تمثيلها البياني في معلم م . م . تعطى التمثيلات (C_1) و (C_2) و (C_3) في الشكل المرفق .

الجزء الأول : في الشكل المعطى مثلنا المنحنى (C_k) حيث k عدد طبيعي غير معدوم ورسمنا مماسا له (T_k) عند النقطة ذات الفاصلة 1 ورسمنا المنحنى (C_3) و المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5};0\right)$.

1 أ) عين نهايات الدالة f_1 عند $-\infty$ و $+\infty$

ب) ادرس تغيرات الدالة f_1 ثم حدد تغيراتها

ج) باستعمال المنحنى برر ان k هو عدد طبيعي اكبر من او يساوي 2

2 أ) برهن انه من اجل $n>1$ فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة O ونقطة أخرى يطلب تعيين احداثياتها

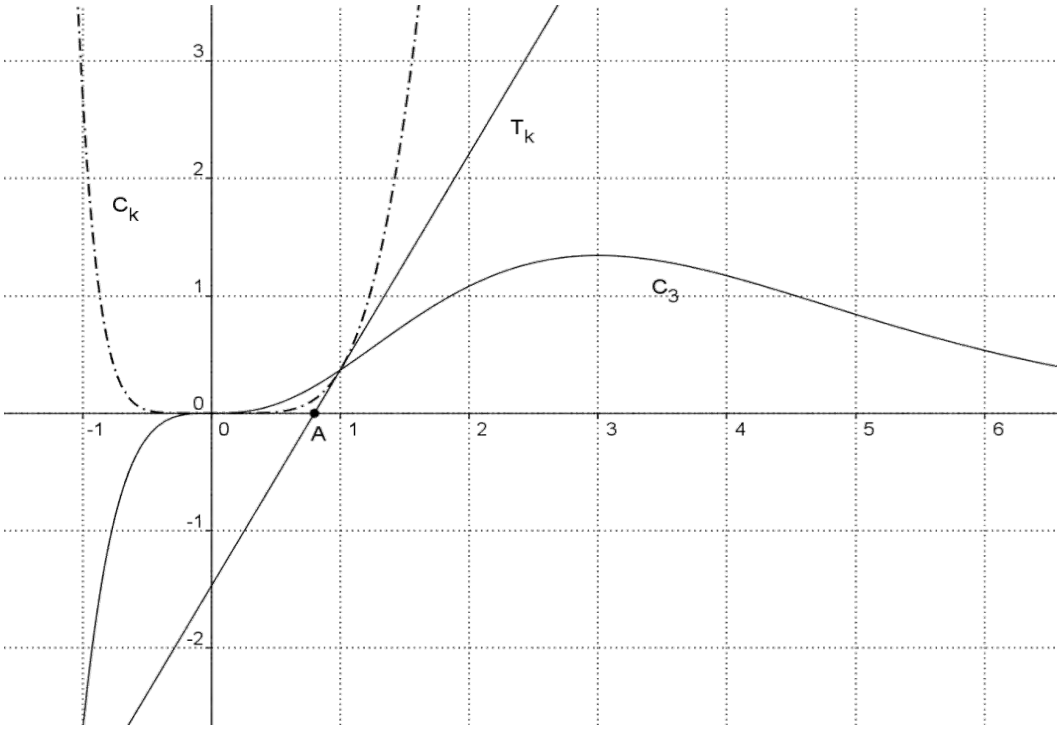
ب) تحقق انه من اجل $n\geq 2$ ومن اجل كل حقيقي x فان : $f'_n(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

3 في الشكل المعطى يبدو ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x=3$. تحقق من هذا التخمين بواسطة البرهان على ذلك .

4 أ) برهن ان المستقيم (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة ذات الاحداثيات $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$

ب) استنتج من خلال معطيات التمرين قيمة العدد الصحيح k

つづく

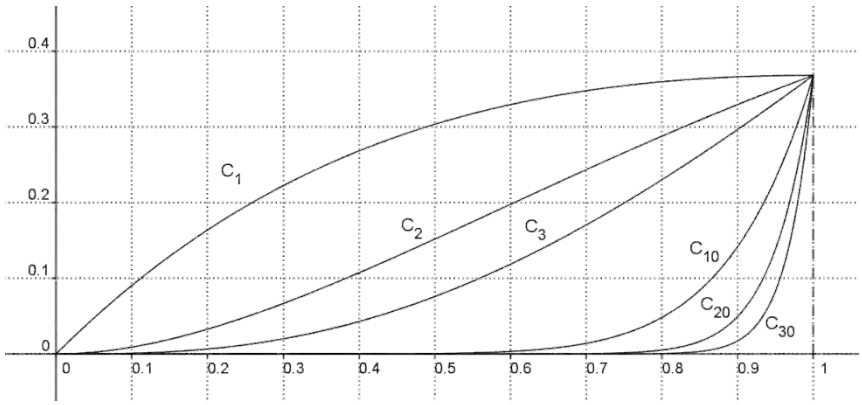


الجزء الثاني:

نعتبر المتتالية (I_n) المعرفة من اجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$ بـ : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

1 احسب (I_1)

2 في الشكل المقابل مثلنا الأجزاء من المنحنيات (C_1)و (C_2) و (C_3)و (C_{10})و (C_{20})و (C_{30}) في $[0,1]$



أ) بين بذكر تخمين مناسب حول اتجاه تغير المتتالية (I_n)

ب) برهن هذا التخمين

ج) استنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة

د) احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$

الجزء الأول :

نعتبر الدالة f_α المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f_\alpha(x)=e^{2x}-2\alpha e^{x}+3$.

وليكن (C_α) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1 عين حسب قيم الوسيط الحقيقي α عدد القيم الحدية للدالة f_α

2 نسمي ω_α النقطة الحدية في حالة وجودها :

أ) عين بدلالة α إحداثيي النقطة ω_α .

ب) عين مجموعة النقط ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$.

الجزء الثاني :

نضع في كل ما يأتي : $\alpha=1$ ، و لتكن f_1 الدالة التي نريد دراستها و (C_1) تمثيلها البياني .

1 أدرس تغيرات الدالة f_1 ، و المستقيمات المقاربة .

2 عين معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$.

3 أنشئ كلا من (T) و (C_1) .

4 (D_m) عائلات المستقيمات المعرفة بـ : $y=mx+3-m\ln 2$ ، حيث m وسيط حقيقي .

أ) بين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياها .

ب) ناقش بيانيا و حسب قيم الوسيط m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) .

5 نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كمايلي : $g(x)=-e^{2x}+2e^{x}+3$ ، و (C') منحناها البياني :

أ) أكتب $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$ ، ثم بين أن (C') و المنحني (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم (d) يطلب تحديد معادلته .

ب) أنشئ المنحني (C') في المعلم السابق .

6 أ) أحسب بـ cm^2 ، $\delta(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنيين (C_1) و (C') و المستقيمين :

$$\lambda<0 \ , \ x=\lambda \ , \ x=ln2 .$$

ب) أحسب نهاية $\delta(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $-\infty$.

ج) α عدد حقيقي أكبر تماماً من $ln2$.

- جد قيمة α حتى تكون مساحة الحيز المحدود بالمنحنيين (C_1) و (C') و المستقيمين :

$x=\alpha$, $x=ln2$ تساوي نهاية $\delta(\lambda)$ ، لما λ يؤول إلى $-\infty$.

في كل المسألة ، نعتبر المستوي منسوب إلى معلم متعامد وَ متجانس $\left(O\,;\vec{i},\vec{j}\right)$ حيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1cm$.
نرفق بكل عدد حقيقي α الدالة العددية f_α للمتغير الحقيقي x المعرفة بـ: $f_\alpha(x) = (x-\alpha)^2 e^x$ وَ (C_α) تمثيلها البياني .

الجزء الأول: نعتبر في هذا الجزء من أجل $\alpha = 0$ الدالة f_0 المعرفة بـ: $f_0(x) = x^2 e^x$

1 احسب : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_0(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty} f_0(x)$ ثم فسر النتيجة هندسياً .

2 أ-اثبت أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f'_0(x)$.
ب-استنتج إتجاه تغيرالدالة f_0 .

3 شكل جدول تغيرات الدالة f_0 ثم استنتج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$.

4 أثبت أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty;0[$ لدينا : $0 < \left(\dfrac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$.

5 أثبت أن (C_0)يقبل نقطتي إنعطاف يطلب تعيين إحداثيها .

6 اكتب معادلة المماس (Δ) للمنحنى (C_0) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

7 ليكن x_0 عدد حقيقي ، نعتبر (T) المماس للمنحنى (C_0) في النقطة ذات الفاصلة x_0 .
أ- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T) يوازي حامل محور الفواصل ؟
ب- هل يمكن تعيين x_0 حتى يكون (T)عمودي على المستقيم (Δ) ؟

8 أرسم كل من (Δ) وَ المنحنى (C_f) .

9 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي الموجب تماماً m عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $2\ln|x| + x - \ln(m) = 0$.

الجزء الثاني : نعتبر من أجل كل عدد طبيعي $n \geq 1$: $f_0^{(1)}$ ، $f_0^{(2)}$ ، $f_0^{(3)}$ ، .... ، $f_0^{(n)}$ المشتقات المتتابعة للدالة f_0 .

1 احسب كل من $f_0^{(1)}(x)$ ، $f_0^{(2)}(x)$ ، $f_0^{(3)}(x)$.

2 برهن بالتراجع من أجل كل $n \geq 1$: $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)e^x$ حيث a_n وَ b_n عددان حقيقيان يطلب تعينهما .

3 تحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2 \\ b_{n+1} = b_n + a_n \end{cases}$

4 اثبت أن (a_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r .

5 بين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$.

الجزء الثالث : لتكن الدالة k المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ وَ (C_k) تمثيلها البياني .

1 اكتب $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة . ادرس استمرارية الدالة k عند 0 .

2 ادرس قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 ، فسر النتيجة هندسياً .

3 اكتب معادلتي المماسين لـ (C_k) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

4 بين أنه يمكن اعتبار الدالة k كمركب دالتين عدديتين إحداهما الدالة f_0 .

5 بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x)\sqrt{f_0(x)}$.

6 استنتج اتجاه تغير الدالة k ثم شكل جدول تغيراتها .

つづく

7 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{k(x)}{x}$ ، فسر النتيجة هندسياً .

8 ارسم (C_k) بيان الدالة h في معلم آخر .

9 ناقش حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وَ إشارة حلول المعادلة : $|x|\sqrt{e^x}+x-m=0$.

الجزء الرابع : نعتبر الآن α عدد حقيقي كيفي .

1 احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_\alpha(x)$.

2 اثبت أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_\alpha(x)=(2+x-\alpha)(x-\alpha)e^x$.

3 ادرس اتجاه تغير الدالة f_α ثم شكل جدول تغيراتها .

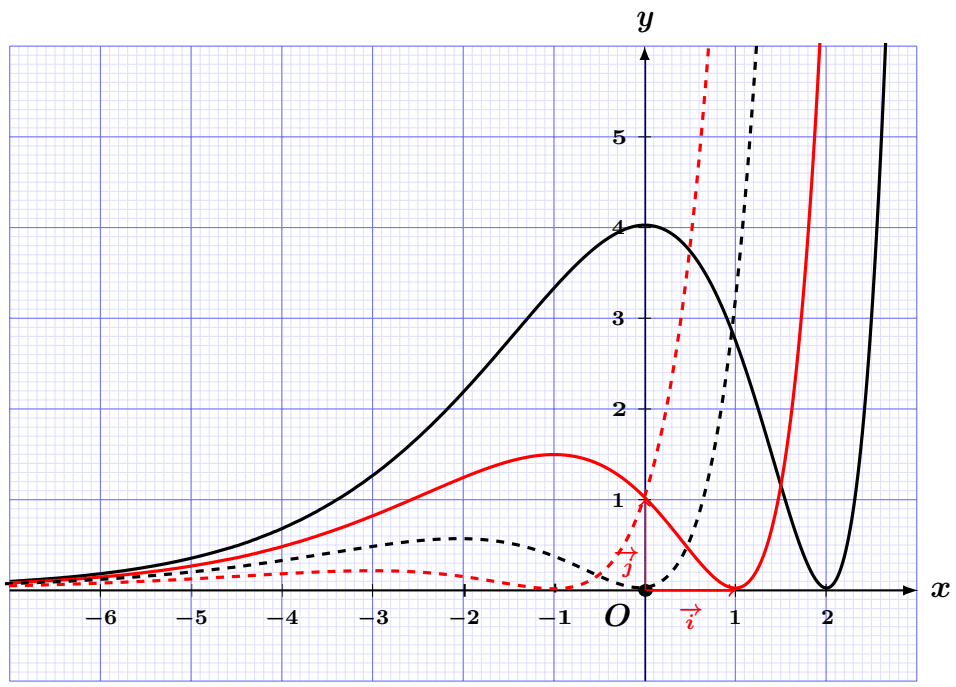
4 احسب من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f''_\alpha(x)$ وَ $f'''_\alpha(x)$.

5 بين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن : $f_\alpha^{(n)}(x)=\left[(x+n-\alpha)^2-n\right]e^x$
حيث $f_\alpha^{(n)}$ هي الدالة المشتقة النونية للدالة f_α على $\mathbb{R}$.

6 بين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتهما x_1 وَ x_2 يطلب تعيينهما .

7 كيف نختار قيمة α حتى يكون $x_1<0<x_2$.

8 إليك الشكل الموالي الذي يشتمل على أربع منحنيات موافقة لأربع قيم مختلفة للوسيط α .
- تعرف على هذه القيم الأربعة مع التعليل .



التمرين 01

سلسلة الدوال الأسية (مصطفاي عبد العزيز)

1. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = -1$ لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty} 3e^x-1=-1$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x+1=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3e^x-1}{e^x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x\left(3+e^{-x}\right)}{e^x\left(1+e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\left(3+e^{-x}\right)}{\left(1+e^{-x}\right)} = \dfrac{3}{1} = 3$ لأنّ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$

2. دراسة اتجاه تغيّر الدالة f.

الدالة f تقبل الإشتقاق على $\mathbb{R}$ ولدينا $f'(x) = \dfrac{3e^x\left(e^x+1\right)-e^x\left(3e^x-1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$

$$= \frac{e^x\left(3\left(e^x+1\right)-\left(3e^x-1\right)\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{e^x\left(3e^x+3-3e^x+1\right)}{\left(e^x+1\right)^2}$$

$$= \frac{4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

من أجل كل عدد حقيقي x، $f'(x)>0$ لأنّ $4e^x>0$ و $\left(e^x+1\right)^2>0$ وعليه الدالة f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$.

جدول تغيّرات الدالة f.

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	-1	3

3. تحديد معادلات المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f).

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=-1$ بجوار $-\infty$.

و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 3$ إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=3$ بجوار $+\infty$.

つづく

4. تبيين أنه، من أجل كل عدد حقيقي x، $f(x)+f(-x)=2$.

$$f(x)+f(-x)=\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}+\frac{3e^{-x}-1}{e^{-x}+1}=\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}+\frac{e^{-x}\left(3-e^{x}\right)}{e^{-x}\left(1+e^{x}\right)}=\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}+\frac{3-e^{x}}{1+e^{x}}=\frac{2e^{x}+2}{e^{x}+1}=2$$

تفسير النتيجة هندسيا.

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ فإنّ $-x\in\mathbb{R}$ ولدينا $f(x)+f(-x)=2$ معناه $f(-x)=2-f(x)$ أي $f(2\times0-x)=2\times1-f(x)$ وعليه النقطة $\omega(0;1)$ هي مركز تناظر للمنحنى (C_f).

5. تبيين أنّ المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه يساوي 1، يطلب كتابة معادلة له.

(T) معامل توجيهه 1 معناه $f'(x)=1$.

لنحل المعادلة $f'(x)=1$

$f'(x)=1$ معناه $\frac{4e^{x}}{\left(e^{x}+1\right)^{2}}=1$ ويكافئ $4e^{x}=e^{2x}+2e^{x}+1$ ويكافئ $e^{2x}-2e^{x}+1=0$ ويكافئ $\left(e^{x}-1\right)^{2}=0$

أي $x=0$ وبالتالي (C_f) يقبل مماسا (T) معامل توجيهه 1 عند النقطة ذات الفاصلة 0.

كتابة معادلة المماس (T).

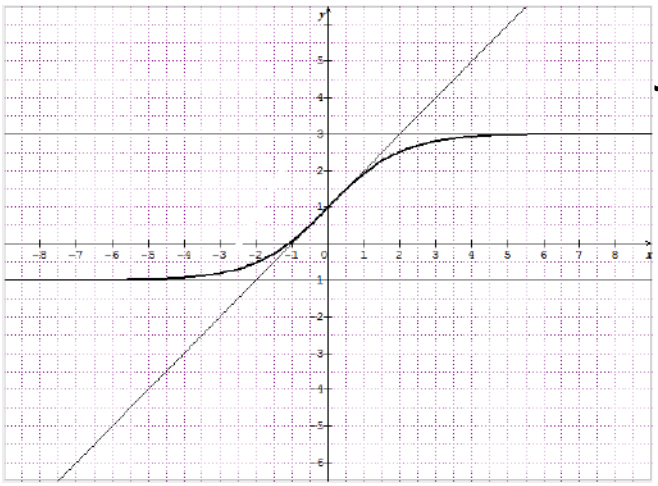
$y=f'(0)(x-0)+f(0)$ أي $y=x+1$

6. حساب إحداثيي نقطة تقاطع المنحنى (C_f) مع محور الفواصل.

$f(x)=0$ تكافئ $\frac{3e^{x}-1}{e^{x}+1}=0$ وتكافئ $3e^{x}-1=0$ وتكافئ $e^{x}=\frac{1}{3}$ أي $x=-\ln 3$

إذن $(C_f)\cap(Ox)=\{B(-\ln 3;0)\}$

رسم كلا من (T) و (C_f).



7. المناقشة بيانيا، حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد وإشارة حلول المعادلة: $(3-m)e^{x}=m+1$

$(3-m)e^{x}=m+1$ يكافئ $3e^{x}-me^{x}=m+1$

يكافئ $3e^{x}-1=m\left(e^{x}+1\right)$ أي $f(x)=m$

إذا كان $m\le-1$ أو $m\ge3$ فإن المعادلة لاتقبل حلا.

إذا كان $-1<m<1$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا سالبا

إذا كان $1<m<3$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا موجبا

إذا كان $m=1$ فإن المعادلة تقبل حلا واحد و وحيدا معدوما.

التمرين 02

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

1. من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)+f(-x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}-x+1-\frac{2e^{-x}}{e^{-x}+1}=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1}{e^x}+1}$$ أي

$$f(x)+f(-x)=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{\frac{2}{e^x}}{\frac{1+e^x}{e^x}}=2-\frac{2e^x}{e^x+1}-\frac{2}{1+e^x}=\frac{2e^x+2-2e^x-2}{1+e^x}=0$$

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا إذن $f(x)+f(-x)=0$

أي $f(-x)=-f(x)$ و منه f فردية.

f فردية إذن المبدأ O للمعلم مركز تناظر (C).

2.أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1}{e^{-x}}+1}=x+1-\frac{\frac{2}{e^{-x}}}{\frac{1+e^{-x}}{e^{-x}}}=x+1-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

ب) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}=0\end{cases}$

3.أ) من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(x)=x+1-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+2-\frac{2e^x}{e^x+1}=x-1+\frac{2(e^x+1)-2e^x}{e^x+1}$$

أي $f(x)=x-1+\frac{2}{e^x+1}$.

ب) لدينا $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x-1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^x+1)=+\infty$

إذن (C) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=x-1$.

ج) $f(x)-(x-1)=\frac{2}{e^x+1}$ إذن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$f(x)-(x-1)>0$، نستنتج أن (C) يقع فوق (Δ).

4. لدينا $f(x)=x-1+2\frac{1}{e^x+1}$

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x+1}=0\end{cases}$

つづく

- $f'(x)=1-\dfrac{2e^x}{(e^x+1)^2}$ ، تذكر أن مشتقة الدالة $\dfrac{1}{u}$ هي $-\dfrac{u'}{u^2}$

$$f'(x)=\frac{(e^x+1)^2-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+2e^x+1-2e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}+1}{(e^x+1)^2}$$

و من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا: $f'(x)>0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	0 ↗	$+\infty$

5.معادلة للمماس (d): $y=f'(0)(x-0)-f(0)$

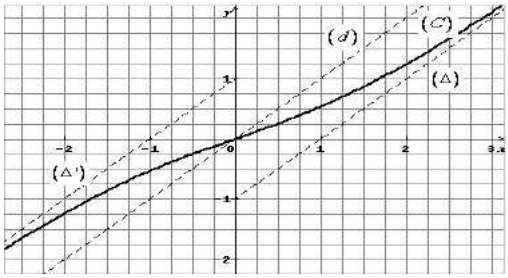
أي $y=1(x-0)-0$ أي $y=x$.

6. معادلة لـــ: (Δ'):

لدينا $f(x)=x+1-\dfrac{2}{e^{-x}+1}$ (انظر السؤال 2. أ)).

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(x+1)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}+1}=0 \quad \lim_{x\to-\infty}\left(e^{-x}+1\right)=+\infty$$

إذن (C)يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ') معادلته $y=x+1$.



7.

أ)تذكر أن Lnu هي دالة أصلية للدالة $\dfrac{u'}{u}$، u هي دالة موجبة تماما على مجال I و تقبل الاشتقاق على I .

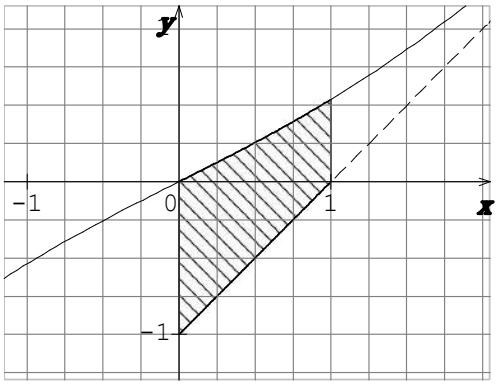
إذن $x\mapsto Ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة $x\mapsto\dfrac{e^x}{e^x+1}$ على $\mathbb{R}$

و الدالة $x\mapsto F(x)=\dfrac{x^2}{2}+x-2Ln(e^x+1)$ هي دالة أصلية للدالة

つづく

$x \mapsto f(x) = x + 1 - \dfrac{2e^x}{e^x + 1}$ على $\mathbb{R}$.

ب) نسمي S مساحة الشطح المطلوب.



$$S = \int_0^1 \left[f(x) - (x-1) \right] dx = \left[F(x) - \left(\frac{x^2}{2} - x \right) \right]_0^1$$

أي $$S = \left[\frac{x^2}{2} + x - 2Ln\left(e^x + 1\right) - \frac{x^2}{2} + x \right]_0^1$$

أي $$S = \left[2x - 2Ln\left(e^x + 1\right) \right]_0^1 = 2\left[x - Ln\left(e^x + 1\right) \right]_0^1$$

أي $$S = 2\left[Lne^x - Ln\left(e^x + 1\right) \right]_0^1 = 2\left[Ln\frac{e^x}{e^x + 1} \right]_0^1 = 2\left[Ln\frac{e}{e+1} - Ln\frac{1}{2} \right]$$

أي $S = 2\left[Ln\dfrac{\left(\frac{e}{e+1}\right)}{\left(\frac{1}{2}\right)} \right] = 2Ln\left(\dfrac{2e}{e+1}\right)$ إذن $S \simeq 0,76\ cm^2$.

التمرين 03

الديوان الوطني للامتحانات والمسابقات

الجزء A :

1. * محور التراتيب مستقيم مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$: $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = -\infty$.

* المستقيم الذي معادلته $y = 1$ مقارب للمنحنى $(\mathcal{C})$ عند $+\infty$

إذن $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1$.

* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

つづく

.2

أ) المستقيم الذي معادلته $y=1$ يقطع $(\mathcal{C})$ في نقطة وحيدة فاصلتها $-\frac{1}{2}$

إذن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلا وحيدا هو $-\frac{1}{2}$.

ب)الفواصل x لنقط $(\mathcal{C})$ التي تقع فوق المستقيم الذي معادلته $y=1$ هي كل الأعداد الحقيقية من المجموعة $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

نستنتج أن مجموعة حلول المعادلة $f(x)>1$ هي: $]-\infty;-1[\cup]0;+\infty[$.

الجزء B :

.1

أ) $f(x)=\dfrac{e^x\left(1+\dfrac{x}{e^x}\right)}{e^x\left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)}$ أي $f(x)=\dfrac{1+\dfrac{x}{e^x}}{1-\dfrac{1}{e^x}}$.

ب) لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x}\right)}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x}=0$ إذن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=1$.

.2

أ)إشارة e^x-1

- $e^x-1>0$ يكافئ $e^x>1$ و يكافئ $e^x>e^0$ و يكافئ $x>0$.
- $e^x-1>0$ يكافئ $x<0$.

ب)حل المترجحة $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$

$\dfrac{e^x+x}{e^x-1}>1$ تكافئ $\dfrac{e^x+x}{e^x-1}-1>0$ و تكافئ $\dfrac{e^x+x-\left(e^x-1\right)}{e^x-1}>0$

أي $\dfrac{e^x+x-e^x+1}{e^x-1}>0$ أي $\dfrac{x+1}{e^x-1}>0$

لنعين إشارة $\dfrac{x+1}{e^x-1}$ باستعمال جدول:

$x+1\geq 0$ يكافئ $x\geq -1$ و $x+1\leq 0$ يكافئ $x\leq -1$

درسنا سابقا (السؤال 2. أ)) إشارة e^x-1.

つづく

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$x+1$	$-$		0	$+$		$+$	
e^x-1	$-$			$-$		$+$	
$\frac{x+1}{e^x-1}$	$+$		0	$-$	‖	$+$	

.3

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x}{e^x-1}+x\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x+x\left(e^x-1\right)}{e^x-1}\right]$$

أي $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+x+xe^x-x}{e^x-1}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}\right]$

إذن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)+x\right]=0$ لأن $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0\\ \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0\end{cases}$.

نستنتج أن المنحنى الذي يمثل الدالة f يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته $y=-x$.

.4 $f(x)+x=\frac{e^x+xe^x}{e^x-1}=\frac{(x+1)e^x}{e^x-1}$

إشارة $f(x)+x$ هي إشارة $\frac{x+1}{e^x-1}$ (السؤال 2.ب))

- عندما $x\in]-\infty;-1[$ أو $x\in]0;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C})$ فوق (Δ).
- عندما $x\in]-1;0[$ أو $x\in]0;+\infty[$ يكون $(\mathcal{C})$ تحت (Δ).

التمرين 04

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

نعتبر الدالة العددية f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=e^x-ex-1$.

1) أ- حساب النهايات :

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(e^x-ex-1\right)=\lim_{x\to+\infty}\left[x\left(\frac{e^x}{x}-e-\frac{1}{x}\right)\right]=+\infty \text{ و } \lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(e^x-ex-1\right)=+\infty$$

ب- حساب $f'(x)$:

الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ومن أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^x-e$

$f'(x)=0$ تكافئ $e^x-e=0$ تكافئ $e^x=e$ تكافئ $x=1$.

つづく

من أجل $x \in]-\infty;1]$ ، يكون $e^x \leq e$ أي $f'(x) \leq 0$ وبالتالي الدالة f متناقصة على المجال $]-\infty;1]$.

من أجل $x \in [1;+\infty[$ ، يكون $e^x \geq e$ أي $f'(x) \geq 0$ وبالتالي الدالة f متزايدة على المجال $[1;+\infty[$.

جـ ـ جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

2) أ ـ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ $= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[e^x - ex - 1 - (-ex-1)\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - (-ex-1)\right]$.

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = -ex - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $-\infty$.

ب ـ كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 0 :

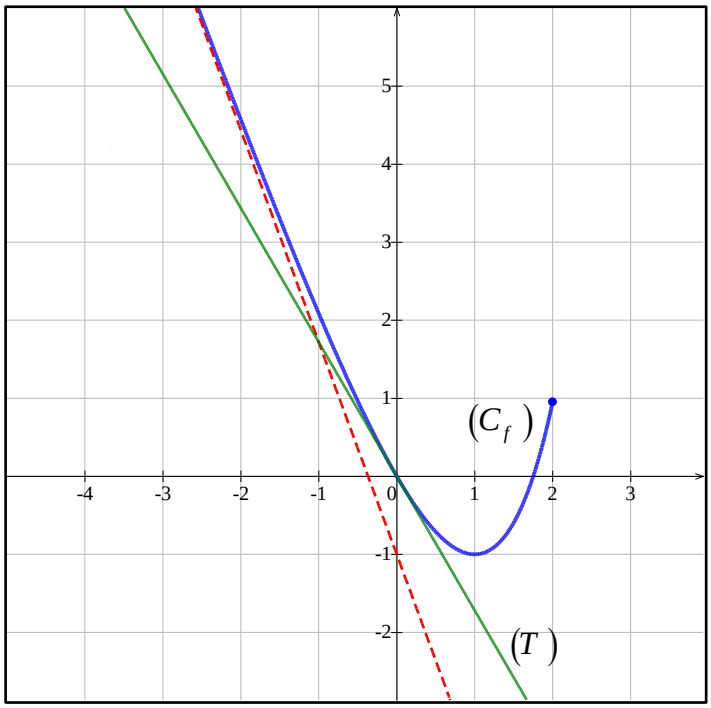
لدينا : $(T): y = f'(0)(x-0) + f(0)$ ومنه $(T): y = (1-e)x$.

جـ ـ تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل في المجال $]1,75;1,76[$ حلا وحيدا α .

الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]1;+\infty[$ و $]1,75;1,76[\subset]1;+\infty[$ و $\begin{cases} f(1.75) \approx -0,002 \\ f(1.76) \approx 0,02 \end{cases}$

أي $f(1,75) \times f(1,76) < 0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1.75 < \alpha < 1.76$

د ـ الرسم :



つづく

3) أ- حساب، بدلالة α، المساحة $A(\alpha)$ للحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f)، حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=\alpha$.

$$A(\alpha)=-\int_0^{\alpha} f(x)dx=-\int_0^{\alpha}\left(e^x-ex-1\right)dx=-\left[e^x-\frac{1}{2}ex^2-x\right]_0^{\alpha}=1-\left(e^{\alpha}-\frac{1}{2}e\alpha^2-\alpha\right)$$

ب- إثبات أنّ: $A(\alpha)=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$

لدينا: $f(\alpha)=0$ ومنه $e^{\alpha}-e\alpha-1=0$ أي $e^{\alpha}=e\alpha+1$ وبالتالي:

$$A(\alpha)=-e^{\alpha}+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=-(e\alpha+1)+\frac{1}{2}e\alpha^2+\alpha+1=\left(\frac{1}{2}e\alpha^2-e\alpha+\alpha\right)ua$$

(ua هي وحدة المساحات)

التمرين 05

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

I) g الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g(x)=2e^x-x^2-x$.

1) أ- الدالة g قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g'(x)=2e^x-2x-1$

دراسة إتجاه تغيّر الدالة g':

الدالة g' قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x، $g''(x)=2e^x-2=2(e^x-1)$

إشارة $g''(x)$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$		$+\ 0\ -$	

الدالة g' متناقصة على المجال $]-\infty;0]$ و متزايدة على المجال $[0;+\infty[$.

ب- تبيان أنه، من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

الدالة g' تقبل قيمة حدّية صغرى على $\mathbb{R}$ هي $g'(0)=1$ ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $g'(x)>0$

جـ- $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(2e^x-x^2-x\right)=-\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{2e^x}{x^2}-1-\frac{1}{x^2}\right)=+\infty$

جدول تغيّرات الدالة g:

x	$-\infty$		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

つづく

2) تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

الدالة g مستمرة و متزايدة تماما على $\mathbb{R}$ و $\begin{cases} g(-1,38)\approx -0,02 \\ g(-1,37)\approx 0,001 \end{cases}$ أي $g(-1,38)\times g(-1,37)<0$ و منه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,38<\alpha<-1,37$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II) f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x)=\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}$.

1) أ- حساب النهايات :

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^x\right)=0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-x\right)=+\infty \end{cases}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2}{1-xe^{-x}}\right)=+\infty$.

بـ- الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ و من أجل كل عدد حقيقي x :

$$f'(x)=\frac{\left(2xe^x+x^2e^x\right)\left(e^x-x\right)-\left(e^x-1\right)x^2e^x}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^x\left[(2+x)\left(e^x-x\right)-x\left(e^x-1\right)\right]}{\left(e^x-x\right)^2}=\frac{xe^xg(x)}{\left(e^x-x\right)^2}$$

جـ- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f على $\mathbb{R}$:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $x.g(x)$:

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

الدالة f متناقصة على المجال $[\alpha;0]$ و متزايدة على كل من المجالين $]0;+\infty[$ و $]-\infty;\alpha[$.

جدول تغيّرات الدالة f :

x	$-\infty$		α		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	$f(\alpha)$	↘	0	↗	$+\infty$

2) أ- تبيان أن : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$

つづく

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي $e^{\alpha}=\dfrac{\alpha^2-\alpha}{2}$ ومنه $f(\alpha)=\dfrac{\alpha^2e^{\alpha}}{e^{\alpha}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}\right)}{\dfrac{\alpha^2+\alpha}{2}-\alpha}=\dfrac{\alpha^2\left(\alpha^2+\alpha\right)}{\alpha^2-\alpha}=\dfrac{\alpha^3+\alpha^2}{\alpha-1}$

أي : $f(\alpha)=\alpha^2+2\alpha+2+\dfrac{2}{\alpha-1}$.

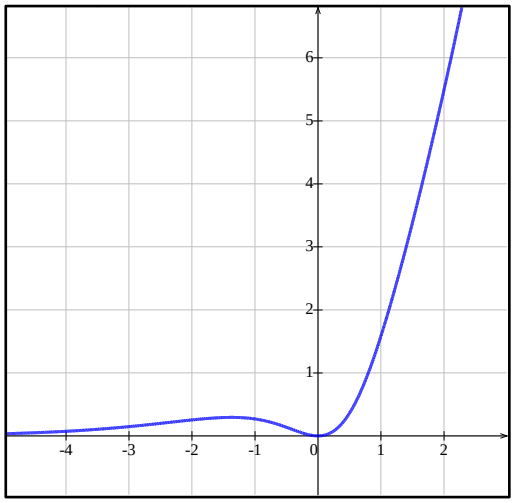
إستنتاج حصر للعدد $f(\alpha)$.

لدينا : $-1,38<\alpha<-1,37$ يكافئ $\begin{cases}-0,76<2\alpha+2<-0,74\\(-1,37)^2<\alpha^2<(-1,38)^2\\-2,38<\alpha-1<-2,37\\-\dfrac{2}{2,37}<\dfrac{2}{\alpha-1}<-\dfrac{2}{2,38}\end{cases}$ ومنه $0,27<f(\alpha)<0,32$.

بـ- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\dfrac{x^2e^x}{e^x-x}-x^2\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^3}{e^x-x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\dfrac{e^x}{x^3}-\dfrac{1}{x^2}}\right)=0$

التفسير البياني : المنحنى (C_f) و المنحنى الممثل للدالة "مربع" $(x\mapsto x^2)$ متقاربان عند $+\infty$.

جـ- الرسم :



التمرين 01

علوم تجريبية 2008 الموضوع الأول (07,5 نقط)

I) f دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $f(x)=(ax+b)e^{-x}+1$ ، (C_f) منحنى f

النقطة A تنتمي إلى (C_f) تعني : $f(-1)=1$ أي $(-a+b)e^{1}+1=1$ *

معامل توجيه المماس للمنحنى (C_f) عند A يساوي e– تعني أن $f'(-1)=-e$. **

f' ترمز للدالة المشتقة للدالة f . من أجل x من المجال $]-2,+\infty[$:

$f'(x)=(a)\times e^{-x}+(ax+b)\times\left(-e^{-x}\right)+0=(-ax-b+a)\times e^{-x}$ و $f'(-1)=(a-b+a)e^{1}=(2a-b)e$

من المعادلتين * و** نستنتج أن $(-a+b)=-1$ و $(2a-b)=-1$ و بالتالي $a=-1$ و $b=-1$

II) g دالة معرفة على المجال $]-2,+\infty[$ كما يلي : $g(x)=(-x-1)e^{-x}+1=f(x)$

ا) $\lim\limits_{n\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-xe^{-x}-e^{-x}\right)+1=0+0+1=1$. التفسير البياني : المستقيم الذي معادلته $y=1$ مقارب للمنحنى (C_g) الممثل للدالة g

ب) دراسة تغيرات الدالة g : * $g(-2)=(2-1)e^{2}+1=e^{2}+1$

* الدالة g قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $g'(x)=f'(x)=x\times e^{-x}$

إشارة g' هي إشارة x نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على $]0,+\infty[$ و متناقصة تماما على $]-2,0[$

* جدول تغيرات الدالة g

x	-2		0		$+\infty$
g'(x)		-	0	+	
g(x)	e^2+1	↘	0	↗	1

جـ) المنحنى (C_g) يقبل نقطة انعطاف :

الدالة المشتقة g' تقبل الاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $g''(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$

المشتقة الثانية g'' تنعدم عند 1 مع تغيير إشارتها نستنتج أن النقطة التي فاصلتها 1 من المنحنى (C_g) نقطة انعطاف. إحداثيتي I هما $I(1,g(1))$ أي $I\left(1,-2e^{-1}+1\right)$

د) معادلة المماس عند النقطة I : $y=g'(1)(x-1)+g(1)=e^{-1}(x-1)+1-2e^{-1}$ إي $y=e^{-1}x+1-3e^{-1}$

و) H الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يلي : $H(x)=(\alpha x+\beta)e^{-x}$

الدالة H قابلة للاشتقاق على $]-2,+\infty[$ و $H'(x)=(\alpha x+\beta)\times\left(-e^{-x}\right)+\alpha\times e^{-x}=(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}$

حتى تكون الدالة H دالة أصلية للدالة $x\mapsto g(x)-1$ على المجال $]-2,+\infty[$ يجب : من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]-2,+\infty[$: $H'(x)=g(x)-1$ أي $(-\alpha x-\beta+\alpha)e^{-x}=(-x-1)e^{-x}$

بالمطابقة نجد : $\alpha=1$ و $\beta=-2$

بما أن $g(x)=g(x)-1+1=H'(x)+1$ فإن الدوال الأصلية للدالة g على المجال $]-2,+\infty[$ هي الدوال $x\mapsto H(x)+x+b$ حيث b عدد حقيقي

البحث عن الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 : $H(0)+0+b=0$ أي $(0-2)e^{0}+b=0$ أي $b=2$

الدالة الأصلية للدالة g التي تنعدم عند 0 هي الدالة : $x\mapsto(x-2)e^{-x}+x+2$.

つづく

III) k الدالة العددية المعرفة على $]-2,+\infty[$ كما يلي : $k(x)=g(x^2)$

الدالة k مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على المجال $]-2,+\infty[$ فهي قابلة للاشتقاق على هذا المجال .

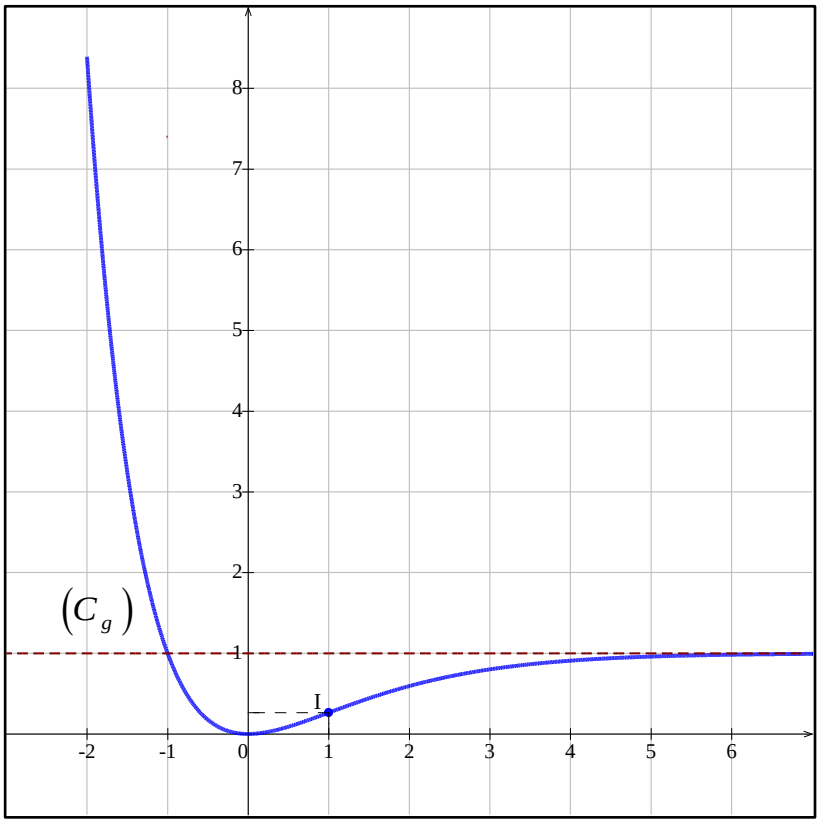
و من اجل كل عدد حقيق x من $]-2,+\infty[$: $k'(x)=2x\times g'(x^2)=2x\times\left(x^2\times e^{-x^2}\right)=2x^3\times e^{-x^2}$

إشارة المشتقة $k'(x)$ هي إشارة x إذا الدالة k لها نفس اتجاه تغير الدالة g .

نستنتج جدول تغيراتها :

x	2		0		$+\infty$
$k'(x)$		-	0	+	
$k(x)$	$-5e^{-4}+1$	↘	0	↗	$+\infty$

هـ) رسم المنحنى (C_g)



التمرين 02

مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

1) أ) الدالة g تقبل الاشتقاق على IR حيث $g'(x)=e^x-e$

* $g'(x)=0$ ومنه $e^x=e$ نجد x=1

* $g'(x)>0$ أي $e^x>e^1$ نجد $x>1$.اذن الدالة g متزايدة تماما على $[1;+\infty[$

* $g'(x)<0$ أي $e^x<e^1$ نجد $x<1$. اذن الدالة g متناقصة تماما على $]-\infty;1]$.

ب) من خلال اتجاه تغير g نستنتج انها تقبل قيمة حدية صغرى وهي 0 ومتناقصة على $]-\infty;1]$ ثم متزايدة على $[1;+\infty[$ اذن نستنتج ان المنحني دوما فوق محور الفواصل ومنه فالدالة موجبة دوما.

2) الدالة f تقبل الاشتقاق على IR حيث $f'(x)=e^x-ex=g(x)\geq 0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

3) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=0-(+\infty)=-\infty$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(e^x-\frac{1}{2}ex^2\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\left(\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{2}e\right)=+\infty$

جدول التغيرات:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	+	
f(x)	$-\infty$	↗		↗	$+\infty$

4) دراسة الوضع النسبي بين المنحنيين أي ندرس إشارة الفرق:

$f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-e^x+ex=-\frac{1}{2}ex^2+ex=\frac{e}{2}x(-x+2)$ واشارته من إشارة الجداء $x(-x+2)$.

جدول الإشارة:

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
ex		-	0	+		+	
$-x+2$		+		+	0	-	
$x(-x+2)$		-	0	+	0	-	

من خلال الجدول يتضح لنا ان (C_f) يكون فوق (C_g) في المجال $]0;2[$ وتحته في كل من المجالين $]-\infty;0[$ و $]0;+\infty[$ ويتقاطعن عند 0 و 2 .

6) حساب المساحة S:

$S=\int_0^2\left(f(x)-g(x)\right)dx=f(x)-g(x)=e^x-\frac{1}{2}ex^2-e^x+ex=\int_0^2\left(-\frac{1}{2}ex^2+ex\right)dx$

つづく

$$=-\frac{1}{2}e\int_0^2 x^2dx+e\int_0^2 xdx=-\frac{1}{2}e\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+e\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2=-\frac{1}{2}e\left[\frac{8}{3}\right]+e[2]=\frac{-4e}{3}+2e=\frac{2e}{3}ua$$

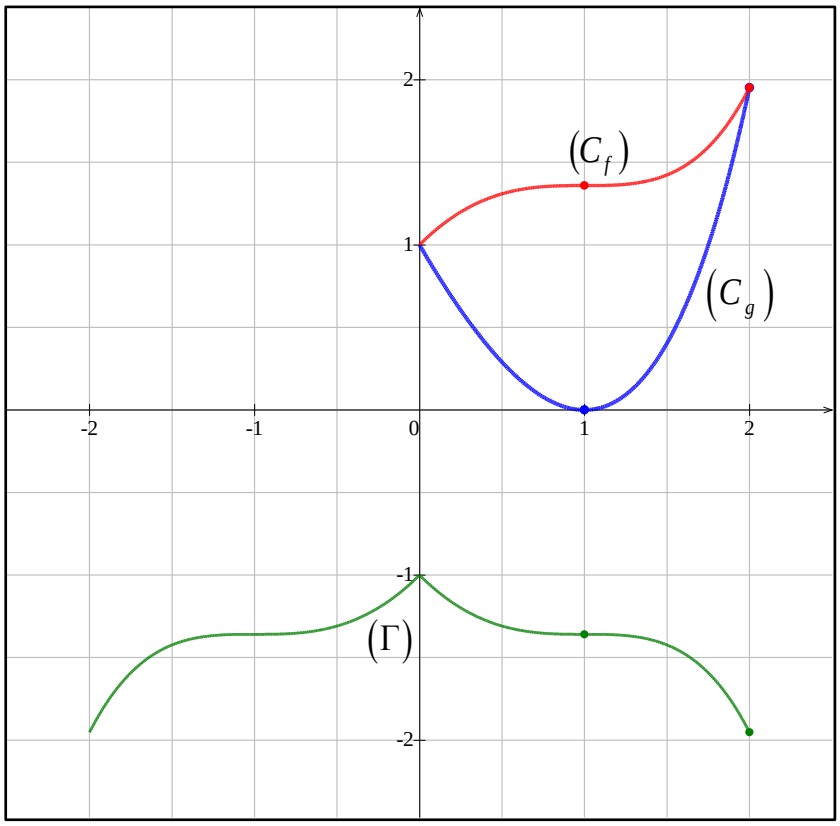
ووحدة المساحة هي $ua=2\times 2=4cm^2$ وعليه نجد $\boxed{S=\frac{2e}{3}\times 4=\frac{8e}{3}cm^2}$.

7) أ) الدالة h معرفة على $[-2;2]$ وهو مجال متناظر بالنسبة للصفر أي مهما كان $x\in[-2;2]$ فان $-x\in[-2;2]$.

$h(-x)=\frac{1}{2}e(-x)^2-e^{|-x|}=\frac{1}{2}ex^2-e^{|x|}=h(x)$ وعليه فان الدالة h زوجية.

ب) من اجل $x\in[0;2]$ نجد $h(x)+f(x)=\frac{1}{2}ex^2-e^x+e^x-\frac{1}{2}ex^2=0$ أي $h(x)=-f(x)$ وعليه فان المنحني (Γ) الممثل للدالة h هو نظيرالمنحني (C_f) بالنسبة لمحور الفواصل على المجال $[0;2]$ ، اما الجزء الاخر من المنحني (Γ) في المجال $[-2;0]$ هو نظير الجزء (Γ) من المجال $[0;2]$ بالنسبة لمحور التراتيب لان الدالة h زوجية

الرسم:



التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I - ... $g(x)=2x^2+2x-2x.e^x$ و $(\Delta): y=x$ و $(\gamma): y=e^x$

1. بما أن (γ) يقع فوق المستقيم (Δ) و لا يتقاطعان فإن $e^x-x>0$.

2. إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
إشارة $g(x)$		$+$	0	$-$	

II - لدينا $f(x)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}$:

1. إثبات النهاية $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x}\right]=1$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=1$ مقارب للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[\dfrac{2.e^x}{e^x-x}\right]=-0$. باستخدام التزايد المقارن. المستقيم ذو المعادلة $y=-1$

مقارب للمنحنى (C_f) جهة $-\infty$

2. أ-إثبات عبارة المشتقة $f'(x)=\dfrac{2e^x.(1-x)}{(e^x-x)^2}$ أي $f'(x)=\dfrac{2.e^x(e^x-x)-(e^x-1)2e^x}{(e^x-x)^2}$ و هو المطلوب .

ب-إشارة المشتقة $f'(x)$ من إشارة $1-x$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
إشارة $f'(x)$		$+$	0	$-$	

الدالة f متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ و متناقصة على المجال $[1;+\infty[$.

جدول تغيراتها :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$	-1	↗	$-1+\dfrac{2e}{e-1}$	↘	1

3. أ-معادلة المماس (T) :

$y=f'(0).x+f(0)$ أي أن $y=2x+1$.

ب-إثبات مساواة : $f(x)-(2x+1)=-1+\dfrac{2.e^x}{e^x-x}-2x-1=-2x-2+\dfrac{2e^x}{e^x-x}=\dfrac{(-2x-2).(e^x-x)+2e^x}{e^x-x}$

أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2-2e^x+2x+2e^x}{e^x-x}$ أي $f(x)-(2x+1)=\dfrac{-2xe^x+2x^2+2x}{e^x-x}$

إذن $f(x)-(2x+1)=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$ و هو المطلوب .

つづく

ج-استنتاج الوضعية :

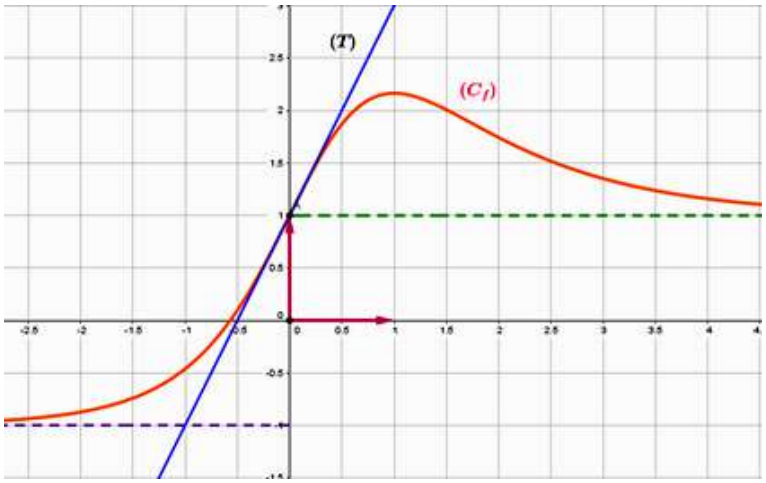
$f(x)-y=\dfrac{g(x)}{e^x-x}$ إشارتها من إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية	(T) يقع فوق (C_f)		(T) يقطع (C_f)		(T) يقع تحت (C_f)

و منه النقطة A هي نقطة الانعطاف لأن المماس (T) اخترق المنحنى (C_f) .

4. مبرهنة القيم المتوسطة $f(-0,5)=0,096$ و $f(-0,6)=-0,04$ بما أن الدالة مستمرة و متزايدة على المجال $]-\infty;1]$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيد α حيث $-0,6<\alpha<-0,5$

5. إنشاء المستقيمين المقاربين و المماس (T) و المنحنى (C_f) :



التمرين 04

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I) لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x)=2-x^2e^{1-x}$.

1) إثبات ان $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[2-\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)e\right]=2$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(\dfrac{x^2}{e^x}\right)\right]=0$ بالتزايد المقارن

التفسير الهندسي من ما سبق نستنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور الفواصل معادلته $y=2$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[2-x^2e^{1-x}\right]=-\infty$.

2) أ) إثبات عبارة المشتقة : لدينا $f'(x)=-2xe^{1-x}-x^2\left(-e^{1-x}\right)$ و منه $f'(x)=x^2e^{1-x}-2xe^{1-x}$ إذن $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ محققة .

つづく

ب)دراسة اتجاه تغير الدالة f : بما أن $f'(x)=x(x-2)e^{1-x}$ اشارتها من اشارة $x(x-2)$

و هو كثير حدود ينعدم عند 0 و 2

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
اشارة $x(x-2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه الدالة متزايدة على المجالين $]-\infty;0]$ و $[2;+\infty[$ متناقصة على المجال $[0\ ;\ 2]$.

جدول تغيراتها

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	2	↘	$2-\frac{4}{e}$	↗	2

3) كتابة معادلة المماس (T) : هي من الشكل $y=f'(1)(x-1)+f(1)$ و $f(1)=1$ و $f'(1)=-1$ و منه

$(T):\ y=-x+2$ أي $y=-(x-1)+1$

II) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ $h(x)=1-xe^{1-x}$.

1) ندرس تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}$ لدينا $h'(x)=-e^{1-x}+xe^{1-x}=(x-1)e^{1-x}$ إشارتها من إشارة $(x-1)$

و منه h متزايدة على المجال $[1;+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;1]$ ومنه h تقبل قيمة حدية صغرى هي $h(1)=0$

إذن من أجل كل عدد حقيقي x : $h(x)\geq 0$.

دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم $(T):\ y=-x+2$ نحسب الفرق $f(x)-y=2-x^2e^{1-x}+x-2$

و منه $f(x)-y=x-x^2e^{1-x}=x(1-xe^{1-x})=x.h(x)$ اشارته من إشارة x لان $h(x)\geq 0$

و منه (C_f) يقع فوق (T) على المجال $]0;+\infty[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]-\infty;0[$.

2) إثبات أن $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$

لدينا الدالة f مستمرة و متزايدة $[-0,7\ ;\ -0,6]$ و $f(-0,6)=0,22$; $f(-0,7)=-0,68$ فحسب

مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0,7<\alpha<-0,6$.

4) لدينا $F(x)=2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}$

التحقق : $F'(x)=2+(2x+2)e^{1-x}-(x^2+2x+2)e^{1-x}$ أي ان $F'(x)=2-x^2.e^{1-x}=f(x)$ و منه الدالة F دالة أصلية للدالة f .

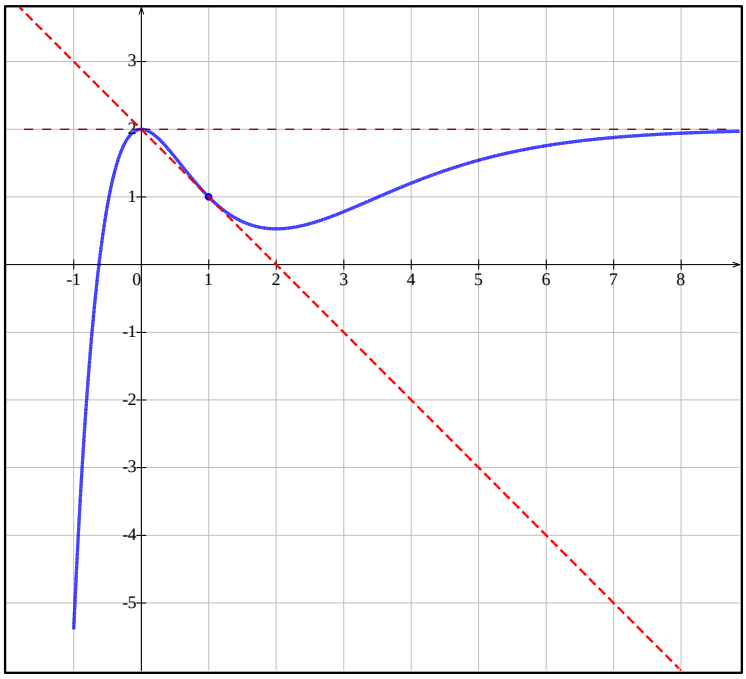
حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و حامل محور التراتيب و المستقيمين اللذين معادلتيهما : $x=0$; $x=1$

هي $A=\int_0^1 f(x)dx=\left[2x+(x^2+2x+2)e^{1-x}\right]_0^1=(7-2e)u.a$

つづく

مسائل المستوى الثاني ★★

إنشاء المنحنى (C_f) و المماس (T) :



التمرين 05

علوم تجريبية 2021 الموضوع الثاني (07 نقاط)

I) 1/ $g(-1) = 0$.

2/ إشارة $g(x)$ كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

II) 1/ لدينا $f(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$ و منه $f(x) = x\left[1 - \dfrac{x+1}{x}e^{-x-1}\right]$ و منه $f(x) = x\left[1 - \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)e^{-x-1}\right]$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

2/ أ) $f'(x) = 1 - e^{-x-1} + (x+1)e^{-x-1}$ و منه $f'(x) = 1 + xe^{-x-1}$ أي $f'(x) = g(x)$.

ب) إشارة $f'(x)$ هي نفسها إشارة $g(x)$ و منه $f'(x) > 0$ من أجل $x \in]-1;+\infty[$ و منه f متزايدة تماما على المجال $]-1;+\infty[$

$f'(x) < 0$ من أجل $x \in]-\infty,-1[$ و منه f متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1[$.

つづく

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-1)$	↗	$+\infty$

3/ أ) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-(x+1)e^{-x-1}) = 0$ ، و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x) = 0$ ، و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$.

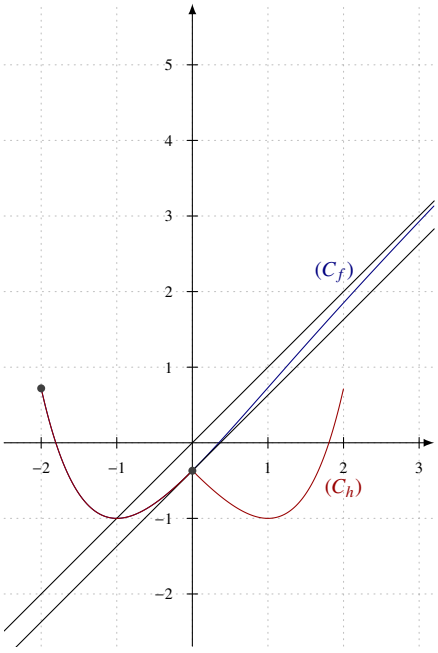
ب) ندرس إشارة $-(x+1)e^{-x+1}$

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$-(x+1)e^{-x-1}$		$+$	0	$-$	

و منه وضعية (C_f) و (Δ) كما يلي :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f(x)-y$		$+$	0	$-$	
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)		(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(-1;-1)$		(C_f) تحت (Δ)

ج) نحل المعادلة $f'(x) = 1$ أي $g(x) = 1$ أي $1 + xe^{-x-1} = 1$ و منه $xe^{-x-1} = 0$ و منه $x = 0$ و منه (C_f) يقبل مماسا (T) عند النقطة ذات الفاصلة 0 يوازي (Δ) معادلته $y = x + f(0)$ أي $y = x - \frac{1}{e}$.



4/ أ) الدالة f مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1,+\infty[$ و بالأخص المجال $[0.3, 0.4]$ و متناقصة تماما على المجال $]-\infty,-1[$ و بالأخص المجال $[-1.9,-1.8]$ و لدينا $f(0.3)\times f(0.4) < 0$ و أيضا $f(-1.9)\times f(-1.8) < 0$ و منه (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما α و β حيث $0.3 < \alpha < 0.4$ و $-1.9 < \beta < -1.8$.

5/ أ) من أجل $x \in [-2,2]$ فإنّ $-x \in [-2,2]$
و $h(-x) = -|-x| + (|-x|-1)e^{|-x|-1}$ و منه $h(-x) = h(x)$
لأنّ $|-x| = |x|$ و منه h زوجية .

من أجل $x \in [-2,0]$ لدينا $|x| = -x$ و منه
$h(x) = x - (x+1)e^{-x-1}$ أي $h(x) = f(x)$.

ج) على المجال $[-2,0]$ (C_h) ينطبق على (C_f) ، ثم نناظر هذا الجزء بالنسبة إلى حامل محور التراتيب لنتحصل على الجزء الباقي من (C_h)

التمرين 01

مجلة العبقري في الرياضيات (بوعزة مصطفى)

لدينا: $f(x)=(x+a)e^{-x}+b$ و$D_f=\mathbb{R}$، حيث a وb عددان حقيقيان.

1) بقراءة بيانية للمنحنى (C_f)،

أ) تعيين $f(-3)$، $f(0)$، $f'(-2)$:

من البيان لدينا: $\boxed{f(-3)=-3}$؛ $\boxed{f(0)=0}$

و $\boxed{f'(-2)=0}$ (**المماس عند النقطة ذات الفاصلة (2-) موازي لمحور الفواصل**).

ب) تعيين حسب قيم x إشارة $f'(x)$:

من البيان لدينا: f **متزايدة تماما** على المجال $]-\infty;-2]$ **ومتناقصة تماما** على المجال $[-2;+\infty[$ **إذن:**

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ج) المنحنى الممثل للدالة f' مشتقة الدالة f هو **المنحنى (2)** لأن:

- من أجل $x\in]-\infty;-2]$، **المنحنى (2)** يقع فوق محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x)\geq 0}$.
- ومن أجل $x\in[-2;+\infty[$، **المنحنى (2)** يقع تحت محور الفواصل أي: $\boxed{f'(x)\leq 0}$.

2)أ) تبيان أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$، $f(x)=(x+3)e^{-x}-3$:

من 1)أ)، لدينا: $\begin{cases}f(-3)=-3\\f(0)=0\\f'(-2)=0\end{cases}$ بحيث $f'(x)=1e^{-x}-e^{-x}(x+a)=(1-x-a)e^{-x}$

ومنه: $\begin{cases}(-3+a)e^{-(-3)}+b=-3\\(0+a)e^{-0}+b=0\\(1-(-2)-a)e^{-(-2)}=0\end{cases}$ أي: $\begin{cases}(-3+a)e^{3}+b=-3\ \ldots(1)\\a+b=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)\\(3-a)e^{2}=0\ \ldots\ldots\ldots\ldots(3)\end{cases}$

من (3) نجد: $\boxed{a=3}$، وبالتعويض في (2) نجد: $\boxed{b=-3}$، إذن: $\boxed{f(x)=(x+3)e^{-x}-3}$.

ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

x	$-\infty$		-2		α	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	
$f(x)$	$-\infty$	↗	e^2-3	↘	-2 ‖ -3	

بحيث، $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}[(x+3)e^{-x}-3]=-\infty$ لأن: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}(x+3)=-\infty\\\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=+\infty\end{cases}$

و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[(x+3)e^{-x}-3]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x}+\frac{3}{e^x}-3\right)=-3$

و $f(-2)=(-2+3)e^{-(-2)}-3=e^2-3$

ج) تبيان أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا يُطلب تعيين معادلة له:

بما أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=-3$،

فإن: المستقيم ذو المعادلة $\boxed{y=-3}$ (**الموازي لمحور الفواصل**) مقارب لـ (C_f) عند $+\infty$.

つづく

د) تبيان أن المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α محصور بين 1,50 و1,52:

لدينا: f مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[0; +\infty[$ (لأنها متناقصة تماما على المجال $[-2; +\infty[$)

ولدينا: $\begin{cases} f(0) = 0 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -3 \end{cases}$، أي: $-2 \in]-3; 0]$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = -2$ تقبل في المجال $[0; +\infty[$ حلا وحيدا α.

وبمأن: $\begin{cases} f(1,50) \simeq -1,996 \\ f(1,52) \simeq -2,011 \end{cases}$، أي: ($-2$ محصور بين $f(1,50)$ و$f(1,52)$)

فإن: $\boxed{1,50 < \alpha < 1,52}$.

3) لدينا: $F(x) = (-x-4)e^{-x}$ و$D_F = \mathbb{R}$؛ I العدد الحقيقي حيث: $I = \int_{-2}^{0} f(x)dx$.

أ) حساب $F'(x)$:

$$F'(x) = -1 \times e^{-x} - e^{-x}(-x-4) = (-1+x+4)e^{-x} = (x+3)e^{-x}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$:

بمأن $F'(x) = (x+3)e^{-x}$ فإن F أصلية للدالة $x \mapsto (x+3)e^{-x}$

وبالتالي: $x \mapsto F(x) - 3x$ هي أصلية للدالة f.

ب) إعطاء تفسيرا بيانيا للعدد I:

العدد I هو مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = -2$، $x = 0$.

تبرير الحصر التالي $4,5 < I < 5$ باعتبارات بيانية محضة:

جـ) حساب العدد I:

لدينا: $I = \int_{-2}^{0} f(x)\,dx = [(-x-4)e^{-x} - 3x]_{-2}^{0}$

ومنه: $I = [(-0-4)e^{-0} - 3(0)] - [(-(-2)-4)e^{-(-2)} - 3(-2)]$

وعليه: $I = -4 - (-2e^2 + 6) = -10 + 2e^2$.

التمرين 02

مجلة الرائد في الرياضيات (بالعبيدي محمد العربي)

1) حساب $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to 1^{<}} f(x)$

لدينا: $f(x) = \dfrac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}$ والمعرفة على $]-\infty;1[$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty}\left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right) = 2$$ لأن: $\lim\limits_{x \to -\infty}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = 1$ و $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\frac{1}{x-1}} = 1$

$$\lim_{x \to 1^{<}} f(x) = \lim_{x \to 1^{<}}\left(\frac{x}{x-1} + e^{\frac{1}{x-1}}\right) = -\infty$$ لأن: $\lim\limits_{x \to 1^{<}}\left(\dfrac{x}{x-1}\right) = -\infty$ و $\lim\limits_{x \to 1^{<}} e^{\frac{1}{x-1}} = 0$

つづく

استنتاج مستقيمين مقاربين للمنحنى (C)

من النهايتين السابقتين نستنتج أن : المستقيم ذا المعادلة : $x=1$ مقارب عمودي للمنحنى (C)

المستقيم ذا المعادلة : $y=2$ مقارب أفقي للمنحنى (C)

2)حساب $f'(x)$ وتبيان أن f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

لدينا: $f'(x)=\left(\frac{x}{x-1}\right)'+\left(e^{\frac{1}{x-1}}\right)'=\frac{-1}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^2}e^{\frac{1}{x-1}}$ ومنه: $f'(x)=\frac{-1}{(x-1)^2}\left[1+e^{\frac{1}{x-1}}\right]$

$f'(x)\prec 0$ لأن $1+e^{\frac{1}{x-1}}\succ 0$ و $\frac{-1}{(x-1)^2}\prec 0$ منه الدالة f متناقصة تماما على $]-\infty;1[$

تشكيل جدول تغيرات الدالة f على $]-\infty;1[$

x	$-\infty$		0		α		1
$f'(x)$		-		-		-	
$f(x)$	2	↘	e^{-1}	↘	0	↘	$+\infty$

3)تبيان أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α :

الدالة f متناقصة تماما على المجال $]-\infty;1[$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}1} f(x)=-\infty$ حسب مبرهنة القيم المتوسطة يوجد عدد وحيدا $\alpha\in]-\infty;1[$ يحقق: $f(\alpha)=0$

إيجاد حصرا للعدد α باستعمال الجدول المعطى

في الجدول لدينا: $f(0,21)=0,016$ و $f(0,22)=-0,005$ من الجدول المعطى نستنتج أن $\alpha\in]0,21;0,22[$.

4) رسم المستقيمين المقاربين والمنحنى (C) و (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

توضيح: كيفية رسم (C') المنحنى الممثل للدالة $|f|$.

لدينا: $|f(x)|=\begin{cases} f(x) & ;x\in]-\infty;\alpha] \\ -f(x) & ;x\in]\alpha;1[\end{cases}$ ومنه : $x\in]-\infty;\alpha]$ معناه $(C')=(C)$

$x\in]\alpha;1[$ معناه (C') نظير (C) بالنسبة لمحور الفواصل

5) تعيين بيانيا مجموعة قيم الأعداد الحقيقية m

المعادلة $|f(x)|=m$ تقبل حلان مختلفان في الإشارة معناه المستقيم ذو المعادلة $y=m$ يقطع المنحنى (C') في نقطتين مختلفتين من البيان نجد أن : $m\in]e^{-1};2[$

つづく

II-1) دراسة تغيرات g وتشكيل جدول تغيراتها على $]-\infty;1[$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$

*لدينا: $g(x)=f(2x-1)$ ومنه $g'(x)=2f'(2x-1)$ وعليه الدالة g لها نفس اتجاه تغير الدالة f أي g متناقصة تماما على $]-\infty;1[$ لأن $f'(2x-1)\prec 0$

جدول تغيرات الدالة g

x	$-\infty$	1
$g'(x)$	−	
$g(x)$	2 ↘	$-\infty$

2أ) التحقق أن: $g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=0$ **وأن:** $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'(\alpha)$

$g\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=f\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=f(\alpha)=0$ من الجواب 3 $g'\left(\frac{\alpha+1}{2}\right)=2f'\left(2\frac{\alpha+1}{2}-1\right)=2f'(\alpha)$

ب) استنتاج معادلة (T) المماس لـ g عند الفاصلة $\frac{\alpha+1}{2}$

لدينا: $(T):y=g'(\frac{\alpha+1}{2})(x-\frac{\alpha+1}{2})+g(\frac{\alpha+1}{2})$ ومنه: $(T):y=2f'(\alpha)(x-\frac{\alpha+1}{2})+0$

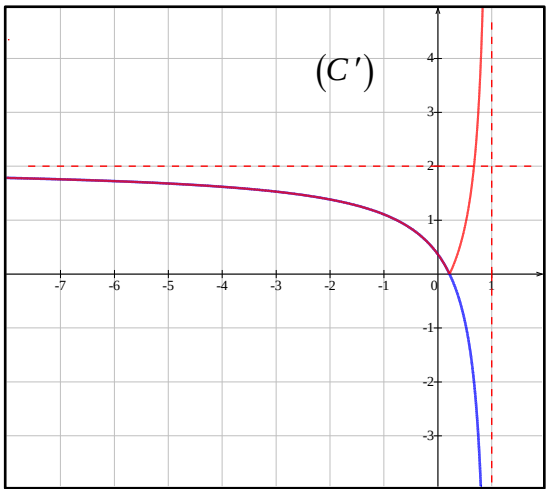
جـ) التحقق أن: $y=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$ **معادلة للمستقيم** (T)

لدينا: $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}-\frac{-1}{(\alpha-1)^2}e^{\frac{1}{\alpha-1}}$ لكن: $f(\alpha)=0$ معناه $-\frac{\alpha}{(\alpha-1)}=e^{\frac{1}{\alpha-1}}$

ومنه: $f'(\alpha)=\frac{-1}{(\alpha-1)^2}+\frac{\alpha}{(\alpha-1)^3}=\frac{1}{(\alpha-1)^3}$ وعليه تكون معادلة (T) كما يلي:

$(T):y=2\frac{1}{(\alpha-1)^3}(x-\frac{\alpha+1}{2})=\frac{2x}{(\alpha-1)^3}-\frac{\alpha+1}{(\alpha-1)^3}$

الرسم:



التمرين 03

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

$f(x)=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$

1- أ- حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3)e^{-x+1}=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x^3)e^{-x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-x^3}{e^{x-1}}=0$.

و منه $y=0$ معادلة للمستقيم المقارب الأفقي للمنحنى (C_f) جهة $+\infty$.

ب-إثبات أن عبارة المشتقة هي $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$:

نحسب المشتقة $f'(x)=(-3x^2+4x)e^{-x+1}-(-x^3+2x^2)e^{-x+1}$ و منه $f'(x)=(x^3-5x^2+4x)e^{-x+1}$ أي ان $f'(x)=x(x^2-5x+4)e^{-x+1}$ محققة .

استنتاج اتجاه تغير الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x^2-5x+4)$

لدينا (x^2-5x+4) له جذرين هما 1 و 4

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
اشارة (x^2-5x+4)		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
اشارة x		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
اشارة $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

و منه f متزايدة على المجالين $[0\,;1]$ و $[4;+\infty[$ متناقصة على المجالين $]-\infty\,;0]$ و $[1\,;4]$.

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		0		1		4		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	1	↘	$-32e^{-3}$	↗	0

2- كتابة معادلة (T) المماس للمنحنى (C_f) في النقطة ذات الفاصلة 2 هي $y=f'(2)(x-2)+f(2)$

$f'(2)=-4e^{-1}$ و $f(2)=0$ و منه معادلة المماس (T) هي $y=-\dfrac{4}{e}x+\dfrac{8}{e}$.

3- h دالة معرفة على $[0\,;+\infty[$ بـ $h(x)=x^2.e^{-x+2}-4$

دراسة تغيرات الدالة h : $h'(x)=2x.e^{-x+2}-x^2.e^{-x+2}=x(2-x)e^{-x+2}$ إشارتها من إشارة $(2-x)$

و منه فهي موجبة على المجال $[0\,;2]$ و سالبة على المجال $[2;+\infty[$ و منه الدالة h متزايدة على المجال $[0\,;2]$ و متناقصة على المجال $[2;+\infty[$ و لدينا $h(2)=0$ إذن $h(2)=0$ قيمة حدية كبرى و منه $h(x)$ إشارتها سالبة .

تحديد وضعية (C_f) بالنسبة إلى (T) على المجال $[0\,;+\infty[$:

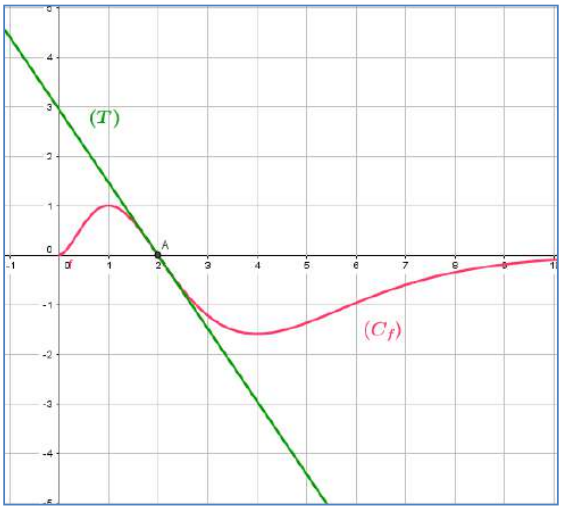
$f(x)-y=(-x^3+2x^2)e^{-x+1}+4e^{-1}x-8e^{-1}=-x^3.e^{-x+1}+2x^2.e^{-x+1}+4xe^{-1}-8e^{-1}$ و منه

$f(x)-y=-x^3.e^{-x+1}+4x.e^{-1}+2x^2.e^{-x+1}-8e^{-1}=-xe^{-1}(x^2.e^{-x+2}-4)+2e^{-1}(x^2e^{-x+2}-4)$ أي ان

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

$f(x)-y=\left(x^2.e^{-x+2}-4\right)(-x+2)e^{-1}$ أي ان $f(x)-y=h(x)(-x+2)e^{-1}$ بما أن إشارة $h(x)$ سالبة ومنه اشارة الفرق من إشارة $(x-2)$ أي ان (C_f) يقع فوق (T) على المجال $[0;2[$ و (C_f) يقع تحت (T) على المجال $]2;+\infty[$ و يتقاطعان في النقطة ذات الفاصلة 2 .



4- رسم المنحنى البياني (C_f) و المماس (T) :

5- المناقشة بيانيا :

المعادلة $(E).....f(x)=m(x-2)$ حلها هو ايجاد فواصل نقاط تقاطع (C_f) و المستقيم $(\Delta_{;m})$ ذو المعادلة $y=m(x-2)$.

لما $m\in\left]-\infty;-\frac{4}{e}\right[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

لما $m\in\left]-\frac{4}{e};0\right[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في ثلاثة نقاط و منه للمعادلة (E) ثلاثة حلول.

لما $m=0$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة (E) حلين .

لما $m\in]0;+\infty[$ نلاحظ أن (C_f) و $(\Delta_{;m})$ يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة (E) حل وحيد .

6- لدينا $g(x)=f\left(\frac{1}{x}\right)$ من السؤال رقم (1) بوضع $t=\frac{1}{x}$

و منه $\lim\limits_{x\to+\infty}t=0$ و $\lim\limits_{x\to0}t=+\infty$ نجد $\lim\limits_{x\to0}g(x)=\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=\lim\limits_{t\to0}f(t)=0$.

المشتقة : هي $g'(x)=-\frac{1}{x^2}f'\left(\frac{1}{x}\right)$ و منه $g'(x)=-\frac{1}{x^3}\left(\frac{1}{x^2}-5\frac{1}{x}+4\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ أي

$g'(x)=\frac{1}{x^5}\left(-1+5x-4x^2\right)e^{-\frac{1}{x}+1}$ و اشارته منه اشارة $\left(-1+5x-4x^2\right)$ و لها جذرين هما 1 و $\frac{1}{4}$

つづく

و منه g متزايدة على المجال $\left[\frac{1}{4};1\right]$ و متناقصة على المجالين $[1;+\infty[$; $\left]0;\frac{1}{4}\right]$ و $g(1)=f(1)$, $g\left(\frac{1}{4}\right)=f(4)$

جدول تغيرات الدالة g

x	0		$\frac{1}{4}$		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	↘	$-32e^{-3}$	↗	1	↘	0

التمرين 04

العملاق في الرياضيات (بواب نور الدين)

الجزء I :

1 دراسة تغيرات الدالة g :

النهايات :

لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}(3-x)e^x=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$.

و لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}(3-x)e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}3e^x-\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

(لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$) ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=0$.

اتجاه التغيّر :

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $g'(x)=(3-x)'\times e^x+(e^x)'\times(3-x)=(2-x)e^x$

إشارة $g'(x)$ هي إشارة $2-x$ ، نستنتج أن الدالة g متزايدة تماما على المجال $]-\infty;2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$.

جدول التغيّرات :

$g(2)=e^2-3$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	‖	$-$	
$g(x)$	0	↗	e^2-3	↘	$-\infty$

2 تبيان أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر α :

لدينا : $g(0)=(3-0)e^0-3=3-3=0$ ومنه 0 حل للمعادلة $g(x)=0$.

つづく

من جدول تغيرات g نلاحظ أنها مستمرة ومتناقصة تماما على $[2.82\,;\,2.83]$

زيادة على ذلك : $g(2.82)\approx 0.06$ و $g(2.83)\approx -0.08$ وبالتالي : $g(2.82)\times g(2.83)<0$

نستنتج حسب مبرهنة القيم المتوسطة أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $2.82<\alpha<2.83$.

إذن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلين أحدهما معدوم والآخر $\alpha\in\,]2.82\,;2.83[$.

3 استنتاج إشارة $g(x)$:

$g(x)=0$ يكافئ $x\in\{0\,;\alpha\}$

$g(x)<0$ يكافئ $x\in\,]-\infty\,;0[\cup]\alpha\,;+\infty[$

$g(x)>0$ يكافئ $x\in\,]0\,;\alpha[$

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

الجزء II :

1 أ- تبيان أن الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$:

تذكير : القول أن f تقبل الاشتقاق عند a يعني أنه عندما يؤول x إلى a ، فإن نسبة تزايد f بين العددين a و x تؤول إلى عدد حقيقي L ، أي :

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=L$$

لدينا : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{e^x-1}=$ ونعلم أن : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ وبالتالي :

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{x}{e^x-1}\times x=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\dfrac{x}{e^x-1}}\times x=1\times 0=0$$

إذن : الدالة f تقبل الاشتقاق عند $x_0=0$ وعددها المشتق عند 0 هو $f'(0)=0$

ب- كتابة معادلة لـ (T) مماس المنحني (C_f) عند المبدأ O :

تذكير : معادلة مماس المنحني الممثل لدالة f عند النقطة ذات الفاصلة a هي : $y=f'(a).(x-a)+f(a)$

لدينا : $f(0)=0$ و $f'(0)=0$ وبالتالي فإن معادلة المماس (T) هي $y=0$

2 أ- تبيان أن $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$:

تذكير : $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{1}{u}=0$ وَ $\lim\limits_{u\to+\infty}\dfrac{e^u}{u^n}=+\infty$ (n عدد طبيعي) .

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^3}{e^x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\left(\dfrac{e^x}{x^3}\right)}=0$. إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty}x^3e^{-x}=0$.

つづく

حساب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{e^x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x-1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^3}-\frac{1}{x^3}}=0$$

إذن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$:

نعلم أن : $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} x^3=-\infty$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$.

ب- تبيان أنه من أجل $x\neq 0$ فإن $f'(x)=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$:

$$f'(x)=\frac{(x^3)'(e^x-1)-(e^x-1)'\times x^3}{(e^x-1)^2}=\frac{3x^2(e^x-1)-x^3e^x}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{x^2[(3-x)e^x-3]}{(e^x-1)^2}=\frac{x^2}{(e^x-1)^2}g(x)$$

جـ- التحقق أن $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$:

لدينا : $g(\alpha)=0$ أي : $(3-\alpha)e^\alpha-3$ ومنه : $e^\alpha=\frac{3}{3-\alpha}$ وبالتالي :

$$f(\alpha)=\frac{\alpha^3}{e^\alpha-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{3}{3-\alpha}-1}=\frac{\alpha^3}{\frac{\alpha}{3-\alpha}}=\alpha^3\times\frac{3-\alpha}{\alpha}=\alpha^2(3-\alpha)$$ إذن : $f(\alpha)=\alpha^2(3-\alpha)$

تعيين حصر للعدد $f(\alpha)$:

لدينا : $2.82<\alpha<2.83$ ومنه : $-2.83<-\alpha<-2.82$ (الضرب في -1)

وبإضافة العدد 3 لجميع الحدود ينتج : $3-2.83<3-\alpha<3-2.82$

وبالتالي : $0.17<3-\alpha<0.18$ ... (1)

ومن : $2.82<\alpha<2.83$ نحصل على : $(2.82)^2<\alpha^2<(2.83)^2$

وبالتالي : $7.95<\alpha^2<8.01$ ... (2)

من (1) و (2) وبالضرب طرف في طرف ينتج : $1.35<\alpha^2(3-\alpha)<1.44$

إذن : $1.35<f(\alpha)<1.44$

つづく

د- جدول تغيّرات الدالة f :

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ ، وبالتالي فإن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0\,;\,\alpha]$ ومتناقصة تماما على كل من المجالين $]-\infty\,;\,0]$ و $[\alpha\,;\,+\infty[$.

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$f(\alpha)$	↘	$-\infty$

3 أ- حساب $f(x)+x^3$:

من أجل $x\neq 0$: $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

استنتاج الوضعية النسبية لـ (C_f) و (C) منحني الدالة $x\mapsto -x^3$:

إشارة الفرق $f(x)-(-x^3)$ أي : $f(x)+x^3$ هي إشارة الجداء $x(e^x-1)$

يمكن الاستعانة بجدول الإشارة للحصول على النتائج الآتية :

- إذا كان $x=0$ يكون $f(x)-(-x^3)=0$ ومنه (C) يقطع (C_f) في النقطة O

- إذا كان $x\neq 0$ يكون $f(x)-(-x^3)>0$ ومنه (C_f) يقع فوق (C) .

ب- تبيان أن $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$:

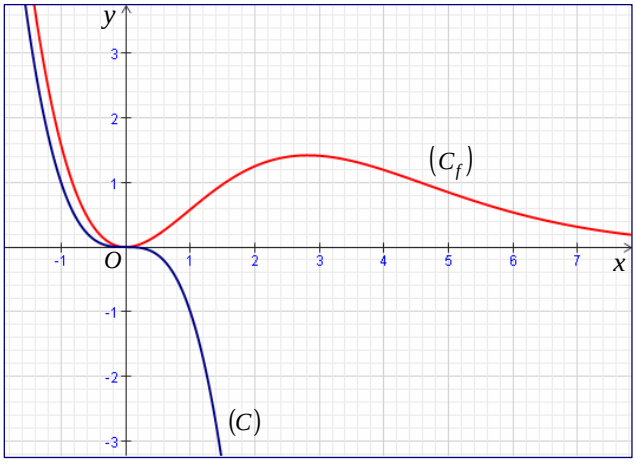
من أجل $x\neq 0$ ، لدينا : $f(x)+x^3=\dfrac{x^3}{e^x-1}+x^3=\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}$

ونعلم أن $\lim\limits_{x\to-\infty}x^3e^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$ ومنه : $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^3e^x}{e^x-1}=0$ إذن : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x^3\right)=0$.

هندسيا : المنحني (C)

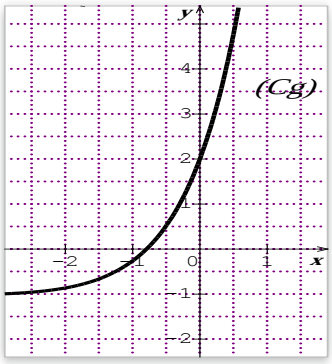
هو منحني مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

4 رسم (C) و (C_f) :



التمرين 05

كتابة الأستاذ (بعون لقمان)



I. g الدالة المعرّفة على IR بـ : $g(x)=(x+3)e^x-1$ ومنحناها البياني :

أ) بقراءة بيانية : نلاحظ أنّ : $g(-1)<0$ و أنّ : $g\left(\frac{-1}{2}\right)>0$.

ب) لدينا الدالة g مستمرّة ومتزايدة تماما على IR إذا فهي مستمرّة ومتزايدة تماما على المجال $\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ وكذلك لدينا : $g\left(\frac{-1}{2}\right)\times g(-1)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1<\alpha<-\frac{1}{2}$ مع $g(\alpha)=0$.

التحقق أنّ : $-0.8<\alpha<-0.7$: لدينا $]-0.8;-0.7[\subset\left]-1;-\frac{1}{2}\right[$ ومنه g مستمرّة ومتزايدة تماما على $]-0.8;-0.7[$ و $g(-0.8)\times g(-0.7)<0$ ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإنّ المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $-0.8<\alpha<-0.7$

جـ) استنتاج إشارة $g(x)$ على IR : لدينا من خلال البيان نجد أنّ : $g(x)<0$ لمّا $x<\alpha$ و $g(x)>0$ لمّا $x>\alpha$ و $g(x)=0$ لمّا $x=\alpha$. (يمكن تلخيص الإشارة في جدول) .

II. f الدالة المعرّفة على IR ب : $f(x)=(x+2)(e^x-1)$. و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1. حساب النهايات : $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^x-1)\right]=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+2)(e^x-1)\right]=+\infty$

2. الدالة f قابلة للاشتقاق على IR و:

$f'(x)=1.(e^x-1)+e^x(x+2)=e^x-1+xe^x+2e^x=(x+3)e^x-1=g(x)$ و هو المطلوب

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على IR :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)$: لدينا :

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)+x\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^x-1)+x\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(xe^x-x+2e^x-2+x\right)=-2$ (لأنّ $\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}2e^x=0$) . فنجد : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+2)(e^x-1)+x+2\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(f(x)-(-x-2)\right)=0$ ومنه (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $-\infty$ معادلته : $y=-x-2$.

つづく

ب) لدراسة الوضع النسبي بين (C_f) و المستقيم (Δ) ندرس إشارة الفرق : $f(x)-y$:

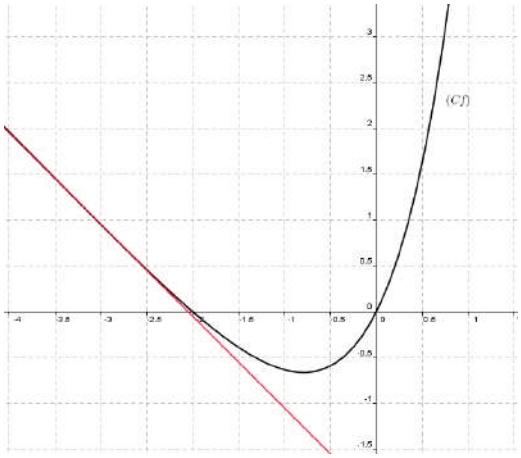
$f(x)-y=\left[(x+2)(e^x-1)+(x+2)\right]=\left[(x+2)(e^x-1+1)\right]$ ومنه $f(x)-y=(x+2)e^x$ نجد :

فنلخص الوضعية في الجدول التالي : $\begin{cases}e^x>0\\x=-2\end{cases}$ معناه $\begin{cases}e^x>0\\x+2=0\end{cases}$

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)-y$	-	0	+
الوضعية	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(-2;0)$	(C_f) فوق (Δ)

جـ) (T) يوازي (Δ) معناه (T) و (Δ) لهما نفس معامل التوجيه أي : $f'(x_0)=-1$ ومنه $g(x_0)=-1$ بحل المعادلة نجد : $x_0=-3$. ومنه $(T):y=f'(-3)(x+3)+f(-3)$ نجد : $(T):y=-x-2-e^{-3}$.

4. الرسم :



5. حساب $f(x)-g(x)$:

$f(x)-g(x)=(x+2)(e^x-1)-(x+3)e^x-1=-e^x-x-1$

فنجد أنّ : $f(x)=f'(x)-e^x-x-1$.

استنتاج دالة أصلية للدالة f على IR .

أي : $F(x)=f(x)-e^x-\frac{1}{2}x^2-x$.

و منه : $F(x)=(x+3)e^x-2e^x-\frac{1}{2}x^2-2x$. هي دالّة أصلية للدالة f على IR .

6. h دالة معرّفة على IR بـ : $h(x)=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1$.

أ) h دالة زوجيّة معناه : D_h متناظرة بالنسبة الى 0 و من أجل كلّ $x\in D_h$ فإنّ : $h(-x)=h(x)$

$h(-x)=|-x|\left(e^{|-x|-2}-1\right)+1=|x|\left(e^{|x|-2}-1\right)+1=h(x)$. ومنه h دالة زوجيّة .

ب) لدينا من أجل كل $x\in[0;+\infty[$: $h(x)=x\left(e^{x-2}-1\right)+1$ و $f(x-2)+1=(x-2+2)\left(e^{x-2}-1\right)+1=h(x)$

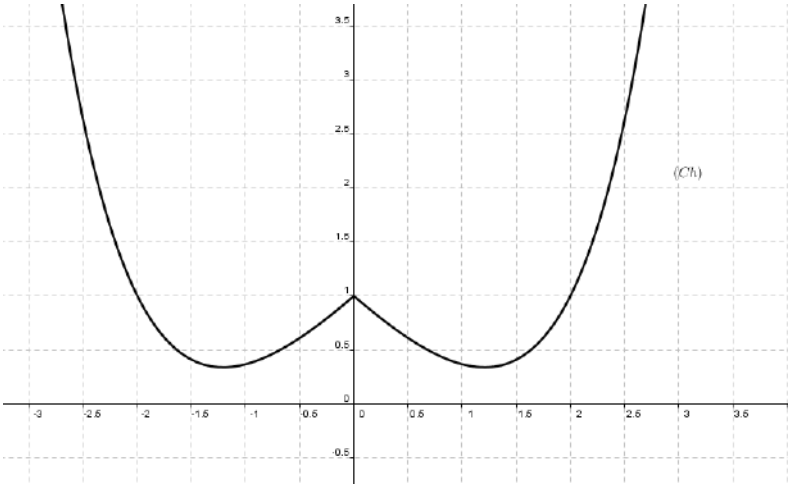
و هو المطلوب .

つづく

مسائل المستوى الثالث ★★★

جـ) يتم رسم المنحنى (C_h) انطلاقا من (C_f) على المجال $]0;+\infty[$ وذلك بالانسحاب الذي شعاعه $\vec{v}\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ وبما أنّ h دالة زوجية أي منحناها البياني مناظر بالنسبة الى محور التراتيب ومنه نكمل الجزء المتبقي من (C_h) بالتناظر بالنسبة الى محور التراتيب .

الرسم :



التمرين 01

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

الجزء الأول :

1- حل المعادلة $g(x)=0$:

$g(x)=0$ تكافئ $2e^{2x}-5e^{x}+2=0 \leftarrow (1)$

(1) تكافئ $2e^{2x}-4e^{x}-e^{x}+2=0$ تكافئ $2e^{x}(e^{x}-2)-(e^{x}-2)=0$

تكافئ $(e^{x}-2)(2e^{x}-1)=0$ تكافئ $\begin{bmatrix} e^{x}=2 \\ e^{x}=\frac{1}{2} \end{bmatrix}$ ومنه $\begin{bmatrix} x=ln2 \\ x=-ln2 \end{bmatrix}$

إذا $S_{(1)}=\{ln2,-ln2\}$

2- تحليل $g(x)$ وإشارته :

لدينا $g(x)=2e^{2x}-5e^{x}+2$ ومنه $g(x)=(e^{x}-2)(2e^{x}-1)$

x	$-\infty$		$-ln2$		$ln2$	$+\infty$
$2e^{x}-1$	$-$	0	$+$		$+$	
$e^{x}-2$	$-$		$-$	0	$+$	
الجداء	$+$	0	$-$	0	$+$	

ومنه نستنتج أن :

$$\begin{cases} g(x)<0 \,/\, x\in]-ln2;ln2[\\ g(x)=0 \,/\, x\in\{-ln2,ln2\} \\ g(x)>0 \,/\, x\in]-\infty;-ln2[\cup]ln2;+\infty[\end{cases}$$

الجزء الثاني :

- لدينا الدالة $f(x)=2x+\dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$ معرفة على $\mathbb{R}^{*}$.

1 - التحقق انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$ لدينا $f(-x)+f(x)=-3$

$$f(-x)+f(x)=-2x+\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+2x+\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}$$

$$=\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}\times\frac{e^{x}}{e^{x}}$$

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$

$$=\frac{2e^{x}-1}{1-e^{x}}+\frac{2-e^{x}}{e^{x}-1}=\frac{-2e^{x}+1+2-e^{x}}{e^{x}-1}$$

$$=\frac{-3(e^{x}-1)}{e^{x}-1}=-3$$

- نستنتج ان (C_f) متناظر بالنسبة للنقطة $(0;-\frac{3}{2})$

لأنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}^{*}$ لدينا $f(0-x)+f(0+x)=2(\frac{-3}{2})$

つづく

2 - أ)- التحقق انه من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ لدينا $f(x) = 2x + \dfrac{2-e^x}{e^x-1}$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$ $f(x) = 2x + \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} \times \dfrac{e^x}{e^x} = 2x + \dfrac{2-e^x}{e^x-1}$

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-e^x}{e^x-1} = -2 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

وبذلك $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{2-e^x}{e^x-1} = -2$.

ب)- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -1 \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

وبذلك $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - 2x = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{x}} = -1$.

جـ)- إشارة $(1-e^{-x})$

لدينا $1-e^{-x} = 0$ من أجل $x = 0$ ومنه نستنتج الإشارة

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$1-e^{-x}$	$-$	0	$+$

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 2x = 0;\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 1-e^{-x} = 0^- \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} 2e^{-x}-1 = 1;\ \lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = -\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{<}0} f(x) = -\infty$.

- لدينا $\begin{cases} \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2x = 0;\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 1-e^{-x} = 0^+ \\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} 2e^{-x}-1 = 1;\ \lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} \dfrac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}} = +\infty \end{cases}$ ومنه $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x) = +\infty$.

د)- المستقيمات المقاربة للمنحنى (C_f) :

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 2x = -2$ فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - (2x-2) = 0$

ومنه المستقيم (Δ') الذي معادلته $y = 2x-2$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $-\infty$.

つづく

- بما أن $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-2x=-1$ فان

ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=2x-1$ مقارب مائل لـ (C_f) بجوار $+\infty$.

- بما ان $\left|\lim\limits_{x\to 0} f(x)\right|=+\infty$ ومنه نستنتج أن (C_f) يقبل محور التراتيب كمستقيم مقارب .

3 – أ)– التحقق من صحة عبارة $f'(x)$:

لدينا من اجل كل $f(x)=2x+\dfrac{2-e^x}{e^x-1}$ لدينا :

ومنه

$$f'(x)=2+\frac{-e^x(e^x-1)-e^x(2-e^x)}{(e^x-1)^2}=\frac{2(e^x-1)^2-e^{2x}+e^x-2e^x+e^{2x}}{(e^x-1)^2}$$

$$=\frac{2e^{2x}-4e^x+2-e^x}{(e^x-1)^2}=\frac{2e^{2x}-5e^x+2}{(e^x-1)^2}=\frac{g(x)}{(e^x-1)^2}$$

ب)– اتجاه التغير وجدول التغيرات:

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}^*$.

ومنه f متزايدة تماما في المجال $]-\infty;-\ln 2]$ والمجال $[\ln 2;+\infty[$

ومتناقصة تماما على المجالين $[-\ln 2;0[$ والمجال $]0;\ln 2]$.

– جدول تغيرات الدالة f :

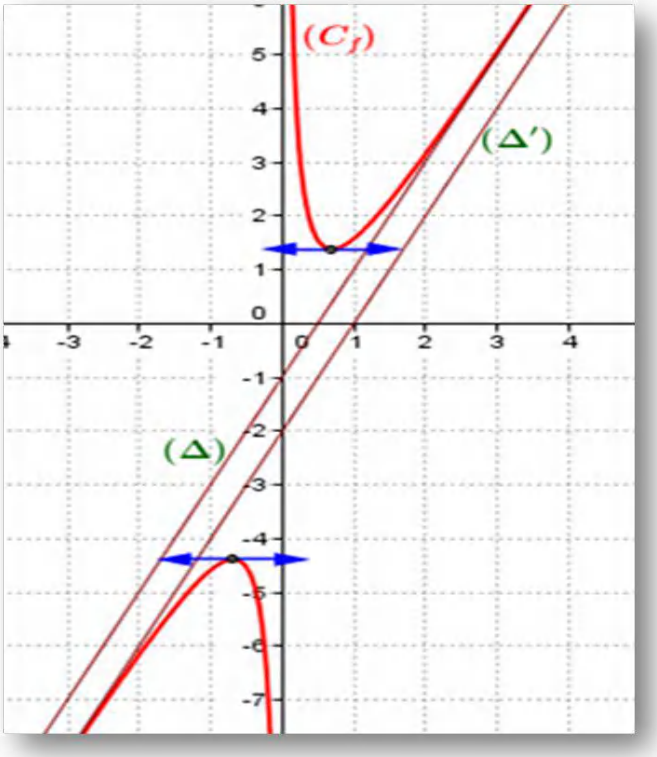
لدينا $f(\ln 2)=2\ln 2-1+1$ $=2\ln 2\approx 1,38$

و $f(-\ln 2)=-3-f(\ln 2)$ $=-3-2\ln 2\approx -4,38$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$ $\|$	$-$ 0	$+$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-4,38$	↘ $-\infty$ $\|$	$+\infty$ ↘	↗ $+\infty$
				$1,38$	

つづく

4) – تمثيل كلا من (Δ) ، (Δ') و (C_f) :



5) – قيم $\alpha \in]0;+\infty[$

التي من أجلها المعادلة

$1 \rightarrow -2-ln\alpha\ e^{-x}+1+ln\alpha=0$

لا تقبل حلول :

أ) – بيانيا :

(1) تكافئ $-2e^{-x}-ln\alpha e^{-x}+1+ln\alpha=0$

تكافئ $ln\alpha\ 1-e^{-x}\ -2e^{-x}+1=0$

ومنه $ln\alpha\ 1-e^{-x}\ =2e^{-x}-1$

تكافئ $\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}=ln\alpha$ مع $1-e^{-x}\neq 0$

ومنه $\begin{cases}2x+\frac{2e^{-x}-1}{1-e^{-x}}=2x+ln\alpha\\ x\in\mathbb{R}^*\end{cases}$

إذا $\begin{cases}y=f\ x\\ y=2x+ln\alpha\end{cases}$

ومنه حلول المعادلة (1) هي فواصل نقط تقاطع (C_f) و المستقيم (d_α) ذو المعادلة $y=2x+ln\alpha$

و بذلك (1) لا تقبل حلول عندما المستقيم (d_α) يكون محصور بين المستقيمين المقاربين (Δ) و (Δ')

ومنه $2x-2<2x+ln\alpha<2x-1$ فان $-2\leq ln\alpha\leq -1$

ومنه $e^{-2}\leq\alpha\leq e^{-1}$ وبذلك $\alpha\in\left[e^{-2};e^{-1}\right]$.

ب) – حسابيا :

المعادلة (1) لاتقبل حلول من أجل $-2-ln\alpha\ \ 1+ln\alpha\ \geq 0$

تكافئ $\begin{cases}2+t\ \ 1+t\ \leq 0\\ t=ln\alpha\ \ /\alpha>0\end{cases}$ تكافئ $\begin{cases}-2\leq t\leq -1\\ t=ln\alpha\ \ /\alpha>0\end{cases}$ تكافئ $-2\leq ln\alpha\leq -1$ تكافئ $\alpha\in\left[e^{-2};e^{-1}\right]$.

انـــــــــــــتهى .

التمرين 02

مجموعة الرياضيات الجزائرية (جمال بورنان)

I) 1) تبيين أنه من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$ فإن: $g'(x)=\dfrac{(x+1)\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$.

لنا $g(x)=\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1$ ومنه

$$g'(x)=\left[\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1\right]'=\left(1+x+x^2\right)'e^{-\frac{1}{x}}+\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)'\left(1+x+x^2\right)$$

$$=(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\left(1+x+x^2\right)=\frac{x^2(1+2x)e^{-\frac{1}{x}}+e^{-\frac{1}{x}}\left(1+x+x^2\right)}{x^2}$$

$$=\frac{x^2+2x^3+1+x+x^2}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^3+2x^2+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{2x^2(x+1)+x+1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\boxed{\frac{(x+1)\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}}$$

- إستنتاج إتجاه تغير g: وجدنا $g'(x)=\dfrac{(x+1)\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\left[\dfrac{\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\right](x+1)$

بما أنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن $\dfrac{\left(2x^2+1\right)}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\succ 0$ وأيضا x+1 موجب تماما على هذا المجال إذن

من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن $g'(x)\succ 0$ أي الدالة g متزايدة تماما على مجموعة تعريفها.

2) $g(1)=3e^{-1}-1=\dfrac{3}{e}-1\succ 0$ و

$$g(0,9)=\left(1+x+x^2\right)e^{-\frac{1}{x}}-1=2,71\times 0,32-1\approx -0,13\prec 0$$

إذن بما أن الدالة g مستمرة على المجال $]0,9;1[$ و $g(0,9)\times g(1)\prec 0$ فحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن للمعادلة g(x)=0 حل على الأقل في المجال $]0,9;1[$ وبما أن الدالة g متزايدة تماما على هذا المجال فإن هذا الحل وحيد وهو α .

إستنتاج إشارة g(x): نستنتج إن g(x) سالب تماما في المجال $]0;\alpha[$ وموجب تماما غي المجال $]\alpha;+\infty[$.

つづく

$f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ (II

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=+\infty+1\times e^{-\infty}=\boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right]=0+(+\infty)\times e^{0}=\boxed{+\infty}$

ب) تبيين أنه من أجل كل x من $]0;+\infty[$ فإن: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$.

لنا $f(x)=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$ ومنه

$$f'(x)=\left(\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+e^{-\frac{1}{x}}+\frac{1}{x^2}(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$

$$=\frac{-1+x^2e^{-\frac{1}{x}}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}}{x^2}=\frac{(1+x+x^2)e^{-\frac{1}{x}}-1}{x^2}=\boxed{\frac{g(x)}{x^2}}$$

ومنه نستنتج أن إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ أي في المجال $]0;\alpha[$ تكون المشتقة سالبة تماما أي الدالة f متناقصة تماما وفي المجال $]\alpha;+\infty[$ تكون الدالة f متزايدة تماما.

جدول التغيرات:

x	0	α	1	$+\infty$
f'(x)	‖ -	0	+	
f(x)	‖ $+\infty$ ↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) تبيين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=-1$.

بوضع $t=-\frac{1}{x}$ ومنه $x=-\frac{1}{t}$ ولما $x\to+\infty$ فإن $t\to 0$ فنجد:

つづく

$$\lim_{x\to+\infty}\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)=\lim_{t\to0}\left(-\frac{1}{t}e^{t}+\frac{1}{t}\right)=\lim_{t\to0}\left(\frac{-\left(e^{t}-1\right)}{t}\right)=-\lim_{t\to0}\left(\frac{e^{t}-1}{t}\right)=-1$$

Y=x مقارب للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$ معناه: $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=0$:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-x]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{x}+e^{-\frac{1}{x}}+\left(xe^{-\frac{1}{x}}-x\right)\right]=0+1-1=0$$

أي أن المستقيم ذو المعادلة y=x مقارب مائل للمنحني (C_f) بجوار $+\infty$.

3) $h(x)=\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}$.

أ) $\lim_{x\to+\infty}h(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)=0-1+1=0$.

- دراسة إتجاه تغير الدالة h:

$$h'(x)=\left(\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right)'=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x^2}\left(e^{-\frac{1}{x}}-1\right)$$

إذن إشارة h'(x) من نفس إشارة $e^{-\frac{1}{x}}-1$

h'(x)<0 معناه $e^{-\frac{1}{x}}-1\prec0$ أي $e^{-\frac{1}{x}}\prec1\to e^{-\frac{1}{x}}\prec e^{0}\to-\frac{1}{x}\prec0$ إذن الدالة h متناقصة تماما

$$\to x\succ0\to\boxed{x\in]0;+\infty[}$$

على المجال المعطى أي على مجموعة تعريفها.

الدالة f متناقصة تماما على مجموعة تعريفها ولنا $\lim_{x\to+\infty}h(x)=0$ وعليه نستنتج أن المنحني الممثل لها يقع فوق محور الفواصل بشكل تام ومنه مهما كان x من $]0;+\infty[$ فإن h(x)>0 .

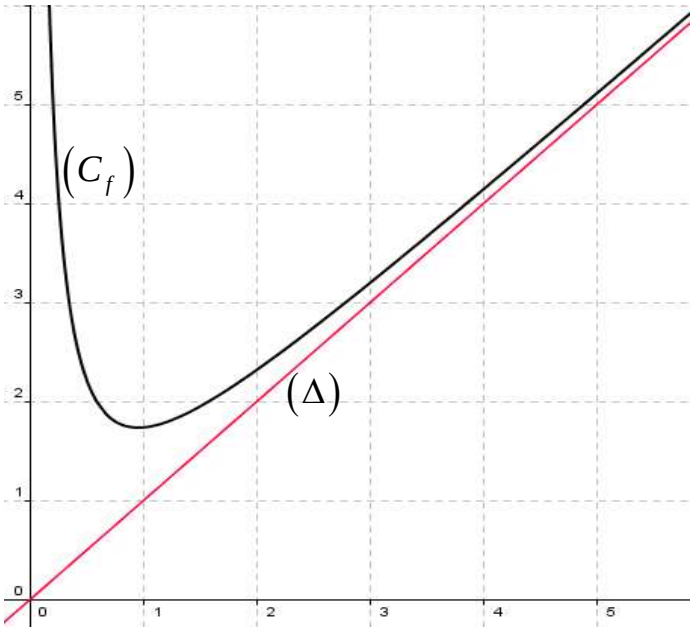
つづく

ب)

$$f(x)-x=\frac{1}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}-x=\frac{1}{x}-x+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=\frac{1-x^2}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}=\frac{(1-x)(1+x)}{x}+(1+x)e^{-\frac{1}{x}}$$
$$=(1+x)\left[\frac{1-x}{x}+e^{-\frac{1}{x}}\right]=(1+x)\left[\frac{1}{x}-1+e^{-\frac{1}{x}}\right]=\boxed{(1+x)h(x)}$$

نستنتج أن $f(x)-x\succ 0$ إذن المنحنى (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) .

4) رسم (Δ) و (C_f) :



5) أ) كتابة u_n بدلالة n:

$$u_n=\frac{n}{n+1}f\left(\frac{1}{n}\right)-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left[\frac{1}{\frac{1}{n}}+\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{-\frac{1}{\frac{1}{n}}}\right]-\frac{n^2}{n+1}=\frac{n}{n+1}\left[n+\left(\frac{n+1}{n}\right)e^{-n}\right]-\frac{n^2}{n+1}$$
$$=\frac{n^2}{n+1}+e^{-n}-\frac{n^2}{n+1}$$
$$=\boxed{e^{-n}}$$

つづく

- تبيين أن (u_n) متتالية هندسية وتعيين أساسها q و حدها الأول u_1 :

لنا $u_n = e^{-n}$ ومنه $u_{n+1} = e^{-n-1} = e^{-n} \times e^{-1} = \frac{1}{e}e^{-n} = \boxed{\frac{1}{e}u_n}$ إذن (u_n) متتالية هندسية أساسها $\boxed{q = \frac{1}{e}}$ و حدها الأول $u_1 = e^{-1} = \boxed{\frac{1}{e}}$.

- حساب بدلالة n المجموع S_n :

لنا $u_n = \frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{n^2}{n+1}$ ومنه $\boxed{\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) = u_n + \frac{n^2}{n+1}}$

$$S_n = \left(\frac{1}{2} f(1) - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{2}{3} f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{3}{4} f\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{4}\right) + \ldots + \left(\frac{n}{n+1} f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2}{1+1} - \frac{1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2}{2+1} - \frac{1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2}{3+1} - \frac{1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2}{n+1} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{1^2-1}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{2^2-1}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{3^2-1}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{n^2-1}{n+1}\right)$$

$$= \left(u_1 + \frac{(1-1)(1+1)}{1+1}\right) + \left(u_2 + \frac{(2-1)(2+1)}{2+1}\right) + \left(u_3 + \frac{(3-1)(3+1)}{3+1}\right) + \ldots + \left(u_n + \frac{(n-1)(n+1)}{n+1}\right)$$

$$= (u_1 + (1-1)) + (u_2 + (2-1)) + (u_3 + (3-1)) + \ldots + (u_n + (n-1))$$

$$= (u_1 + 0) + (u_2 + 1) + (u_3 + 2) + \ldots + (u_n + (n-1))$$

$$= (u_1 + u_2 + u_3 + \ldots + u_n) + (1 + 2 + 3 + \ldots + (n-1))$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \left(\frac{1}{e}\right)^n}{1 - \frac{1}{e}}\right) + \frac{n-1}{2}(1 + n - 1) = \left(\frac{1}{e} \times \frac{1 - \frac{1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{1}{e} \times \frac{\frac{e^n - 1}{e^n}}{\frac{e-1}{e}}\right) + \frac{n(n-1)}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{e} \times \frac{e^n - 1}{e^n} \times \frac{e}{e-1}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \left(\frac{e^n - 1}{(e-1)e^n}\right) + \frac{n(n-1)}{2} = \boxed{\frac{1 - e^{-n}}{e-1} + \frac{n(n-1)}{2}}$$

التمرين 03

مجلة Top Maths في الدوال الأسية

I) φ الدالة العددية المعرّفة على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$\varphi(x)=\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1 .$$

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)$:

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2=+\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x+1}=\lim\limits_{t\to+\infty}e^t=+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\to-\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=+\infty .$$

$$\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1=\lim_{x\to+\infty}x^2e^{-x+1}-1$$

أي $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e\dfrac{x^2}{e^x}-1=-1$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة φ :

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\varphi'(x)=(2x-1)e^{-x+1}+\left(x^2-x+1\right)(-1)e^{-x+1}$

أي $\varphi'(x)=\left(-x^2+3x-2\right)e^{-x+1}$.

من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $e^{-x+1}>0$ ومنه إشارة $\varphi'(x)$ هي من إشارة $\left(-x^2+3x-2\right)$؛

$\Delta=9-8=1$ ومنه $x'=\dfrac{-3-1}{-2}=2$ و $x''=\dfrac{-3+1}{-2}=1$ ، وعليه فمن أجل كل عدد حقيقي x من

$]-\infty;1[\cup]2;+\infty[$ ، $-x^2+3x-2<0$ أي $\varphi'(x)<0$ ومنه الدالة φ متناقصة تماما على كل من المجالين

$]-\infty;1]$ و $[2;+\infty[$؛

ومن أجل كل عدد حقيقي x من $]1;2[$ ، $-x^2+3x-2>0$ أي $\varphi'(x)>0$ ومنه الدالة φ متزايدة تماما على المجال

$[1;2]$.

- جدول تغيرات الدالة φ :

x	$-\infty$		1		2		α		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$-$	
$\varphi(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{3}{e}-1$	↘	0	↘	-1

2. تبيين أن المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $\mathbb{R}$ ، حلا α يختلف عن 1 :

من خلال جدول تغيرات الدالة φ لدينا من أجل كل $x\in]-\infty;1[\cup]1;2]$ ، $\varphi(x)>0$ و $\varphi(1)=0$ إذا المعادلة $\varphi(x)=0$ تقبل في $]-\infty;2]$ حلا وحيدا وهو 1 .

لدينا الدالة φ مستمرة ومتناقصة تماما على المجال $[2;+\infty[$ وتأخذ قيمها في المجال $\left]-1;\dfrac{3}{e}-1\right]$ إذا يوجد عدد حقيقي وحيد α من المجال $[2;+\infty[$ حيث $\varphi(\alpha)=0$ أي α حل للمعادلة $\varphi(x)=0$.

- تحقق أن $2,79<\alpha<2,80$:

つづく

لدينا $\varphi(2,79) \approx 0,000776$ و $\varphi(2,80) \approx -0,00159$ إذا $\varphi(2,80) \times \varphi(2,79) < 0$ ومنه $2,79 < \alpha < 2,80$.

3. استنتاج إشارة $\varphi(x)$ على $\mathbb{R}$:

لدينا $\varphi(1) = \varphi(\alpha) = 0$ ؛ من أجل كل $x \in]-\infty;1[\cup]1;\alpha[$ ، $\varphi(x) > 0$ ومن أجل كل $x \in]\alpha;+\infty[$ ، $\varphi(x) < 0$.

II) f و g الدالتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{R}$ ، على الترتيب كما يلي: $f(x) = (2x-1)e^{-x+1}$ و $g(x) = \dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$ ؛ $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ على الترتيب تمثيلاهما البيانيان في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1.أ- حساب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$:

لدينا $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1) = -\infty$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x+1} = \lim\limits_{t\to+\infty} e^{t} = +\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}(2x-1)e^{-x+1} = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}(2x-1)e^{-x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{x}{e^x} - \dfrac{1}{e^x}\right)e = 0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{e^x} = 0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{e^x} = 0$.

ب- دراسة اتجاه تغيّر الدالة f :

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = 2e^{-x+1} + (2x-1)(-1)e^{-x+1}$

$f'(x) = (2-2x+1)e^{-x+1} = (3-2x)e^{-x+1}$

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $e^{-x+1} > 0$ ومنه إشارة $f'(x)$ هي نفس إشارة $(3-2x)$ ؛

$f'(x) = 0$ تكافئ $3-2x = 0$ ومعناه $x = \dfrac{3}{2}$ ؛

$f'(x) > 0$ تكافئ $3-2x > 0$ ومعناه $x < \dfrac{3}{2}$.

وبالتالي الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty;\dfrac{3}{2}\right]$ و متناقصة تماما على المجال $\left[\dfrac{3}{2};+\infty\right[$.

- جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{2}{\sqrt{e}}$	↘	0

2. تبيين أن للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشتركا (T) في النقطة ذات الفاصلة 1 :

つづく

ليكن $x \in \mathbb{R}$: $g'(x) = \dfrac{2(x^2 - x + 1) - (2x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2}$

$$g'(x) = \frac{2x^2 - 2x + 2 - 4x^2 + 4x - 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

أي $$g'(x) = \frac{-2x^2 + 2x + 1}{(x^2 - x + 1)^2}$$

ومنه $g'(1) = \dfrac{-2 + 2 + 1}{(1 - 1 + 1)^2} = 1$ و $f'(1) = (3 - 2)e^{-1+1} = 1$

إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسين لهما نفس معامل التوجيه 1 في النقطة ذات الفاصلة 1 ، ولدينا

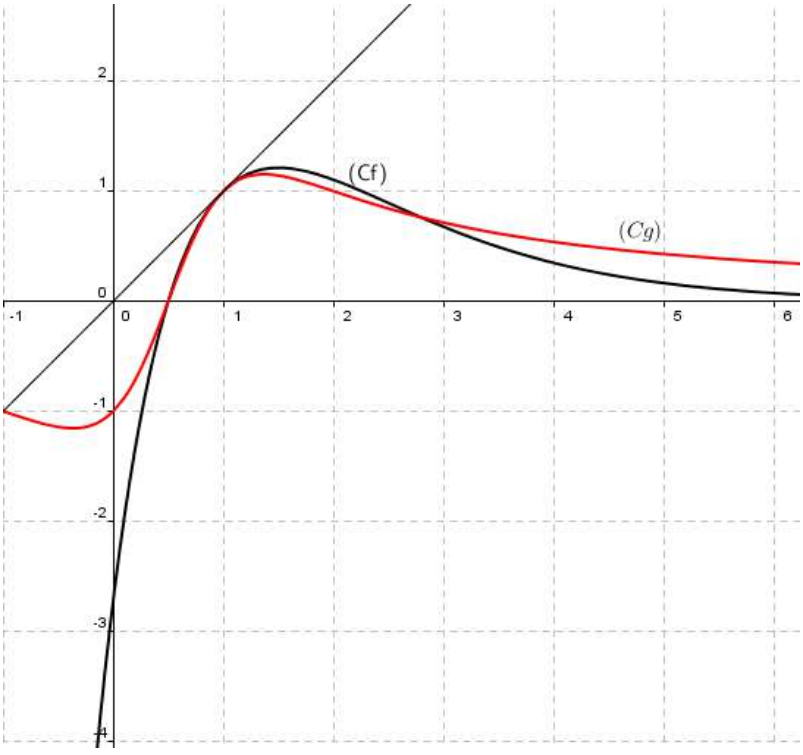
$f(1) = (2 - 1)e^{-1+1} = 1$ و $g(1) = \dfrac{2 - 1}{1^2 - 1 + 1} = 1$ إذا للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ نقطة مشتركة

$A(1;1)$ وهي نقطة التماس ومنه للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ مماسا مشركا (T) في النقطة $A(1;1)$.

ـ إيجاد معادلة للمستقيم (T) :

$y = x - 1 + 1$ أي $y = x$.

3. رسم المماس (T) والمنحنى $(\mathcal{C}_f)$:



つづく

4. أ- تبيين أنه من أجل كل عدد حقيقي x ،

$f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $f(x)-g(x)=(2x-1)e^{-x+1}-\dfrac{2x-1}{x^2-x+1}$

$f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\left[\left(x^2-x+1\right)e^{-x+1}-1\right]}{x^2-x+1}$

أي $f(x)-g(x)=\dfrac{(2x-1)\varphi(x)}{x^2-x+1}$.

ب- دراسة إشارة الفرق $f(x)-g(x)$ على :

لندرس إشارة ثلاثي الحدود x^2-x+1 : $\Delta=1-4=-3$ ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ ، $x^2-x+1>0$.

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		α		$+\infty$
$2x-1$	$-$	$\|$	0	$+$	$+$	$\|$	$+$		
$\varphi(x)$	$+$	$\|$	$+$	0	$+$	0	$-$		
x^2-x+1	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$	$\|$	$+$		
$f(x)-g(x)$	$-$	$\|$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

ـ استنتاج الوضع النسبي للمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$:

يتقاطعان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ في النقط $A(1;1)$ ، $B\left(\frac{1}{2};0\right)$ و $C(\alpha;f(\alpha))$.

في المجالين $\left]-\infty;\frac{1}{2}\right[$ و $]\alpha;+\infty[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أسفل $(\mathcal{C}_g)$ ؛

وفي المجالين $\left]\frac{1}{2};1\right[$ و $]1;\alpha[$ ، $(\mathcal{C}_f)$ يقع أعلى $(\mathcal{C}_g)$.

جـ- باستعمال مكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة x : $\int_1^x f(t)dt$:

ليكن $x\in\mathbb{R}$: $\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt$.

نضع $u(t)=2t-1$ و $v'(t)=e^{-t+1}$ ومنه $u'(t)=2$ و $v(t)=-e^{-t+1}$.

$\int_1^x f(t)dt=\int_1^x(2t-1)e^{-t+1}dt=\int_1^x u(t)v'(t)dt$

$\int_1^x f(t)dt=u(t)v(t)-\int_1^x u'(t)v(t)dt$

$\int_1^x f(t)dt=\left[-(2t-1)e^{-t+1}\right]_1^x-\int_1^x -2e^{-t+1}dt$

つづく

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2\left[e^{-t+1}\right]_1^x$$

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x-1)e^{-x+1} + 1 - 2\left(e^{-x+1} - 1\right)$$

$$\int_1^x f(t)dt = -(2x+1)e^{-x+1} + 3 .$$

د ـ حساب مساحة الحيّز المستوي المحدّد بالمنحنيين $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_g)$ والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=1$ و $x=2$:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \int_1^2 f(x)dx - \int_1^2 g(x)dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \left[-(2x+1)e^{-x+1} + 3\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}dx$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = -5e^{-1} + 3 - \left[\ln\left(x^2 - x + 1\right)\right]_1^2$$

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \left(-5e^{-1} + 3 - \ln 3\right) ua$$

المساحة المطلوبة هي $\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$ حيث:

$$\int_1^2 [f(x) - g(x)]dx = \left(-5e^{-1} + 3 - \ln 3\right) ua \approx 0,0619905\, ua .$$

II) 1. حساب $f''(x)$ ، $f^{(3)}(x)$ و $f^{(4)}(x)$:

لدينا من أجل كل $x \in \mathbb{R}$: $f'(x) = (3-2x)e^{-x+1}$ ومنه

$f''(x) = -2e^{-x+1} - (3-2x)e^{-x+1} = (2x-5)e^{-x+1}$ ؛

$f^{(3)}(x) = 2e^{-x+1} - (2x-5)e^{-x+1} = -(2x-7)e^{-x+1}$ ؛

$f^{(4)}(x) = -2e^{-x+1} + (2x-7)e^{-x+1} = (2x-9)e^{-x+1}$.

ـ تخمين عبارة $f^{(n)}(x)$ حيث n عدد طبيعي غير معدوم. ($f^{(n)}(x)$ الدالة المشتقة من المرتبة n للدالة f).:

يبدو أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$.

2. البرهان بالتراجع ، أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، $f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$:

$f'(x) = (-1)\left[2x - (2+1)\right]e^{1-x} = -(2x-3)e^{1-x}$ ومنه الخاصية الابتدائية محققة.

نفرض أنه $f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$ من أجل عدد طبيعي غير معدوم n ولنبرهن أن

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1}\left[2x - (2n+3)\right]e^{1-x}$$

لدينا $f^{(n+1)}(x) = (-1)^n 2e^{1-x} + (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right](-1)e^{1-x}$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x}\left[2x - (2n+1) - 2\right]$$

$$f^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+1} e^{1-x}\left[2x - (2n+3)\right]$$

ومنه الخاصية وراثية وعليه فحسب مبدأ الاستدلال بالتراجع يكون من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ،

$f^{(n)}(x) = (-1)^n \left[2x - (2n+1)\right]e^{1-x}$.

つづく

3. (u_n) المتتالية العددية المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، كما يلي: $u_n = f^{(n)}(1)$.

أ- حساب بدلالة العدد الطبيعي غير المعدوم k ، المجموع: $u_k + u_{k+1}$:

لدينا من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $u_n = f^{(n)}(1) = (-1)^n\left[2-(2n+1)\right] = (-1)^{n+1}(2n-1)$

ليكن $k \in \mathbb{N}^*$ ، $u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1) + (-1)^{k+2}(2k+1)$

$$u_k + u_{k+1} = (-1)^{k+1}(2k-1-2k-1)$$

أي $u_k + u_{k+1} = 2(-1)^{k+2} = 2(-1)^k$

ب- استنتاج بدلالة n ، المجموع: $u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$:

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = \frac{(u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n})}{2}$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1} + (u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n}) + (u_2 + \ldots + u_{2n} + u_{2n+1})}{2}$$

$$= \frac{u_1 - u_{2n+1}}{2} + \frac{1}{2}\left[(u_1 + u_2) + (u_2 + u_3) + \ldots + (u_{2n} + u_{2n+1})\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[1 - \left((-1)^{2n+2}(4n+1)\right)\right] + \frac{1}{2} \times 2\left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right]$$

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_{2n} = -2n + \left[(-1)^1 + (-1)^2 + \ldots + (-1)^{2n}\right] = -2n$$

التمرين 04

مجموعة المتميز (جواليل أحمد أسامة)

I- لدينا $f(x) = (x+1)^2 e^{-x}$

1) حساب النهايات : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} (x+1)^2 e^{-x} = +\infty$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} 4\left(\dfrac{\frac{x+1}{2}}{\frac{x}{e^2}}\right)^2 = 0$ بالتزيد المقارن ..

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f : $f'(x) = 2(1+x)e^{-x} - (1+x)^2 e^{-x} = (x^2-1)e^{-x}$ و منه اشارتها من اشارة $(1-x^2)$ و هي موجبة على المجال $[-1;1]$ و سالبة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$ و منه f متزايدة على المجال $[-1;1]$ و متناقصة على المجالين $]-\infty;-1]$ و $[1;+\infty[$.

つづく

جدول تغيراتها

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

3) اثبات وجود نقطة الانعطاف :لدينا $f'(x)=(x^2-1)e^{-x}$ و منه $f''(x)=(-x^2+2x+1)e^{-x}$ و منه اشارتها من اشارة $(-x^2+2x+1)$

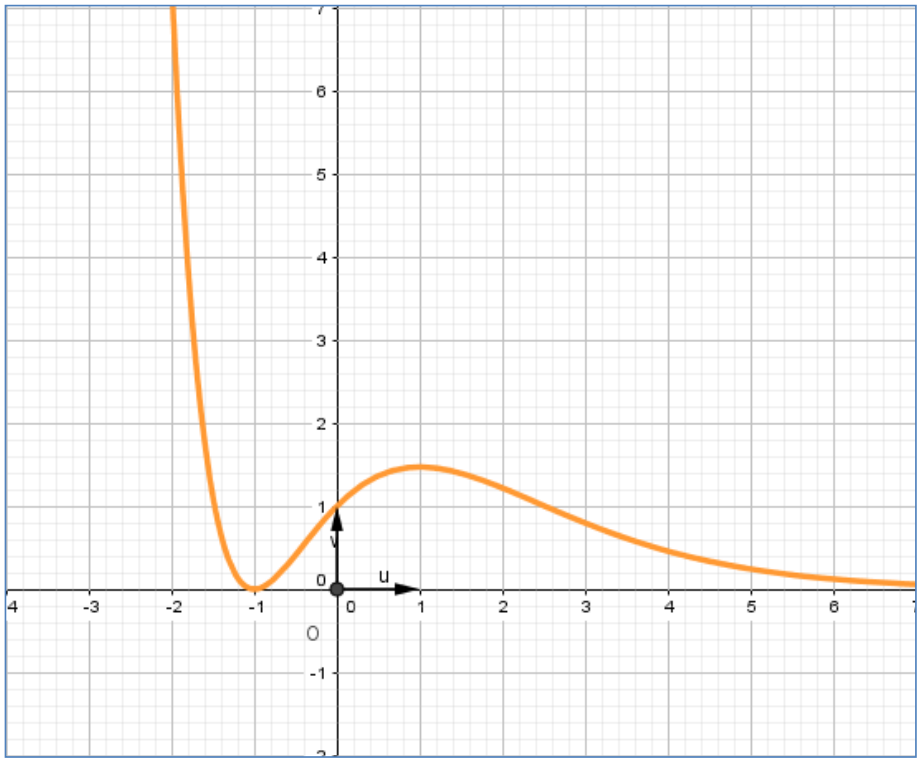
نحسب المميز $\Delta=8$ و منه له جذرين هما $x=-1+\sqrt{2}$ و $x=-1-\sqrt{2}$

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{2}$		$-1+\sqrt{2}$		$+\infty$
اشارة $f''(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

بما f'' تنعدم عند العددين $-1+\sqrt{2}$ و $-1-\sqrt{2}$ و تغير اشارتها فإن هما فاصلتي نقطتي انعطاف للمنحنى (C) و النقطتان هما $A\left(-1-\sqrt{2};2e^{1+\sqrt{2}}\right)$ و $B\left(-1+\sqrt{2};2e^{1-\sqrt{2}}\right)$.

حساب $f(-2)=e^2$.

رسم البيان :



つづく

II- لدينا $f_m(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}$.

1) اثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطة ثابتة ω : أي ان احداثياتها لا تتعلق بـ m نعدم المضرب في العبارة في هذا العدد و منه نضع $x=0$ و منه $f_m(0)=1$ أي ان كل المنحنيات تمر من $\omega\ (0\ ;\ 1)$.

2) دراسة اتجاه تغير الدالة f_m $f_m'(x)=(2x+m-x^2-mx-1)e^{-x}$ و منه $f_m'(x)=(-x^2+(2-m)x+m-1)e^{-x}$

نحسب المميز $\Delta=(2-m)^2+4(m-1)=m^2$ و منه f_m' تقبل جذرين هما $x''=1-m$; $x'=1$ و منه تكون

لما m عدد موجب :

- $f_m'(x)$ موجبة على المجال $[1-m;1]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f_m'(x)$ سالبة على المجالين $[1;+\infty[$ و$]-\infty;1-m]$ منه f متناقصة على هذين المجالين

لما m عدد سالب :

- $f_m'(x)$ موجبة على المجال $[1;1-m]$ و منه f متزايدة على هذا المجال
- $f_m'(x)$ سالبة على المجالين $[1-m;+\infty[$ و$]-\infty;1]$ منه f متناقصة على هذين المجالين .

لما m عدد معدوم : فإن $f_m'(x)$ تنعدم عند 1 و هي موجبة أي ان الدالة f متزايدة على $\mathbb{R}$.

مما سبق نستنتج أن f تقبل قيمتين حديتين لما $m\neq 1$.

3) لدينا $f_m(1-m)=\left[(1-m)^2+m(1-m)+1\right]e^{-1+m}$ أي $f_m(1-m)=[-m+2]\ e^{-1+m}$ و منه $M_m(1-m;\ f_m(1-m))$

أي $M_m\left(1-m\ ;\ \dfrac{(2-m)}{e^{1-m}}\right)$ بوضع $x=1-m$ و $y=\dfrac{2-m}{e^{1-m}}$

نجد $y=(1+x)\,e^{-x}$ و هي معادلة المنحنى الشامل للنقطة M_m لما m يمسح $\mathbb{R}$.

4) دراسة وضعية (C) بالنسبة للمنحنى (C_m) لدينا $f_m(x)-f(x)=(x^2+mx+1)e^{-x}-(x+1)^2e^{-x}=(m-2)\,e^{-x}$

اشارته من اشارة $(m-2)$:

المناقشة

- لما $m>2$ فإن (C_m) يقع فوق (C) على $\mathbb{R}$.
- لما $m<2$ فإن (C_m) يقع تحت (C) على $\mathbb{R}$.

5) حساب مساحة الحيز $A(\alpha)$ $A(\alpha)=\int_0^{\alpha}[f_3(x)-f(x)]dx=\int_0^{\alpha}e^{-x}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^{\alpha}=1-e^{-\alpha}$

و منه $\lim\limits_{\alpha\to+\infty}A(\alpha)=\lim\limits_{\alpha\to+\infty}\left[1-e^{-\alpha}\right]=1$.

التمرين 05

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$.

1) إثبات أن كل المنحنيات (C_k) تمر نقطتين ثابتتين : ----------

لدينا : $f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_{k+1}(x)=(x+1)^2e^{-(k+1)x}$ و بما أنّ النقطة ثابتة مهما تغيّر الوسيط k فسيكون ترتيب النقطة ثابت مهما كان k .

أي : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=0$ أي : $(x+1)^2e^{-(k+1)x}-(x+1)^2e^{-kx}=0$ و منه : $e^{-kx}(x+1)^2(e^{-x}-1)=0$

و عليه : $\begin{cases}(x+1)^2=0\\(e^{-x}-1)=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\e^{-x}=1\end{cases}$ و منه : $\begin{cases}x=-1\\x=0\end{cases}$ إذن : جميع المنحنيات (C_k) تمر من نقطتين ثابتتين هما $A(-1;0)$ و $B(0;1)$.

2) حساب نهايتي الدالة f_k : ----------

*) لما $k>0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{-kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{-kx}\right)=0\end{cases}$.

*) لما $k=0$ يكون : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2\right]=+\infty\end{cases}$.

*) لما $k<0$: $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=0\\\lim\limits_{x\to+\infty}f_k(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[(x+1)^2e^{kx}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x^2e^{kx}\right)=+\infty\end{cases}$.

3) أ) حساب $f_k'(x)$ ثم تحديد إتجاه تغيّر الدالة f_k حسب قيم k : ----------

$f_k'(x)=2(x+1)e^{-kx}-k(x+1)^2e^{-kx}$ أي : $f_k'(x)=(x+1)(-kx-k+2)e^{-kx}$.

*) من أجل $k=0$ تكون : $f_0'(x)=2(x+1)$ هذه الأخيرة موجبة على $[-1;+\infty[$ و سالبة على $]-\infty;-1]$ و منه : الدالة f_0 متزايدة على المجال $[-1;+\infty[$ و متناقصة على $]-\infty;1]$.

*) من أجل $k>0$: ندرس إشارة المشتقة أي نحل المعادلة $f_k'(x)=0$ أي : $\begin{cases}x+1=0\\-kx-k+2=0\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x=-1\\x=\dfrac{2-k}{k}\end{cases}$

إذن : لما $x\in\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\geq0$ و عليه الدالة f_k متزايدة على المجال $\left[-1;\dfrac{2-k}{k}\right]$.

لما $x\in]-\infty;-1]\cup\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\leq0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على كل من المجالين : $]-\infty;-1]$ و $\left[\dfrac{2-k}{k};+\infty\right[$.

つづく

*) من أجل $k<0$: بنفس الطريقة السابقة ، لكن :

لما $x\in]-\infty;-1]\cup\left[\frac{2-k}{k};+\infty\right[$ تكون $f_k'(x)\geq 0$ و عليه الدالة f_k متواايدة على كل من المجالين :

$]-\infty;-1]$ و $\left[\frac{2-k}{k};+\infty\right[$.

لما $x\in\left[-1;\frac{2-k}{k}\right]$ تكون $f_k'(x)\leq 0$ و عليه الدالة f_k متناقصة على المجال $\left[-1;\frac{2-k}{k}\right]$.

ب) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f_k من أجل $k\in\mathbb{R}_+$: ----------

x	$-\infty$		-1		$\frac{-k+2}{k}$		$+\infty$
$f_k'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f_k(x)$	$+\infty$	↘	$f_k(-1)$	↗	$f_k\left(\frac{-k+2}{k}\right)$	↘	0

4) المناقشة حسب قيم k الوضع النسبي بين المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) : ----------

ندرس إشارة الفرق نجد : $f_{k+1}(x)-f_k(x)=(x+1)^2e^{-kx}\left[\frac{1-e^x}{e^x}\right]$ ، نلاحظ أنّ إشارة الفرق من إشارة : $1-e^x$

*) الفرق ينعدم عند 0 و -1 أي أنّ المنحنيين (C_k) و (C_{k+1}) يتقاطعان في النقطتين A و B . (س1)

*) الفرق يكون موجب على $]-\infty;0]$ أي أنّ المنحني (C_{k+1}) يقع فوق المنحني (C_k) .

*) الفرق يكون سالب على $[0;+\infty[$ أي أنّ المنحني (C_{k+1}) يقع تحت المنحني (C_k) .

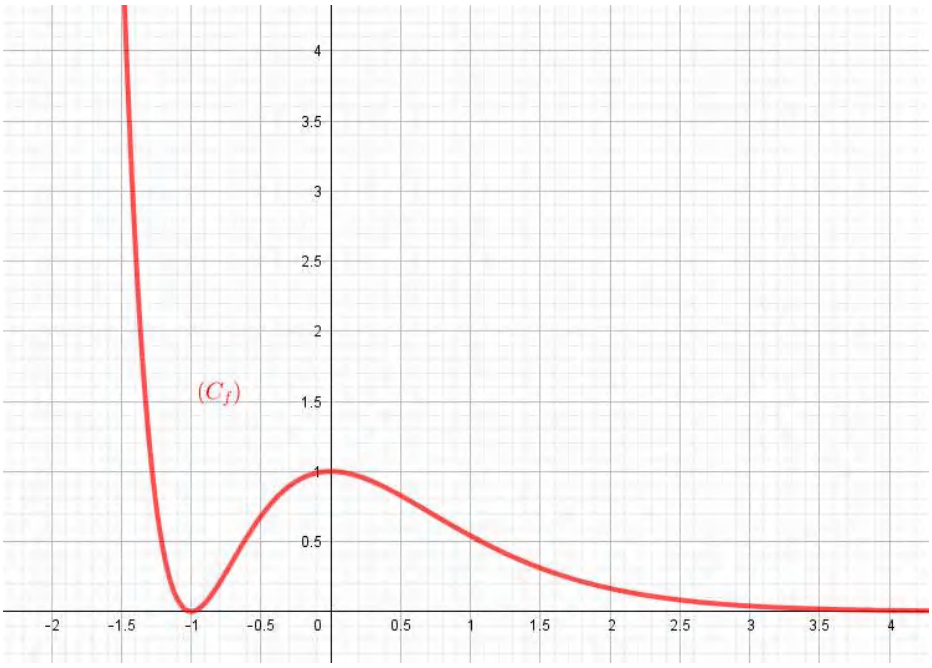
الجزء الثاني : لدينا $f(x)=(x+1)^2e^{-2x}$.

1) تشكيل جدول تغيرات الدالة f على المجال $\left[-\frac{3}{2};+\infty\right[$: ----------

x	$-\frac{3}{2}$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	$\frac{e3}{4}$	↘	0	↗	1	↘	0

つづく

*) إنشـاء المنحني (C_f) :



2) أ) بيان أن المعادلة $f(x)=1$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$: ----------

الدالة f مستمرة على $\mathbb{R}$ و $f(x)=1$ تعني $f(x)-1=0$ ، لنضع : $h(x)=f(x)-1$.

الدالة h مستمرة و متناقصة على المجال $]-\infty,-1]$ و $\begin{cases} h(-1,28)=0.01 \\ h(-1,27)=-0,08 \end{cases}$ إذن حسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة $h(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $-1,28<\alpha<-1,27$.

و من جهة أخرى لدينا : $g(0)=f(0)-1$ أي : $h(0)=1-1$ و منه : $h(0)=0$ أي أنّ الحل الآخر معدوم .

ب) تعيين قيم m : ----------

لدينا : $\left|\frac{x+1}{e^x}\right|=\left|\frac{m+1}{e^m}\right|$ أي : $\frac{|x+1|}{e^x}=\frac{|m+1|}{e^m}$ أي : $|x+1|e^{-x}=|m+1|e^{-m}$ أي تصبح :

$(x+1)^2e^{-2x}=(m+1)^2e^{-2m}$ ، إذن : $f(x)=f(m)$ ، حلول هذه الأخيرة هي فواصل نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=f(m)$ و عليه : قيم العدد الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f(x)=f(m)$ حلا وحيدا و من خلال ملاحظة البيان نجد أنها محققة لما يكون $m\in]-\infty;\alpha[$.

つづく

3) لدينا : $g(x)=(x+1)e^{-2x}$.

أ) بيان أنّه من أجل كل عدد حقيقي x يكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$: ----------

$g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=e^{-2x}-2(x+1)e^{-2x}+2(x+1)e^{-2x}-e^{-2x}$ و منه : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$.

إذن : من أجل كل عدد حقيقي تكون $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ محقّقة .

*) يمكن الآن إستنتاج دالة أصلية لـ g على $\mathbb{R}$ أي : $g'(x)+2g(x)-e^{-2x}=0$ و عليه تصبح :

$g(x)=-\frac{1}{2}g'(x)+\frac{1}{2}e^{-2x}$ أي أنّ الدالة الأصلية هي : $G(x)=-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}+c$.

ب) باستعمال المكاملة بالتجزئة حساب مساحة الحيز المستوي : ----------

$$\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=\int_{-1}^{0}\underbrace{(x+1)^2}_{u}\underbrace{e^{-2x}}_{v'}=\left[-\frac{1}{2}(x+1)^2e^{-2x}\right]_{-1}^{0}-\int_{-1}^{0}\left[2(x+1)\left(-\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right]=-\frac{1}{2}+\int_{-1}^{0}(x+1)e^{-2x}\,dx$$

و منه : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left[-\frac{1}{2}(x+1)e^{-2x}-\frac{1}{4}e^{-2x}\right]_{-1}^{0}$ أي : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}e^{2}\right)$

إذن : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}+\frac{1}{4}e^{2}$ و عليه : $\int_{-1}^{0} f(x)\,dx=-\frac{5}{4}+\frac{e^2}{4}\ (u.a)$.

التمرين 01

تمارين مقترحة (إبراهيم وعلي حسين)

لدينا الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $f(x)=x^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

1. اثبات ان الدالة f تقبل الصفر كنهاية عند $(-\infty)$ و $(+\infty)$:

لدينا ع. ت $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ لدينا $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}\times\dfrac{1}{2}(x-1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

ومنه $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}\times\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\x\to-\infty}}\dfrac{1}{2}(x-1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

$$\begin{cases}\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}}\dfrac{2x^2}{(x-1)^2}=2\\ \lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\x\to+\infty}}\dfrac{1}{2}(x-1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=\lim\limits_{t\to+\infty} t\ e^{-t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\dfrac{t}{e^t}=0 \quad / \begin{cases}t=\frac{1}{2}(x-1)^2\\ t\xrightarrow[x\to+\infty]{x\to-\infty}+\infty\end{cases}\end{cases}$$ وبما ان

فان $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

2. اثبات ان f تقبل الاشتقاق على IR و من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$:

- بما ان الدوال $\left(x\mapsto e^x\ ;x\mapsto-\dfrac{1}{2}(x-1)^2\right)$; $x\mapsto x^2$ تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$

ومنه الدالة f تقبل الاشتقاق على $\mathbb{R}$.

- من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا

$$f'(x)=\left(x^2\right)'e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}+\left(e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\right)'x^2=2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}+\left[-\frac{1}{2}(x-1)^2\right]'e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\times x^2$$

$$f'(x)=2xe^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}-(x-1)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}\times x^2=\left[2x-x^2(x-1)\right]e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

$$=\left[2x-x^2(x-1)\right]e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=x\left(-x^2+x+2\right)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}=x(x+1)(-x+2)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$$

3. إشارة $f'(x)$ على $\mathbb{R}$ ، ثم استنتاج اتجاه تغير f :

لدينا من اجل كل x من $\mathbb{R}$ فان $f'(x)=x(x+1)(2-x)e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}$

ومنه إشارة $f'(x)$ من إشارة $x(x+1)(2-x)$

لان من اجل كل $x\in\mathbb{R}$ لدينا $e^{-\frac{1}{2}(x-1)^2}>0$

لدينا $x(x+1)(2-x)=0$

من اجل $x=0$ او $x=-1$ او $x=2$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x	$-$		$-$	0	$+$		$+$		
$(x+1)(2-x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$		

وبذلك f متناقصة تماما في المجالين $[-1\,;0]$ و $[2\,;+\infty[$

و متزايدة تماما في المجالين $[0\,;2]$ و $]-\infty\,;-1]$.

つづく

4. شكل جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	e^{-2}	↘	0	↗	$\frac{4}{\sqrt{e}}$	↘	0

$$f(-1)=(-1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(-1-1)^2}=e^{-2}$$

$$f(0)=(0)^2\ e^{-\frac{1}{2}(0-1)^2}=0$$

$$f(2)=(2)^2\ e^{-\frac{1}{2}(2-1)^2}=4e^{-\frac{1}{2}}=\frac{4}{\sqrt{e}}$$

5. معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ عند النقطة ذات الفاصلة $(+1)$:

لدينا $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ حيث $\begin{cases} f'(1)=(1)(2)(1)e^{-\frac{1}{2}(1-1)}=2 \\ f(1)=(1)^2\ e^{-\frac{1}{2}(1-1)}=1 \end{cases}$

ومنه $(T):y=2x-1$

6. اثبات ان $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات (d_1)، (d_2) و (d_3) تشمل مبدأ المعلم :

نعلم ان المماس عند النقطة $(a;f(a))$ من $(\mathcal{C}_f)$ له معادلة من الشكل $y=f'(a)(x-a)+f(a)$

حتى يشمل هذا المماس المبدأ يجب $0=f'(a)(0-a)+f(a)$ تكافئ $f(a)=a\,f'(a)$

تكافئ $a^2\ e^{\frac{1}{2}(a-1)^2}=a^2(a+1)(2-a)e^{\frac{1}{2}(a-1)^2}$ تكافئ $a^2=a^2(a+1)(2-a)$ وذلك مهما كان $a\in\mathbb{R}$

ومنه $a^2\left[1-(a+1)(2-a)\right]=0$ وبذلك $a^2\left(a^2-a-1\right)=0$

ومنه إما $a^2=0$ من اجل $a=0$ او $a^2-a-1=0$ من اجل $\begin{cases} \Delta=(-1)^2-4(1)(-1)=5 \\ a_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\ a_2=\frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$

اذا $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ثلاثة مماسات تشمل مبدأ المعلم عند النقط التي فواصلها $\left\{0\ ,\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$

أ)- إحداثيتي نقطة التماس لكل مماس:

- من اجل $x=0$ فان $f(0)=0$ ومنه النقطة هي المبدأ $(0;0)$.

- من أجل $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\ ;\frac{3-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}\right)$.

- من أجل $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ فان $f\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$ ومنه النقطة هي $M_3\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ ;\frac{3+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}\right)$.

ب)- معامل توجيه لكل مماس ثم معادلة لكل من (d_1)، (d_2) و (d_3):

- من اجل $x=0$ فان $f'(0)=0$ ومنه معادلة المماس $(d_1):y=0$.

つづく

- من أجل $x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}$

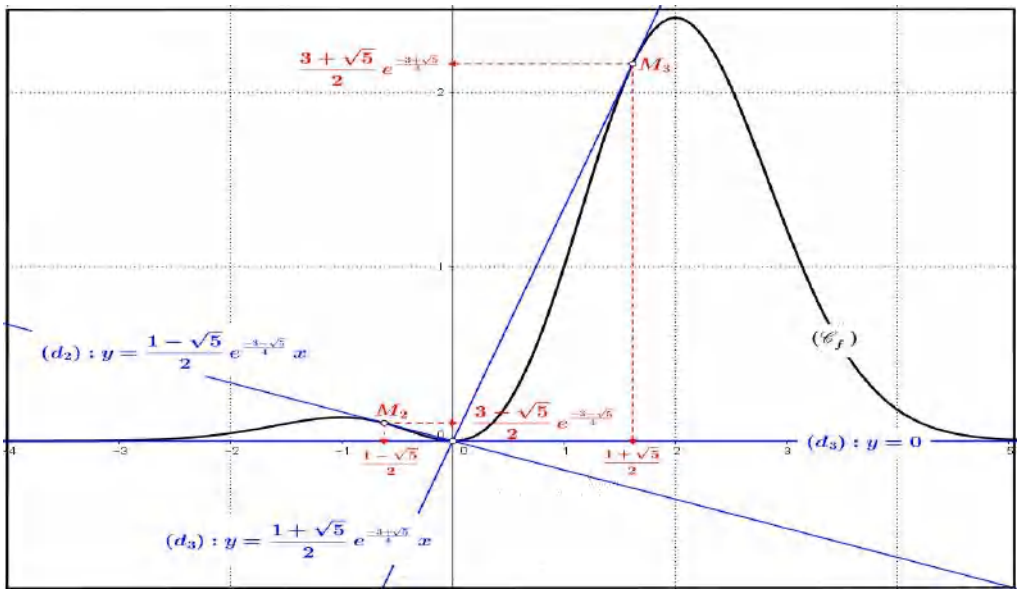
ومنه معادلة المماس $(d_2): y=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}}.x$.

- من أجل $x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

فان $f'\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1\right)\left(2-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}$

ومنه معادلة المماس $(d_3): y=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\times e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}.x$.

7. رسم كل من المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ و المماسات (d_1) ، (d_2) و (d_3) :



8. m عدد حقيقي ، نعتبر المستقيم (d_m) الذي معادلته $y=m\,x$.

أ)- إثبات ان (d_m) يشمل نقطة ثابتة :

- بفرض ان $M_0(x_0;y_0)\in(d_m)$ يكافئ $y_0=m\,x_0$ ومنه $m\,x_0-y_0=0$ ومنه $\begin{cases}x_0=0\\y_0=0\end{cases}$

ومنه مهما كان العدد الحقيقي m فان (d_m) يشمل المبدأ .

ب)- بقراءة بيانية ،إيجاد قيم m الحقيقية ، التي من اجلها المستقيم (d_m) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة:

المستقيم (d_m) ميله متغير m ويشمل المبدأ إذا المستقيم (d_m) يدور و مركز دورانه المبدأ

من البيان نستنتج ان لمستقيم (d_m) يقطع $(\mathcal{C}_f)$ في ثلاث نقاط متمايزة من اجل :

$$m\in\left]\frac{1-\sqrt{5}}{2}\,e^{\frac{-3-\sqrt{5}}{4}};0\right[\cup\left]0;\frac{1+\sqrt{5}}{2}\,e^{\frac{-3+\sqrt{5}}{4}}\right[$$

التمرين 02

تماين مقترحة (ساعد أحمد)

أولا : 1) دراسة تغيرات الدالة g :

- النهايات: $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(4e^x-2xe^x-4\right)=-4$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(4-2x)e^x-4=-\infty$.

- حساب المشتقة: $g'(x)=-2e^x+e^x(4-2x)=(-2x+2)e^x$
- إشارة $g'(x)$ هي من نفس إشارة $-2x+2$.

لدينا $g'(x)=0$ تكافئ $-2x+2=0$ أي $x=1$

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

- جدول التغيرات :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	-4	↗	$2e-4$	↘	$-\infty$

2) لدينا $g(0)=(4-0)e^0-4=0$ إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا معدوما هذا من جهة .

ومن جهة أخرى لدينا g مستمرة على $\mathbb{R}$ ورتيبة تماما على $[1,+\infty[$ و $g(1,5)\times g(1,6)<0$

فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث $1,5<\alpha<1,6$.

3) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ثانيا

1) لدينا $f(x)=\dfrac{2x-2}{e^x-2x}$. نبين أن المنحني (C_f) يقبل عند $-\infty$ و عند $+\infty$ مستقيمين مقاربين معادلتيهما على الترتيب $y=-1$ و $y=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x\left(2-\frac{2}{x}\right)}{x\left(\frac{e^x}{x}-2\right)}=0$ لأن $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty$ ومنه

المنحني (C_f) يقبل عند $+\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=0$.

つづく

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-2}{e^x-2x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(2-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(\dfrac{e^x}{x}-2\right)}=-1$ لأن $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x}=0$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{x}=0$ ومنه المنحنى (C_f) يقبل عند $-\infty$ مستقيما مقاربا أفقيا معادلته $y=-1$.

2) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x لدينا : $f'(x)=\dfrac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$.

f معرفة ومستمرة وقابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة f' حيث

$$f'(x)=\frac{2\left(e^x-2x\right)-\left(e^x-2\right)(2x-2)}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{-2xe^x+4e^x-4}{\left(e^x-2x\right)^2}=\frac{g(x)}{\left(e^x-2x\right)^2}$$

3) استنتاج إشارة $f'(x)$ وإنجاز جدول تغيرات الدالة f .

$f'(x)$ لها نفس إشارة $g(x)$ ومنه :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

وبالتالي جدول تغيرات الدالة f هو :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-1	↘	-2	↗	$f(\alpha)$	↘	0

4) حساب $f(1)$ ثم استنتاج حسب قيم x إشارة $f(x)$.

لدينا $f(1)=0$ ونلخص جدول إشارة $f(x)$ في الجدول التالي:

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	

5) نبين أن $f(\alpha)=-1+\dfrac{1}{\alpha-1}$ ونستنتج حصرا للعدد $f(\alpha)$.

لدينا من الجزء الأول $g(\alpha)=0$ أي $(4-2\alpha)e^\alpha-4=0$ أي $e^\alpha=\dfrac{4}{4-2\alpha}=\dfrac{2}{2-\alpha}$

إذن $f(\alpha)=\dfrac{2\alpha-2}{e^\alpha-2\alpha}=\dfrac{2\alpha-2}{\dfrac{2}{2-\alpha}-2\alpha}=\dfrac{\alpha-1}{\dfrac{1}{2-\alpha}-\alpha}=\dfrac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{1-2\alpha+\alpha^2}$

つづく

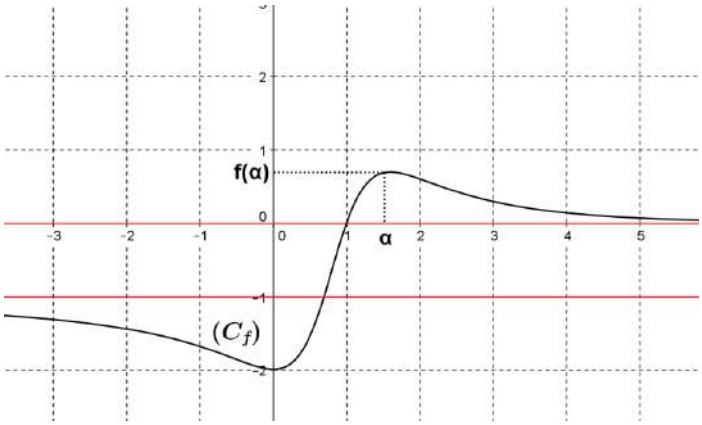
أي $f(\alpha)=\frac{(\alpha-1)(2-\alpha)}{(\alpha-1)^2}=\frac{2-\alpha}{\alpha-1}=-1+\frac{1}{\alpha-1}$.

حصر العدد $f(\alpha)$: لدينا $1,59<\alpha<1,60$ وبإضافة -1 نجد $0,59<\alpha-1<0,60$ نأخذ المقلوب نجد

$\frac{1}{0,60}<\frac{1}{\alpha-1}<\frac{1}{0,59}$ أي $1,66<\frac{1}{\alpha-1}<1,69$ وبإضافة -1 نجد $0,66<-1+\frac{1}{\alpha-1}<0,69$ أي

$0,66<f(\alpha)<0,69$

6) أنشاء المستقيمين المقاربين والمنحني (C_f) .



ثالثا:

7) المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m ، عدد واشارة حلول المعادلة

$m(e^x-2x)=2x-2$.

$m(e^x-2x)=2x-2$ تكافئ $\frac{2x-2}{e^x-2x}=m$ أي $f(x)=m$. حلول المعادلة المطلوبة هي فواصل

نقط تقاطع المنحني (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $y=m$:

- إذا كان $m<-2$ المعادلة لا تقبل حلول.
- إذا كان $m=-2$ للمعادلة حل مضاعف معدوم.
- إذا كان $-2<m<-1$ للمعادلة حلين مختلفين في الإشارة.
- إذا كان $-1\le m\le 0$ للمعادلة حل وحيد موجب.
- إذا كان $0<m<f(\alpha)$ للمعادلة حلين موجبين.
- إذا كان $m=f(\alpha)$ للمعادلة حل مضاعف $x=\alpha$.
- إذا كان $m>f(\alpha)$ المعادلة لا تقبل حلول.

つづく

رابعا:

1) لتكن F الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $F(x)=-f(x)$.

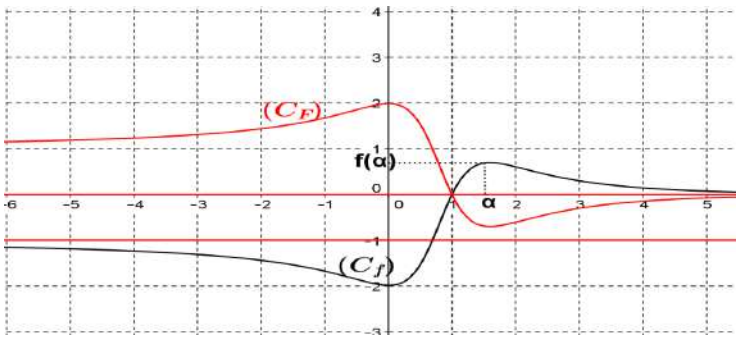
أ) حساب $F'(x)$ بدلالة $f'(x)$ واستنتاج إشارة $F'(x)$.

$F'(x)=-f'(x)$ و إشارة $F'(x)$ هي عكس إشارة $f'(x)$ أي

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ب) ننجز جدول تغيرات الدالة F وننشئ تمثيلها البياني (C_F) .

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$F(x)$	1	↗	2	↘	$-f(\alpha)$	↗	0



2) لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي : $h(x)=[f(x)]^2$

أ) حساب $h'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $h'(x)$.

لدينا $h(x)=[f(x)]^2$ ومنه $h'(x)=2f(x)\times f'(x)$.

إشارة $h'(x)$ هي إشارة الجداء $2f(x)\times f'(x)$ أي

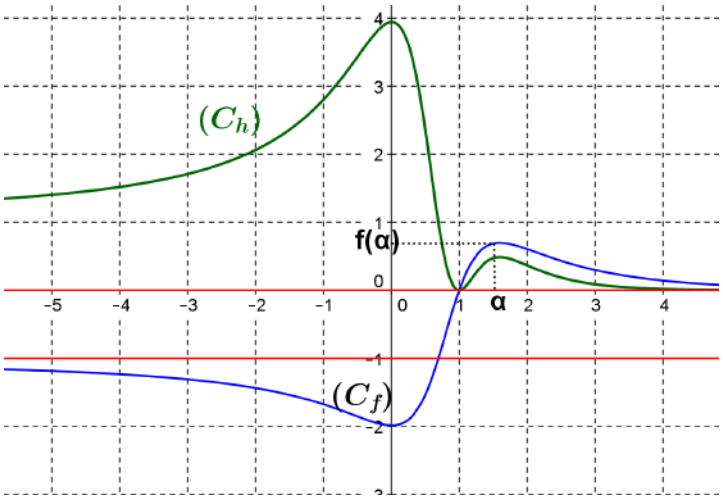
x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

つづく

ب) جدول تغيرات الدالة h .

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$	1	↗	4	↘	1	↗	$(f(\alpha))^2$	↘	0

ج) إنشاء (C_h)



3) لتكن u الدالة المعرفة كما يلي : $u(x)=\dfrac{1}{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة u : الدالة u معرفة إذا وفقط إذا كان $f(x)\neq 0$ أي من أجل $x\neq 1$

إذن $D_f=]-\infty,1[\cup]1,+\infty[$

ب)حساب $u'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $u'(x)$.

من أجل كل من D_f : $u'(x)=\dfrac{-f'(x)}{[f(x)]^2}$.

إشارة $u'(x)$ هي إشارة $-f'(x)$ أي

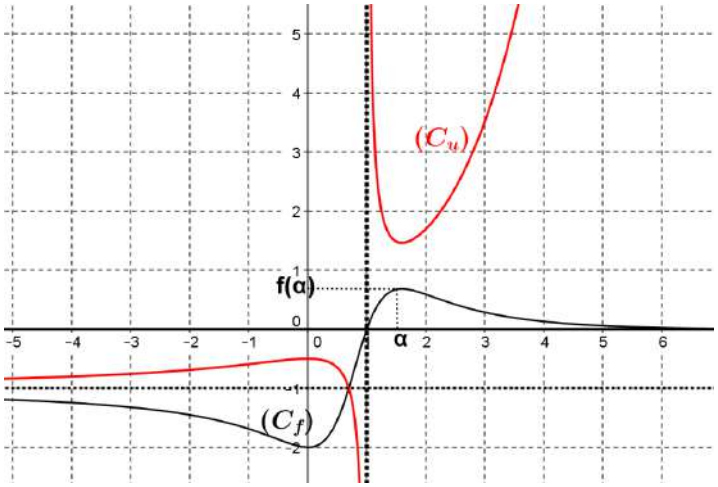
x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	

つづく

ج)جدول التغيرات

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$u'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$u(x)$	-1	↗	$-\frac{1}{2}$	↘	$-\infty$	$+\infty$ ↘	$\frac{1}{f(\alpha)}$	↗	$+\infty$

د) إنشاء (C_u)



4) لتكن v الدالة المعرفة كما يلي : $v(x)=\sqrt{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة v : v معرفة إذا وقط ذا كانت $f(x)\geq 0$ أي $D_v=[1,+\infty[$.

ب)حساب $v'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $v'(x)$.

الدالة v قابلة للإشتقاق على المجال $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي v' حيث $v'(x)=\frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$.

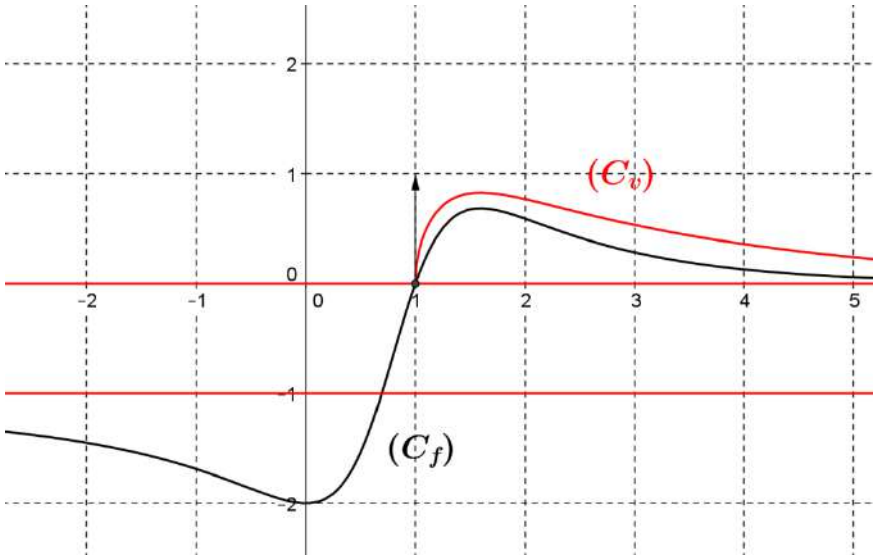
إشارة $v'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة v :

x	1		α		$+\infty$
$v'(x)$		$+$	0	$-$	
$v(x)$	0	↗	$\sqrt{f(\alpha)}$	↘	0

つづく

د) إنشاء (C_v)



5) لتكن s الدالة المعرفة كما يلي : $s(x)=\ln f(x)$

أ) مجموعة التعريف للدالة s : s معرفة إذا وفقط إذا كانت $f(x)>0$ أي $D_s=]1,+\infty[$.

ب) حساب $s'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $s'(x)$.

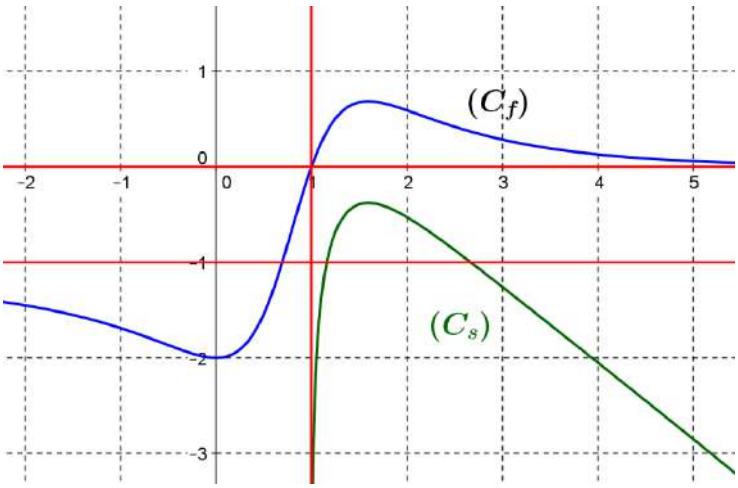
الدالة s قابلة للإشتقاق على $]1,+\infty[$ ودالتها المشتقة هي s' حيث $s'(x)=\dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

إشارة $s'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة s

x	1	α	$+\infty$
$s'(x)$	‖	$+$ 0 $-$	
$s(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$ $\ln f(\alpha)$ $\searrow$	$-\infty$

د) إنشاء (C_s)



つづく

6) لتكن t الدالة المعرفة كما يلي : $t(x)=e^{f(x)}$

أ) مجموعة التعريف للدالة t : الدالة t معرفة على $\mathbb{R}$.

ب) حساب $t'(x)$ بدلالة $f'(x)$ و $f(x)$ واستنتاج إشارة $t'(x)$.

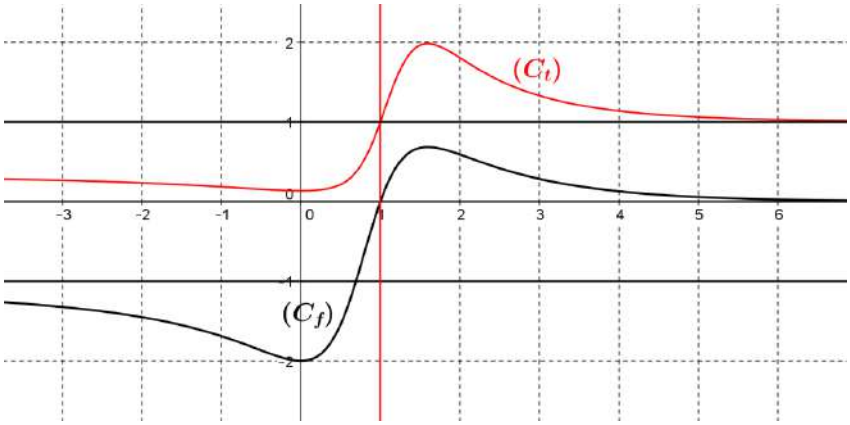
t قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي t' حيث $t'(x)=f'(x)e^{f(x)}$.

إشارة $t'(x)$ هي من نفس إشارة $f'(x)$.

ج) جدول تغيرات الدالة t

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
$t'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$t(x)$	e^{-1}	↘	e^{-2}	↗	$e^{f(\alpha)}$	↘	1

د) إنشاء (C_t)



خامسا : ارفـاق كل دالة بتمثيلها البياني

المنحني	(C_1)	(C_2)	(C_3)	(C_4)	(C_5)	(C_6)
هو التمثيل البياني للدالة.....	(C_v)	(C_s)	(C_t)	(C_h)	(C_F)	(C_u)

التمرين 03

تمارين مهمة للأساتذة لتعميق المفاهيم (قليل مصطفى)

الجزء الأول : $f_1(x)=xe^{-x}$

(1) (أ) نهاية الدالة f_1 عند $-\infty$: نعلم ان $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{e^x}=+\infty$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty$

و نهاية الدالة f_1 عند $+\infty$: نعلم حسب التزايد المقارن ان : $\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=0$

(ب) دراسة تغيرات الدالة f_1 :

$f_1'(x)=1\times e^{-x}+x\times\left(-e^{-x}\right)=(1-x)e^{-x}$ ومنه $f_1'(x)>0$ تعني أي $(1-x)e^{-x}>0$ اذن $1-x>0$ $x<1$

ومنه الدالة f_1 متزايدة من اجل $x<1$ ومتناقصة من اجل $x\succ1$ و $f_1'(x)=0$ من اجل $x=1$

(ج) المنحنى (C_k) لا يناسب (C_1) (التغيرات غير منسجمة) اذن $k\neq1$ اذن $k\succ1$, $k\geq2$

(2) (أ) $f_n(x)=x^ne^{-x}$

$f_n(0)=0^n\times e^{-0}=0$ ومنه فان كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $O(0,0)$

و نلاحظ أيضا ان $B\left(1;\frac{1}{e}\right)\in C_n$ أي $f_n(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$ اذن كل المنحنيات (C_n) تمر من النقطة $B\left(1;\frac{1}{e}\right)$

(ب) من اجل $n\geq2$ فان المشتقة هي : $f_n'(x)=nx^{n-1}e^{-x}+x^n\left(-e^{-x}\right)=x^{n-1}e^{-x}(n-x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

اذن $f'_n(x)=x^{n-1}(n-x)e^{-x}$

(3) من اجل كل عدد حقيقي x : $f_3'(x)=x^2(3-x)e^{-x}$ و $f_3'(x)>0$ من اجل $x^2(3-x)e^{-x}>0$ أي

$3-x>0$ اذن $x<3$ وبالتالي الدالة f_3 متزايدة من اجل $x<3$ ومتناقصة من اجل $x\succ3$

وهذا يعني ان الدالة f_3 تقبل قيمة حدية كبرى عندما $x=3$

(4) (أ) المماس (T_k) له معادلة من الشكل : $y=f_k'(1)(x-1)+f_k(1)$

حيث $f_k(1)=\frac{1}{e}$ و $f_k'(1)=(k-1)e^{-1}=\frac{k-1}{e}$ اذن : $(T_k):y=\frac{k-1}{e}(x-1)+\frac{1}{e}=\frac{k-1}{e}x+\frac{-k+2}{e}$

(T_k)يقطع محور الفواصل عندما $y=0$ أي $\frac{k-1}{e}x+\frac{-k+2}{e}=0$ ومنه $x=-\frac{-k+2}{k-1}=\frac{k-2}{k-1}$

اذن (T_k) يقطع محور الفواصل في النقطة $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)$

(ب) استنتاج قيمة العدد الصحيح k :

من معطيات التمرين المستقيم (T_k)يقطع محور الفواصل في النقطة $A\left(\frac{4}{5};0\right)$ أي $\left(\frac{k-2}{k-1};0\right)=\left(\frac{4}{5};0\right)$

ومنه $\frac{k-2}{k-1}=\frac{4}{5}$ اذن $5(k-2)=4(k-1)$ وبالتالي قيمة العدد هي $k=6$

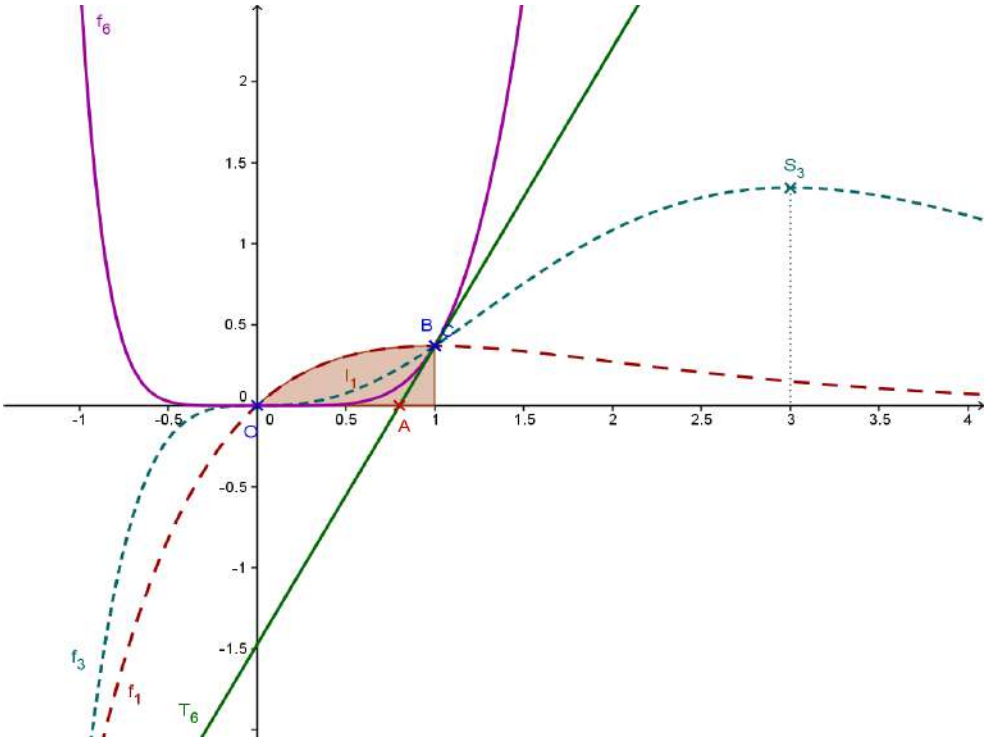
つづく

الجزء الثاني : $I_n = \int_0^1 f_n(x)\,dx$

(1) حساب (I_1) : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ باستعمال المكاملة بالتجزئة

نضع $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ ومنه $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$ اذن نجد

$$I_1 = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-e^{-x}\right)\times 1\,dx = \left[\left(-e^{-1}\right)-0\right]-\left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e}-\left[\left(e^{-1}\right)-1\right] = 1-\frac{2}{e}$$



(2) (أ) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية (I_n) :

من اجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فان الدالة f_n موجبة على $[0,1]$. اذن يمكن تفسير هندسيا العدد I_n انه مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_n) ومحور الفواصل وبالمستقيمين الذين معادلتاهما : $x=0$ و $x=1$

والتمثيلات البيانية (C_1) و (C_2) و (C_3) و (C_{10}) و (C_{20}) و (C_{30}) توحي ان المتتالية (I_n) متناقصة

(ب) برهان هذا التخمين بدراسة اتجاه تغير المتتالية (I_n) : $I_{n+1}-I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx$

ومن خواص التكامل الخطية اذن : $I_{n+1}-I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx$

وعلى المجال $[0,1]$ لدينا $(x-1)x^n e^{-x} \le 0$ اذن $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx \le 0$ ومنه $I_{n+1}-I_n \le 0$ وبالتالي $I_{n+1} \le I_n$

つづく

وهكذا اذن المتتالية (I_n) متناقصة

(ج) $I_n=\int_0^1 f_n(x)\,dx$ وبما ان $f_n(x)\geq 0$ فان $I_n\geq 0$ (محدودة من الأسفل) وبما ان المتتالية (I_n) متناقصة ومحدودة من الأسفل بالعدد 0 نستنتج ان المتتالية (I_n) متقاربة .

(د) حساب $\lim I_n$:

لدينا $0\leq x\leq 1$ ومنه $-1\leq -x\leq 0$ و $e^{-1}\leq e^{-x}\leq e^{0}$ وأيضا $x^ne^{-1}\leq x^ne^{-x}\leq x^n$ أي ان $x^ne^{-x}\leq x^n$

وبالمرور الى التكامل نجد : $\int_0^1 x^ne^{-x}\,dx\leq\int_0^1 x^n\,dx$ ومنه $I_n\leq\int_0^1 x^n\,dx=\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1=\frac{1}{n+1}$

اذن $0\leq I_n\leq\frac{1}{n+1}$ وباستعمال النهاية بالمقارنة نجد : $\lim\limits_{n\to+\infty}0=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=0$

التمرين 04

كتابة الأستاذ (بلقاسم عبد الرزاق)

الجزء الأول :

لدينا : $f_\alpha(x)=e^{2x}-2\alpha e^{x}+3$ ، حيث : $\alpha\in\mathbb{R}$.

1) f مستمرة و قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$ لأنها دالة مركبة من دالة كثير حدود و دالة أسية ، أي :

$f'_\alpha(x)=2e^{2\alpha}-2\alpha e^{x}$ ، القيم الحدية للدالة f_α تحقق : $f'_\alpha(x)=0$ أي :

$2e^{2\alpha}-2\alpha e^{x}=0$ ، ومنه : $2e^{x}\left(e^{x}-\alpha\right)=0$ ، لدينا : $e^{x}\neq 0$ إذا : $e^{x}-\alpha=0$ أي : $e^{x}=\alpha$.

وهنا نميز حالتين :

أ- إذا كان : $\alpha\leq 0$ معناه : $e^{x}=\alpha$ غير محققة و عليه نقول أن لاتوجد قيم حدية للدالة f_α لما $\alpha\leq 0$.

ب- إذا كان : $\alpha\geq 0$ معناه : $e^{x}=\alpha$ تقبل حل وحيد x_α و هو : $\ln e^{x_\alpha}=\ln\alpha$ أي : $x_\alpha\ln e=\ln\alpha$ ، ومنه : $x_\alpha=\ln\alpha$.

أي نقول توجد قيمة حدية للدالة f_α لما $\alpha\geq 0$ وهي : $\omega_\alpha\left(x_\alpha;f\left(x_\alpha\right)\right)$.

2) لدينا لما $\alpha\geq 0$ ، $\omega_\alpha\left(x_\alpha;f\left(x_\alpha\right)\right)$ هي النقطة الحدية للدالة f_α :

✓ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=f\left(x_\alpha\right)=f\left(\ln\alpha\right)=2e^{\ln\alpha}-2\alpha e^{\ln\alpha}+3\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=\left(e^{\ln\alpha}\right)^2-2e^{\ln\alpha}+3\end{cases}$

أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=\alpha^2-2\alpha^2+3\end{cases}$ أي : $\begin{cases}x_\alpha=\ln\alpha\\ y_\alpha=-\alpha^2+3\end{cases}$ ، ومنه : $\omega_\alpha\left(\ln\alpha;3-\alpha^2\right)$ لما : $\alpha\in\mathbb{R}_+^*$.

✓ تعيين مجموعة النقط ω_α لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$:

لدينا إحداثيات ω_α هي x_α و y_α حيث : $y_\alpha=f\left(x_\alpha\right)$ ، لدينا لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$ فإن : x_α يمسح $\mathbb{R}$ و y_α صورة x_α بالدالة f_α ، إذن نقول : مجموعة النقط ω_α هي المنحنى (C_α) منحنى الدالة f_α .

($x_\alpha=\ln\alpha$)، لما α يمسح $\mathbb{R}_+^*$ فإن : x_α يمسح $\mathbb{R}$.

つづく

الجزء الثاني :

نضع $\alpha=1$ ، أي : $f_1(x)=2e^{2x}-2e^{x}+3$ ، أي : $f_1'(x)=2e^{2x}-2e^{x}$.

1) لدينا : $\alpha=1>0$ ومنه : (C_1) يقبل قيمة حدية ω_1 ، حيث: $\omega_1\left(x_1;f\left(x_1\right)\right)$ ،

أي : $\begin{cases}x_1=\ln 1=0\\ y_1=f\left(0\right)=2\end{cases}$ ومنه : $\omega_1(0;2)$.

- $f_1'(x)=2e^{2x}-2e^{x}$ أي : $f_1'(x)=2e^{x}\left(e^{x}-1\right)$ ، إشارة f_1' من إشارة $\left(e^{x}-1\right)$ ، أي :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f_1'(x)$		$-$	0	$+$	
$f_1(x)$	3	↘	$f_1(0)=2$	↗	$+\infty$

- $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2e^{2x}-2e^{x}+3\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{x}\left(e^{x}-2\right)+3=+\infty$. أي : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_1(x)=+\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{2x}-2e^{x}+3\right)=3$ ، أي : $\lim\limits_{x\to-\infty}f_1(x)=3$

و منه : $y=3$ مقارب أفقي للمنحنى (C_1) بجوار $-\infty$.

2) تعيين معادلة للمماس (T) لـ (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة $\ln 2$:

$(T):y=f_1'(\ln 2)(x-\ln 2)+f_1(\ln 2)$ ، $\begin{cases}f_1'(\ln 2)=2e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}=\left(2e^{\ln 2}\right)^2-4=8-4=4\\ f_1(\ln 2)=e^{2\ln 2}-2e^{\ln 2}+3=4-4+3=3\end{cases}$

و منه : $(T):y=4(x-2\ln)+3$ ، أي : $(T):y=4x-4\ln 2+3$.

4) لدينا : $(D_m):y=mx+3-m\ln 2$:

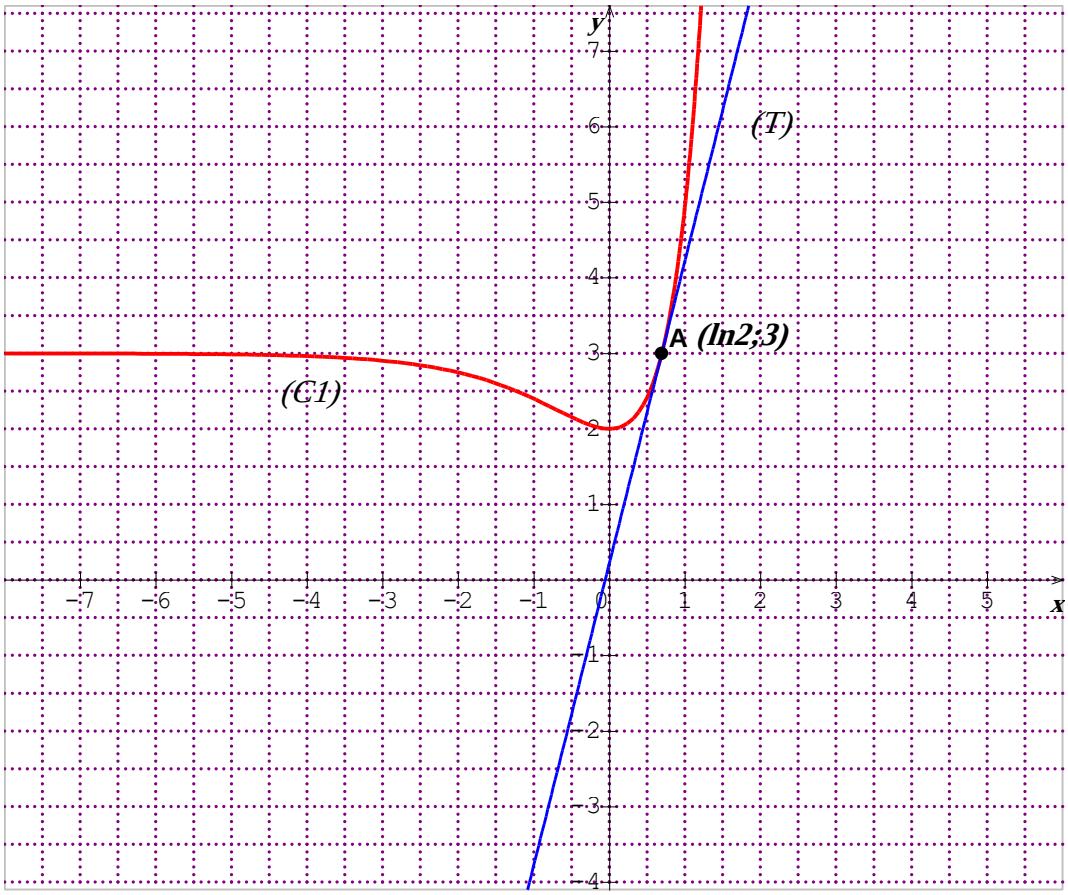
- تبيين أن المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة يطلب تعيين إحداثياها :

$y=mx+3-m\ln 2$ أي : $m(\ln 2-x)+(y-3)=0$ ومنه : $y-mx-3+m\ln 2=0$

معناه أن : $\ln 2-x=0$ و $y-3=0$، وعليه : $x=\ln 2$ و $y=3$ ، ومنه من أجل كل m من $\mathbb{R}$ المستقيمات (D_m) تشمل نقطة ثابتة ذات الإحداثيات $A(\ln 2;3)$.

つづく

3) رسم كلا من (T) و (C_1) : باستخدام مبرهن (sine qua non) :



- لنناقش بيانيا حسب قيم m عدد نقاط تقاطع (C_1) مع (D_m) :

لدينا : (T) هو (D_4) ، كما لدينا : (D_m) هي مستقيمات تشمل نقطة ثابتة لما m يمسح $\mathbb{R}$ ،

ومنه نحن في حالة المناقشة الدورانية :

- ✓ لما : $m \leq 0$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطة وحيدة هي : $A(\ln 2;3)$.
- ✓ لما : $0 < m < 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما هي $A(\ln 2;3)$.
- ✓ لما : $m = 4$ (C_1) يمس (D_m) في النقطة $A(\ln 2;3)$.
- ✓ لما : $m > 4$ (C_1) يقطع (D_m) في نقطتين إحداهما $A(\ln 2;3)$.

5) لدينا : $g(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3$ و $f_1(x) = e^{2x} - 2e^x + 3$.

- كتابة $g(x)$ بدلالة $f_1(x)$: $g(x) + f_1(x) = -e^{2x} + 2e^x + 3 + e^{2x} - 2e^x + 3 = 6$ ، وعليه : $g(x) = 6 - f_1(x)$

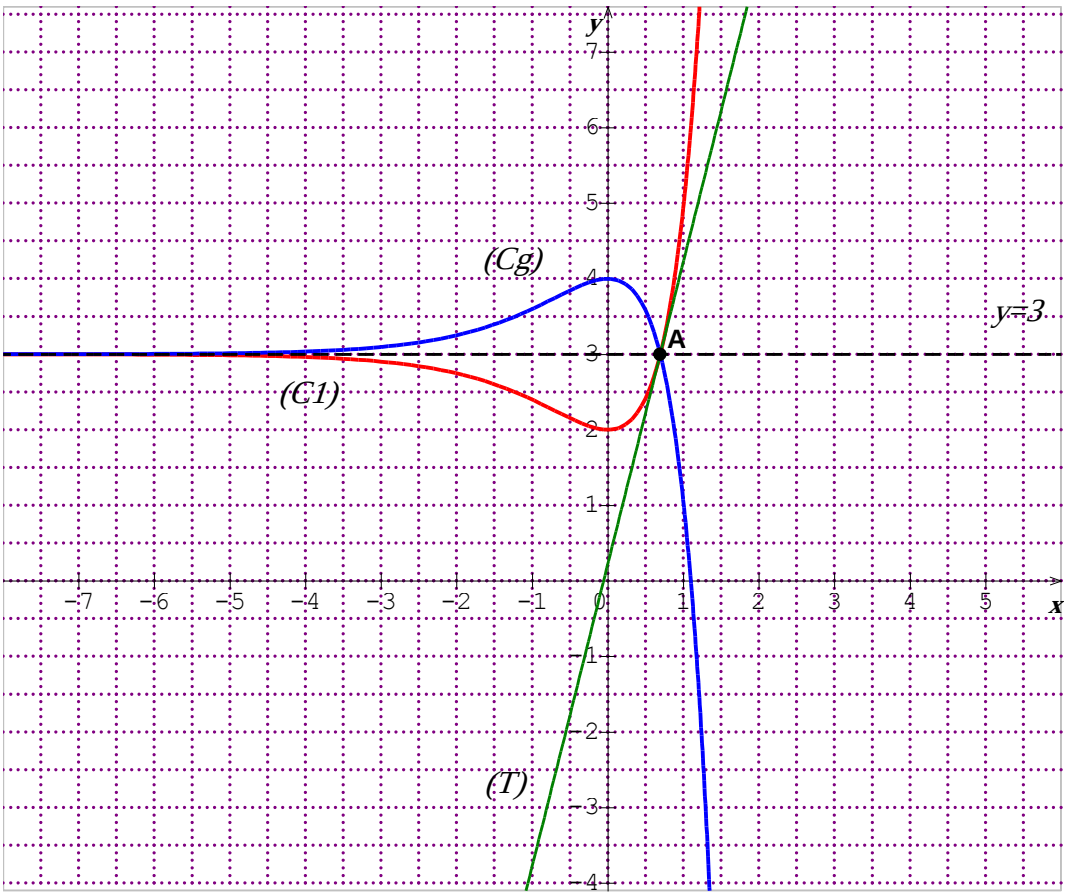
つづく

لدينا: $g(x)+f_1(x)=6$ ومنه (C') و (C_1) متناظران بالنسبة للمستقيم $y=\frac{6}{2}$ أي: $y=3$.

ملاحظة: إذا كان لدينا $f(x)+g(x)=2d$ نقول أن: (C_f) و (C_g) متناظران بالنسبة للمستقيم:

$y=\frac{2d}{2}$ أي: $y=d$ ، ليكن (C_g) نظير (C_f) بالنسبة للمستقيم $y=d$ معناه أن:

$f(x)+g(x)=f(x)+(2d-f(x))$ ومنه: $f(x)+g(x)=2d$



التمرين 05

استعد للبكالوريا مع توامي (توامي عمر)

الجزء الأول

1 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_0(x)}{x}$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_0(x)$

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f_0(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^x=+\infty$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_0) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب وَ بجوار $+\infty$.

✓ لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}f_0(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=0$

التفسير الهندسي : المنحنى (C_0) يقبل مستقيم مقارب معادلته $y=0$ (محور الفواصل) بجوار $-\infty$.

2 أ-إثبات أن الدالة f_0 قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$:

نعلم أن الدالتان $x\mapsto e^x$ وَ $x\mapsto x^2$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و بالتالي جدائهما أيضاً دالة قابة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

إذن f_0 دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

حساب $f'_0(x)$: من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'_0(x)=(x^2)'e^x+x^2(e^x)'=2xe^x+x^2e^x=(2x+x^2)e^x$

إذن : $f'_0(x)=x(x+2)e^x$

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f_0 :

إشارة $f'_0(x)$ هي من إشارة $x(x+2)$ ، لأن : $e^x>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_0(x)$

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ إذا كان $x\in]-2;0[$ فإن $f'_0(x)<0$ و بالتالي f_0 دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x\in]-\infty;-2]\cup[0;+\infty[$ فإن $f'_0(x)\geq 0$ و بالتالي f_0 دالة متزايدة .

3 جدول تغيرات الدالة f_0 :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$f'_0(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_0(x)$	0	↗	$f_0(2)=4e^{-2}$	↘	$f_0(0)=0$	↗	$+\infty$

つづく

استنتاج مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$:

من جدول التغيرات نلاحظ أن الدالة f_0 تقبل 0 كقيمة حدية صغرى لها من أجل $x = 0$ ، إذن : $f_0(x) \geq 0$

و بالتالي مجموعة حلول المتراجحة $f_0(x) > 0$ هي : $\boxed{S =]-\infty; 0[\cup]0; +\infty[}$.

4 إثبات أنه من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-x-2}$

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_0 على المجال $]-\infty; 0[$: $0 < f_0(x) \leq 4e^{-2}$ منه : $0 < x^2 e^x \leq 4e^{-2}$

نقسم الطرفين على $4x^2$ الموجب نجد : $0 < \frac{x^2}{4} \leq \frac{e^{-2}}{e^x}$ إذن : $\boxed{0 < \left(\frac{x}{2}\right)^2 \leq e^{-2-x}}$.

5 إثبات أن (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف :

لدينا من أجل كل x من المجال $]-\infty; 0[$: $f'_0(x) = (x^2 + 2x)e^x$

منه : $f''_0(x) = (x^2+2x)'e^x + (x^2+2x)(e^x)' = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x = (x^2+4x+2)e^x$

إشارة $f''_0(x)$ هي من إشارة (x^2+4x+2) ، لأن : $e^x > 0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$

مميز المعادلة $x^2+4x+2=0$ هو : $\Delta = 8 > 0$ إذن للمعادلة حلان متمايزان هما : $x_1 = -2-\sqrt{2}$ وَ $x_2 = -2+\sqrt{2}$

الجدول التالي يوضح إشارة $f''_0(x)$

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
x^2+4x+2		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f''_0(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_0(x)$ تنعدم و تغير من إشارتها عند x_1 وَ x_2 و بالتالي المنحنى (C_0) يقبل نقطتي إنعطاف هما :

$A(x_1; f_0(x_1))$ وَ $B(x_2; f_0(x_2))$.

6 كتابة معادلة المماس (Δ) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس من الشكل : $y = f'_0(0)(x-0) + f_0(0)$ مع : $f'_0(0) = f_0(0) = 0$

إذن : $\boxed{(\Delta) : y = 0}$.

7 أ-هل يمكن تعيين x_0 ؟

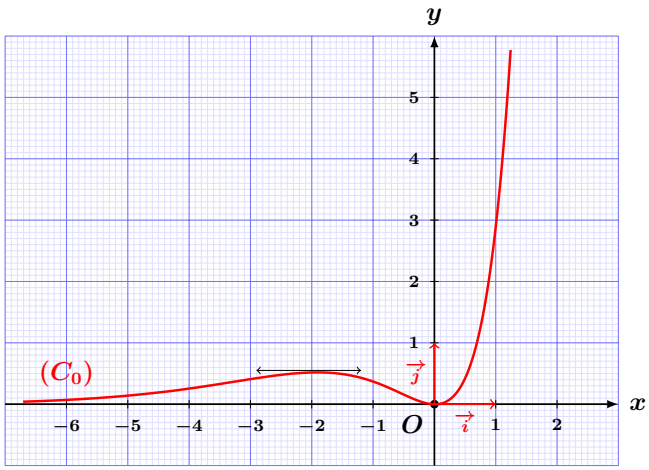
المماس (T) يوازي حامل محور الفواصل معناه : $f'_0(x_0) = 0$ و حسب ما سبق نجد : $\boxed{x_0 = 0}$ أو $\boxed{x_0 = -2}$

ب- هل يمكن تعيين x_0 ؟

يكون المماس (T) عمودي على المستقيم (Δ) معناه (T) يكون يوازي محور التراتيب ، في هذه الحالة تكون الدالة f_0 غير قابلة للاشتقاق عند x_0 ، وَ حسب السؤال 2 لدينا f_0 دالة قابلة للاشتقاق على R ، و بالتالي $\boxed{\text{لا توجد قيمة لـ } x_0}$.

つづく

8 رسم كل من المماس (Δ) وَ المنحنى (C_0) :



9 المناقشة البيانية :

لدينا من أجل كل $m > 0$ وَ $x > 0$: $2\ln|x| + x - \ln m = 0$ تكافئ $\ln x^2 + x - \ln m = 0$ تكافئ $\ln x^2 + x = \ln m$

تكافئ : $e^{\ln x^2 + x} = m$ تكافئ : $e^{\ln x^2} \times e^x = m$ أي : $x^2 e^x = m$ تكافئ : $f_0(x) = m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_0) مع المستقيمات الموازية لمحور الفواصل .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل ثلاث حلول ، حل موجب و حلين سالبين .

✓ إذا كان $m = 4e^{-2}$، المعادلة تقبل حلان ، أحدهما موجب و الأخر مضاعف سالب .

✓ إذا كان $m \in]0; 4e^{-2}[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

الجزء الثاني ---------- $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)\, e^x$ ----------

1 حساب كل من $f_0^{(1)}(x)$ ، $f_0^{(2)}(x)$ ، $f_0^{(3)}(x)$:

لدينا : $f_0^{(1)}(x) = f'_0(x)$ منه : $\boxed{f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x}$

وَ : $f_0^{(2)}(x) = f''_0(x)$ منه : $\boxed{f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)\, e^x}$

وَ : $f_0^{(3)}(x) = [f''_0(x)]' = (x^2 + 4x + 2)' e^x + (x^2 + 4x + 2)(e^x)'$ منه : $\boxed{f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)\, e^x}$

2 لنبرهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \geq 1$: $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + a_n x + b_n)\, .e^x$

✓ أولاً نقوم بتخمين عبارة $f_0^{(n)}(x)$ بدلالة n ، و حسب السؤال الأول نلاحظ أن :

$$f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x = (x^2 + (2 \times 1)\, x + 0 \times 1)\, e^x$$

$$f_0^{(2)}(x) = (x^2 + 4x + 2)\, e^x = (x^2 + (2 \times 2)\, x + 1 \times 2)\, e^x$$

$$f_0^{(3)}(x) = (x^2 + 6x + 6)\, e^x = (x^2 + (2 \times 3)\, x + 2 \times 3)\, e^x$$

إذن من أجل كل $n \geq 1$ لدينا : $\boxed{f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1))\, e^x}$ حيث : $\boxed{a_n = 2n}$ وَ $\boxed{b_n = (n-1)\, n}$

✓ ثانيا نبرهن على صحة التخمين بالتراجع و لتكن الخاصية $p(n)$

-نتحقق من صحة $p(1)$: لدينا من أجل $n = 1$، $f_0^{(1)}(x) = (x^2 + 2x)\, e^x = f'_0(x)$ منه $p(1)$ محققة .

つづく

-نفرض صحة $p(n)$ أي : $f_0^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x$

-نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي : $f_0^{(n+1)}(x) = (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))e^x$

لدينا :

$$\begin{aligned} f_0^{(n+1)}(x) &= \left[f_0^{(n)}(x)\right]' \\ &= \left[(x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x\right]' \\ &= (x^2 + 2nx + (n-1)n)'e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n)(e^x)' \\ &= (2x + 2n)e^x + (x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x \\ &= (2x + 2n + x^2 + 2nx + (n-1)n)e^x \\ &= (x^2 + 2(n+1)x + n(n+1))e^x \end{aligned}$$

منه $p(n+1)$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \geq 1$ ، التخمين صحيح (الفرضية صحيحة) .

3 لنتحقق أنه من أجل كل $n \geq 1$ ، $a_{n+1} = a_n + 2$ وَ $b_{n+1} = b_n + a_n$:

لدينا : $a_n = 2n$ منه : $a_{n+1} = 2(n+1)$ و منه : $a_{n+1} = 2n + 2$ أي : $\boxed{a_{n+1} = a_n + 2}$.

وَ لدينا : $b_n = (n-1)n$ منه : $b_{n+1} = n(n+1)$ و منه : $b_{n+1} = n^2 + n$ و منه : $b_{n+1} = n^2 \underbrace{-n + 2n}_{n}$

و منه : $b_{n+1} = n(n-1) + 2n$ إذن : $\boxed{b_{n+1} = b_n + a_n}$.

4 إثبات أن (a_n) متتالية حسابية :

لدينا : $a_{n+1} = a_n + 2$ إذن حسب التعريف يتبين أن (a_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r = 2}$.

5 لنبين أنه من أجل كل $n \geq 1$ يكون : $b_{n+1} = a_1 + a_2 + ... + a_n$

لدينا : $a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ منه : $a_1 + a_2 + ... + a_n = \frac{n}{2}(2 + 2n)$

أي : $a_1 + a_2 + ... + a_n = n(1+n)$ إذن : $\boxed{a_1 + a_2 + ... + a_n = b_{n+1}}$

الجزء الثالث ---------- $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ ----------

1 كتابة $k(x)$ دون رمز القيمة المطلقة :

نعلم أن : $|x| = \begin{cases} x & , \ x \geq 0 \\ -x & , \ x \leq 0 \end{cases}$ منه : $k(x) = \begin{cases} x\sqrt{e^x} & , \ x \geq 0 \\ -x\sqrt{e^x} & , \ x \leq 0 \end{cases}$

-دراسة استمرارية الدالة k عند 0 :

لدينا : $k(0) = 0$ وَ $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = k(0) = 0$ منه : $\lim\limits_{x \to 0} k(x) = 0$ ، إذن $\boxed{\text{الدالة } k \text{ مستمرة عند } 0}$

2 دراسة قابلية اشتقاق الدالة k على يمين و على يسار 0 :

$\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{x\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \sqrt{e^x} = 1$ ، منه الدالة k قابلة للاشتقاق على يمين 0

$\lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{k(x) - k(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} \frac{-x\sqrt{e^x}}{x} = \lim\limits_{x \overset{<}{\to} 0} -\sqrt{e^x} = -1$ ، منه الدالة k قابلة للاشتقاق على يسار 0

النتيجة : بما أن النهاية من اليمين تختلف عن النهاية من اليسار فإن $\boxed{\text{الدالة } k \text{ غير قابلة للاشتقاق عند } 0}$.

التفسير الهندسي : المنحنى (C_k) يقبل نصفي مماسين عند النقطة $O(0;0)$ وَ تسمى نقطة زاوية .

つづく

3 كتابة معادلتي المماسين لـ (C_k) عند الفاصلة 0 :

لدينا معادلة المماس على يمين 0 من الشكل : $y = k'_d(0)(x-0) + k(0)$ حيث : $k(0) = 0$ وَ $k'_d(0) = 1$

منه معادلة المماس من يمين 0 هي: $\boxed{y = x}$.

لدينا معادلة المماس على يسار 0 من الشكل : $y = k'_g(0)(x-0) + k(0)$ حيث : $k(0) = 0$ وَ $k'_g(0) = -1$

منه معادلة المماس من يسار 0 هي: $\boxed{y = -x}$.

4 لنبين أن الدالة k هي مركب دالتين عدديتين أحدهما الدالة f_0:

لدينا : $k(x) = |x|\sqrt{e^x}$ منه : $k(x) = \sqrt{x^2}\sqrt{e^x}$ و منه : $k(x) = \sqrt{x^2e^x}$ أي : $\boxed{k(x) = \sqrt{f_0(x)}}$

إذن الدالة k هي مركب دالتين ، الأولى هي الدال f_0 وَ الثانية هي الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$.

5 لنبين أنه من أجل كل من $\mathbb{R}$ أن : $2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $k(x) = \sqrt{f_0(x)}$ منه : $k'(x) = \dfrac{f_0'(x)}{2\sqrt{f_0(x)}}$ و منه : $k'(x) = \dfrac{f_0'(x) \times \sqrt{f_0(x)}}{2f_0(x)}$

إذن : $\boxed{2f_0(x) \times k'(x) = f'_0(x) \times \sqrt{f_0(x)}}$.

6 استنتاج اتجاه تغير الدالة k :

إشارة $k'(x)$ هي من إشارة $f'_0(x)$ ، و حسب الجزء الأول في السؤال 2-ب نستنتج ما يلي :

✓ إذا كان $x \in]-2;0[$ فإن $k'(x) < 0$ و بالتالي k دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x \in]-\infty;-2] \cup [0;+\infty[$ فإن $k'(x) \geq 0$ و بالتالي k دالة متزايدة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		-2		0		$+\infty$
$k'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$k(x)$	0	↗	$k(-2) = 2\sqrt{e^{-2}}$	↘	$k(0) = 0$	↗	$+\infty$

7 حساب : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x}$

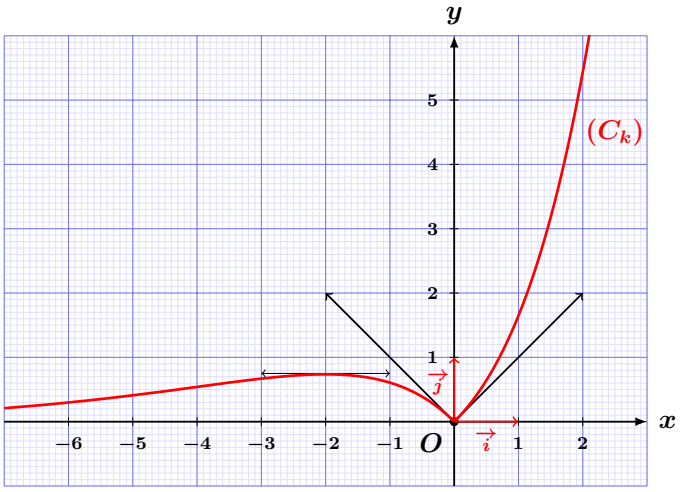
لدينا : $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{k(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{|x|e^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{xe^x}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$

التفسير الهندسي :

المنحنى (C_k) يقبل فرع قطع مكافئ باتجاه محور التراتيب .

つづく

8 رسم المنحنى (C_k) :



9 المناقشة البيانية :

لدينا : $|x|\sqrt{e^x}+x-m=0$ منه : $|x|\sqrt{e^x}=-x+m$ أي : $k(x)=-x+m$

إذن حلول المعادلة هي فواصل نقاط تقاطع (C_k) مع المستقيمات الموازية لنصف المماس من يسار 0

✓ إذا كان $m\in]-\infty;0[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد سالب .

✓ إذا كان $m=0$ ، المعادلة تقبل حل وحيد معوم .

✓ إذا كان $m\in]0;+\infty[$ ، المعادلة تقبل حل وحيد موجب .

الجزء الرابع ---------- $f_\alpha(x)=(x-\alpha)^2e^x$ ----------

1 حساب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f_\alpha(x)$ وَ $\lim\limits_{x\to-\infty}f_\alpha(x)$

$$\lim_{x\to+\infty}f_\alpha(x)=\lim_{x\to+\infty}(x-\alpha)^2e^x=+\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}f_\alpha(x)=\lim_{x\to-\infty}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)e^x=\lim_{x\to-\infty}(x^2e^x-2\alpha xe^x+\alpha^2e^x)=0$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}x^2e^x=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$.

2 لنثبت أن من أجل كل x من $\mathbb{R}$ ، $f'_\alpha(x)=(2+x-\alpha)(x-\alpha)e^x$:

الدالة f_α معرفة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ حيث : $f'_\alpha(x)=\left[(x-\alpha)^2\right]'e^x+(x-\alpha)^2(e^x)'$

منه : $f'_\alpha(x)=2(x-\alpha)e^x+(x-\alpha)^2e^x$ و منه : $f'_\alpha(x)=\left[2(x-\alpha)+(x-\alpha)^2\right]e^x$

إذن : $\boxed{f'_\alpha(x)=(x-\alpha)(2+x-\alpha)e^x}$.

3 دراسة اتجاه تغير الدالة f_α :

إشارة $f'_\alpha(x)$ هي من إشارة $(x-\alpha)(2+x-\alpha)$ لأن : $e^x>0$ من أجل كل x من $\mathbb{R}$.

لدينا : $f'_\alpha(x)=0$ تكافئ : $(x-\alpha)(2+x-\alpha)=0$ أي $(x=\alpha$ أو $x=\alpha-2)$

つづく

الجدول التالي يوضح إشارة $f'_\alpha(x)$:

x	$-\infty$		$\alpha-2$		α		$+\infty$
$x-\alpha$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2-\alpha$		$-$	0	$+$		$+$	
$f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

✓ إذا كان $x \in]\alpha-2;\alpha[$ فإن $f'_\alpha(x) < 0$ و بالتالي f_α دالة متناقصة تماماً .

✓ إذا كان $x \in]-\infty;\alpha-2] \cup [\alpha;+\infty[$ فإن $f'_\alpha(x) \geq 0$ و بالتالي f_α دالة متزايدة .

جدول التغيرات :

x	$-\infty$		$\alpha-2$		α		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f_\alpha(x)$	0	↗	$4e^{\alpha-2}$	↘	0	↗	$+\infty$

4 حساب كل من $f''_\alpha(x)$ وَ $f'''_\alpha(x)$:

لدينا : $f'_\alpha(x) = (x-\alpha)(2+x-\alpha)e^x$

منه : $f''_\alpha(x) = [x^2+(4-2\alpha)x+\alpha^2-4\alpha+2]e^x$

وَ : $f'''_\alpha(x) = [x^2+(6-2\alpha)x+\alpha^2-6\alpha+6]e^x$

5 لنبين بالتراجع على العدد الطبيعي n الغير معدوم أن : $f^{(n)}_\alpha(x) = [(x+n-\alpha)^2-n]e^x$

-نتحقق من صحة $p(1)$: لدينا من أجل $n=1$،

$f^{(1)}_\alpha(x) = [(x+1-\alpha)^2-1]e^x = (x+1-\alpha-1)(x+1-\alpha+1)e^x = (x-\alpha)(x+2-\alpha)e^x$

أي $f^{(1)}_\alpha(x) = f'_\alpha(x)$ منه $p(1)$ محققة .

-نفرض صحة $p(n)$ أي : $f^{(n)}_\alpha(x) = [(x+n-\alpha)^2-n]e^x$

-نبرهن على صحة $p(n+1)$ أي : $f^{(n+1)}_\alpha(x) = [(x+n+1-\alpha)^2-(n+1)]e^x$

لدينا :

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}_\alpha(x) &= [f^{(n)}_\alpha(x)]' \\
&= [[(x+n-\alpha)^2-n]e^x]' \\
&= [(x+n-\alpha)^2-n]'e^x + [(x+n-\alpha)^2-n](e^x)' \\
&= 2(x+n-\alpha)e^x + [(x+n-\alpha)^2-n]e^x \\
&= [2(x+n-\alpha)+(x+n-\alpha)^2-n]e^x \\
&= \left[\underbrace{(x+n-\alpha)^2+2(x+n-\alpha)+1}-1-n\right]e^x \\
&= [(x+n-\alpha+1)^2-(1+n)]e^x
\end{aligned}$$

つづく

منه $(n+1)\,p$ صحيحة و بالتالي من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، $f_\alpha^{(n)}(x) = \left[(x+n-\alpha)^2 - n\right] e^x$.

6 لنبين أن كل المنحنيات (C_α) تقبل نقطتي انعطاف فاصلتهما x_1 وَ x_2 :

لدينا : $f''_\alpha(x) = 0$ منه : $x^2 + (4-2\alpha)x + \alpha^2 - 4\alpha + 2 = 0$ أي : $(x+2-\alpha)^2 - 2 = 0$

منه : $(x+2-\alpha)^2 = 2$ ومنه : $(x+2-\alpha = \sqrt{2}$ أو $x+2-\alpha = -\sqrt{2})$

أي : $(x = \alpha + \sqrt{2} - 2$ أو $x = \alpha - \sqrt{2} - 2)$

الجدول التالي يوضح إشارة $f''_\alpha(x)$:

x	$-\infty$		$\alpha-\sqrt{2}$		$\alpha+\sqrt{2}$		$+\infty$
$f''_\alpha(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من جدول الإشارة نلاحظ أن $f''_\alpha(x)$ ينعدم و يغير من إشارته من أجل $x_1 = \alpha + \sqrt{2} - 2$ وَ $x_2 = \alpha - \sqrt{2} - 2$

و بالتالي المنحنى (C_α) يقبل نقطتي إنعطاف هما : $\boxed{A_\alpha(x_1; f_\alpha(x_1))}$ وَ $\boxed{B_\alpha(x_2; f_\alpha(x_2))}$.

7 دراسة اتجاه تغير الدالة كيف نختار قيمة α حتى يكون : $x_1 < 0 < x_2$ ؟

يكون $x_1 < 0 < x_2$ لما $x_1 \times x_2 < 0$ منه : $\left(\alpha + \sqrt{2} - 2\right)\left(\alpha - \sqrt{2} - 2\right) < 0$ و منه : $(\alpha-2)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 < 0$

و منه : $(\alpha-2)^2 < \left(\sqrt{2}\right)^2$ أي : $|\alpha - 2| < 2$ و بالتالي : $\boxed{-\sqrt{2}+2 < \alpha < \sqrt{2}+2}$.

8 التعرف على القيم المختلفة للوسيط α :

لدينا من جدول تغيرات الدالة f_α أن المنحنيات (C_α) تقبل قيمة حدية صغرى من أجل $x = \alpha$

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = -1$ يمثل (C_{-1}) أي $\alpha = -1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 0$ يمثل (C_0) أي $\alpha = 0$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 1$ يمثل (C_1) أي $\alpha = 1$.

✓ المنحنى الذي قيمته الحدية الصغرى من أجل $x = 2$ يمثل (C_2) أي $\alpha = 2$.