الأعداد الأوليـة

الكفاءات المستهدفة — الأستاذ :بوخلاط محمد

1) التعرف على أولية عدد طبيعي .
2) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين مضاعفات عدد طبيعي وقاسمه .
3) استعمال تحليل عدد طبيعي الى جداء عوامل أولية لتعيين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر .
4) استعمال العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الاكبر .
5) استعمال خواص المضاعف المشترك الأصغر .
6) استعمال مبرهنة بيزو .
7) استعمال مبرهنة غوص ونتائجها .

تعريف : القول ان العدد الطبيعي n عدد اولي معناه أن n يقبل قاسمين بالضبط في $\mathbb{Z}$: 1 و n نفسه

ملاحظات :

1) العدد 0 غير أولي لأنه يقبل عدد غير منته من القواسم .
2) العدد 1 غير أولي لأنه يقبل قاسم واحد هو نفسه .
3) العدد 2 هو العدد الاولي الزوجي الوحيد .

خواص :

خاصية 1 : كل عدد طبيعي n أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل على الأقل قاسما أوليا .

البرهان : ليكن n عددا طبيعيا أكبر تماما من 1 .

*) إذا كان n أوليا فإن n يقسم n وبالتالي الخاصية محققة .

*) إذا كان n غير أولي فإن n يقبل على الاقل قاسما يختلف عن 1 وعن n . ليكن p أصغر قاسم للعدد n يختلف عن 1 وعن n . نفرض أن p غير أولي ومنه يوجد عدد طبيعي d يقسم p حيث $1 \prec d \prec p$ وبالتالي d يقسم n وهذا تناقض (لأن $d \prec p$ و p أصغر قاسم للعدد n) ومنه p عدد أولي وعليه الخاصية محققة .

خاصية 2 :

كل عدد طبيعي n غير أولي أكبر تماما من 1 ($n \geq 2$) يقبل قاسما اوليا a حيث $a \leq \sqrt{n}$

البرهان : ليكن n عددا طبيعيا غير اولي أكبر تماما من 1 .

n يقبل قاسما d يختلف عن 1 و عن n ومنه $n = d \times d'$ حيث d' عدد طبيعي غير معدوم .

(لأن إذا كان $d' = 1$ فإن $d = n$ وهذا تناقض)

نفرض $d \leq d'$ ومنه $d^2 \leq d \times d'$ أي أن $d^2 \leq n$ وبالتالي $d \leq \sqrt{n}$.

حسب الخاصية 1 : d يقبل على الأقل قاسما أوليا a وهو كذلك قاسم أولي للعدد n .

بما أن لدينا $a \leq d$ و $d \leq \sqrt{n}$ نستنتج أن : $a \leq \sqrt{n}$.

خاصية 3 : مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

البرهان :

نستعمل البرهان بالخلف

نفرض أن مجموعة الأعداد الأولية منتهية . ليكن p أكبر عدد من مجموعة الاعداد الأولية .

ليكن N جداء كل الاعداد الأولية من 2 الى p .أي $N=2\times3\times5\times.....\times p$.

ليكن N' العدد الطبيعي حيث أن : $N'=N+1$ باقي قسمة N' على 2،3،5..... او p تعطي الباقي دوما 1 . إذن N' غير قابل للقسمة على 2،3،5..... او p .

- إذا كان N' اوليا فإن $N'\succ p$ وهذا تناقض .
- إذا كان N' غير أولي فإن N' يقبل قاسما أوليا أكبر من p (حسب الخاصية 1) وهذا تناقض

إذن مجموعة الأعداد الأولية غير منتهية .

طرائـــــق

تمرين :

في كل حالة من الحالات التالية أذكر إن كان العدد أوليا :

ا) 251 ب) 341 ج) 1023

الحل :

ا) $\sqrt{251}\approx15.84$ الأعداد الألية الأصغر من هي $13;11;7;5;3;2$.

العدد 251 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 وكذلك $251=7\times35+6$ و $251=11\times22+9$ و $251=13\times19+4$ بالتالي العدد 251 أولي .

ب) $\sqrt{341}\approx18.46$ الأعداد الألية الأصغر من 18 هي $17;13;11;7;5;3;2$.

العدد 341 لا يقبل القسمة على 2 وعلى 3 وعلى 5 لكن يقبل القسمة على 11 وبالتالي 341 غير أولي .

ج) $\sqrt{1023}\approx31.98$ الأعداد الألية الأصغر من 31 هي $29;23;19;17;13;11;7;5;3;2$.

العدد 1023 لا يقبل القسمة على 2 لكن يقبل القسمة على 3 وبالتالي 341 غير أولي .

2) تحليل عدد الى جداء عوامل أولية :

مبرهنة : كل عدد طبيعي غير أولي n حيث يمكن تحليله الى جداء عوامل أولية

البرهان:

ليكن n عددا طبيعيا أكبر من 1 .

n عددا طبيعيا غير أولي فإن يقبل يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1\geq2$)على الأقل وبالتالي :

$n=p_1\times n_1$ حيث $1\prec n_1\prec n$.

- إذا كان n أوليا فإن المبرهنة محققة .
- إذا كان n غير اولي فإن n يقبل القسمة على عدد أولي p_1 ($p_1\geq2$) على الاقل وبالتالي :

$n_1=p_1\times n_2$ حيث $1\prec n_2\prec n_1$. نواصل العملية بنفس الطريقة حتى الحصول $1\prec n_1\prec n$

على $n_i = 1$ (عدد طبيعي) . وعليه نحصل $n = p_1 \times p_2 \times ..... \times p_k$ (k عدد طبيعي)
يمكن للأعداد p_1 ، p_2 ، p_3 ،..... ، p_k . أن تتكرر في التحليل .
وعليه نحصل على $n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times ..... \times p_k^{d_k}$. حيث d_1 ، d_2 ، d_3 ،..... ، d_k أعداد طبيعية .

خاصية : a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر تماما من 1 .
يكون العدد b قاسما للعدد a إذا وفقط إذا كان كل عامل أولي في تحليل b موجودا في تحليل a وبأس إما مساو وإما أصغر من أسه في تحليل a .

البرهان : n عدد طبيعي أكبر تماما من 1 تحليله الى جداء عوامل أولية
$n = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times ..... \times p_k^{d_k}$.

- إذا كان l قاسما للعدد n فإن $n = l \times l'$ حيث l' عدد طبيعي . إذن كل قاسم أولي للعدد l هو قاسم أولي للعدد n وبالتالي لا يوجد أي قاسم أولي للعدد l يختلف عن العوامل الأولية الموجودة في تحليل n ، وكل عامل أولي في تحليل l موجود في تحليل n بأس إما مساو و إما أصغر من أسه في تحليل n .

إذن قواسم العدد n هي الأعداد الطبيعية من الشكل $p_1^{d_1'} \times p_2^{d_2'} \times p_3^{d_3'} \times ..... \times p_k^{d_k'}$ حيث :
$0 \le d_1' \le d_1$ ، $0 \le d_2' \le d_2$ ، ..... ، $0 \le d_k' \le d_k$.

- عكسيا l ليكن عددا طبيعيا مكتوبا على الشكل $p_1^{d_1'} \times p_2^{d_2'} \times p_3^{d_3'} \times ..... \times p_k^{d_k'}$ يمكننا أن نكتب : $n = l\left(p_1^{d_1'} \times p_2^{d_2'} \times p_3^{d_3'} \times ..... \times p_k^{d_k'}\right)$.

لأن

$$\left(p_1^{d_1-d_1'} \times p_2^{d_2-d_2'} \times p_3^{d_3-d_3'} \times .... \times p_k^{d_k-d_k'}\right)\left(p_1^{d_1'} \times p_2^{d_2'} \times p_3^{d_3'} \times ... \times p_k^{d_k'}\right) = p_1^{d_1} \times p_2^{d_2} \times p_3^{d_3} \times ... \times p_k^{d_k}$$

ومنه l يقسم n

طرائـــق

تـمـريـن :

1) حلل العدد 725 الى جداء عوامل اولية .
2) عين كل القواسم الموجبة للعدد 725 .
3) عين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2 - y^2 = 725$.

الـحل :

1) تحليل العدد 725 .
$725 = 5^2 \times 29$
2) قواسم العدد 725 .
عدد قواسم العدد 725 هو $(2+1)(1+1) = 6$.

للحصول على قواسم العدد 725 نتبع مايلي : كل قواسم العدد 725 هي من الشكل $5^{\alpha}\times 29^{\beta}$ حيث $0\le\alpha\le 2$ و $0\le\beta\le 1$.

5^0	29^0	$5^0\times 29^0=1$
	29^1	$5^0\times 29^1=29$
5^1	29^0	$5^1\times 29^0=5$
	29^1	$5^1\times 29^1=145$
5^2	29^0	$5^2\times 29^0=25$
	29^1	$5^2\times 29^1=725$

3) تعين كل الثنائيات $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق $x^2-y^2=725$:

لدينا $x^2-y^2=725$ تكافيء $(x-y)(x+y)=725$ تكافيء $\begin{cases}x+y=1\\x-y=725\end{cases}$ أو $\begin{cases}x+y=29\\x-y=25\end{cases}$

أو $\begin{cases}x+y=5\\x-y=145\end{cases}$ يكافيء $\begin{cases}x=363\\y=-362\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=27\\y=2\end{cases}$ أو $\begin{cases}x=75\\y=-70\end{cases}$. الثنائية الوحيدة التي تحقق $x^2-y^2=725$ هي $(27;2)$.

المضاعف المشترك الاصغر لعددين :

a عدد طبيعي غير معدوم . نرمز بـ M_a الى مجموعة مضاعفات العدد a .

1) تعريف : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . M_a مجموعة مضاعفات a و M_b مجموعة مضاعفات b . $M_a\cap M_b$ هي مجموعة المضاعفات المشتركة للعددين a و b يسمى أصغر عنصر غير معدوم من المجموعة $M_a\cap M_b$ المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b ونرمز له بـ $PPCM(a;b)$.

ملاحظات : **1)** $PPCM(a;a)=a$.

2) $PPCM(a;1)=a$.

مثال :

تعين $PPCM(12;26)$.

$M_{12}=\{0;12;24;36;48;60;72;84;96;108;120;132;144;156....\}$

و $M_{26}=\{0;26;52;78;104;130;156.....\}$

وبالتالي $M_{12}\cap M_{26}=\{0;156;....\}$ إذن $PPCM(12;26)=156$.

تمديد المضاعف المشترك الأصغر لعددين صحيحين :

تعريف : a و b عددان صحيحان غير معدومين .

المضاعف المشترك الأصغر للعددين a و b هو أصغر عدد طبيعي m غير معدوم حيث $m = PPCM(|a|;|b|)$.

خاصية للمضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعين :

خاصية : a و b عددان طبيعيان غير معدومين . k عدد صحيح غير معدوم
$PPCM(ka;kb) = |k| PPCM(a;b)$.

طرائـــــق

تمـريـن :

n عدد طبيعي أكبر من 3 .

نضع $a = (6n^2 - 24)(n^2 - 9)$ و $b = (3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)$.

1) برهن أن $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(6;3)$.

2) عين $PPCM(a;b)$.

الـحل :

1) نبرهن أن $PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(6;3)$:

لدينا :

$$PPCM(a;b) = PPCM\left((6n^2 - 24)(n^2 - 9);(3n^2 + 3n - 18)(n^2 - n - 6)\right)$$

$$PPCM(a;b) = PPCM\left(6(n^4 - 13n + 36);3(n^4 - 13n + 36)\right)$$

.

$$PPCM(a;b) = (n^4 - 13n + 36) PPCM(3;6)$$

$$PPCM(a;b) = (n^2 - 4)(n^2 - 9) PPCM(3;6)$$

تعين $PPCM(a;b)$.

لدينا : $PPCM(3;6) = 6$. وبالتالي $PPCM(a;b) = 6(n^2 - 4)(n^2 - 9)$.

حساب القاسم المشترك الأكبر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :

خاصية : القاسم المشترك الأكبر لعددين طبيعين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الاولية المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأصغر أس .

حساب المضاعف المشترك الأصغر باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية :

خاصية : المضاعف المشترك الأصغر لعددين طبيعين a و b كلاهما أكبر تماما من 1 هو جداء العوامل الاولية المشتركة وغير المشتركة في تحليلي العددين a و b بحيث يؤخذ كل عامل من هذه العوامل مرة واحدة وبأكبر أس .

العلاقة بين المضاعف المشترك الأصغر والقاسم المشترك الأكبر :

خاصية : a و b عددان طبيعيان كلاهما أكبر من 1 : $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$.

طرائـــــق

تمرين 1 :

نضع $a=256$ و $b=5040$ باستعمال التحليل الى جداء عوامل أولية عين $PGCD(a;b)$ و $PPCM(a;b)$.

تمرين 2 : عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق الجملة : $\begin{cases}a\times b=12000\\PPCM(a;b)=600\end{cases}$.

تمرين3 : عين كل الثنائيات $(a;b)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق المعادلة :

$$PPCM(a;b)=21\times PGCD(a;b)$$

الحل التمرين الاول :

تحليل كلا من a و b الى جداء عوامل أولية : $a=256=2^8$ ، $b=5040=2^4\times3^2\times5\times7$.

اذن : $PGCD(a;b)=2^4=16$ و $PPCM(a;b)=2^8\times3^2\times5\times7=80640$.

الحل التمرين الثاني:

تعين كل الثنائيات $(a;b)$: $\begin{cases}a\times b=12000\\PPCM(a;b)=600\end{cases}$

لدينا : $PGCD(a;b)\times PPCM(a;b)=a\times b$ وبالتالي $PGCD(a;b)=\dfrac{a\times b}{PPCM(a;b)}$ أي

$PGCD(a;b)=\dfrac{12000}{600}=20$ وعليه نجد $\begin{cases}a\times b=12000\\PGCD(a;b)=20\end{cases}$.

لدينا : $PGCD(a;b)=20$ معناه $a=20k$ و $b=20k'$ حيث k و k' عددان صحيحان و $PGCD(k;k')=1$. وعليه $a\times b=12000$ معناه $20k\times20k'=12000$ أي $k\times k'=30$.وبالتالي ثنائيات $(k;k')$ هي : $(1;30)$ ، $(30;1)$ ، $(5;6)$ ، $(6;5)$ ، $(2;15)$ ، $(15;2)$ ، $(10;3)$ ، $(3;10)$.

إذن ثنائيات $(a;b)$: $(20;600)$ ، $(600;20)$ ، $(100;120)$ ، $(120;100)$ ، $(40;300)$ ، $(300;40)$ ، $(100;60)$ ، $(60;100)$.

مبرهنة بيزو :

مبرهنة : يكون عددان صحيحان a و b أوليين فيما بينهما إذا وفقط إذا وجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$.

ملاحظة : الثنائية $(u;v)$ ليست وحيدة .

خواص :

1) إذا كان d القاسم المشترك الأكبر لعددين صحيحين a و b فإنه يوجد عددان صحيحان u و v حيث : $au+bv=d$.

البرهان :

a و b عددان صحيحان غير معدومين وليكن d قاسمهما المشترك الأكبر . نضع $a=da'$ و $b=db'$ حيث a' و b' عددان صحيحان أوليان فيما بينهما .اذن حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان u و v حيث $a'u+b'v=1$ بضرب الطرفين في d نحصل على $da'u+db'v=1$ أي $au+bv=d$.

2) إذا كان a عددا أوليا فإن a أولي مع كل الأعداد التي لا يقسمها .

البرهان :

ليكن p عددا أوليا و a عدد طبيعيا لا يقبل القسمة على p ، نضع $PGCD(a;p)=d$. بما أن p أولي فإن $d=1$ أو $d=p$ و d لا يقسم a إذن $d=1$ ومنه p أولي مع a .

3) إذا كان a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c فإن a أولي مع جدائهما $b\times c$.

البرهان :

ليكن a عددا أوليا مع عددين صحيحين b و c إذن حسب مبرهنة بيزو توجد أعداد صحيحة u ، v و u' ، v' حيث : $au+bv=1$ و $au'+cv'=1$ نضرب طرفا لطرف نحصل على : $a(auu'+cuv'+bu'v)+bc(vv')=1$ أي وبالتالي حسب مبرهنة بيزو a و $b\times c$ أوليان فيما بينهما .

طرائـــــق

تمرين 1 :

n عدد طبيعي أثبت أن العددين a و b أوليان فيما بينهما حيث : $a=2n+3$ و $b=3n+5$.

الحل التمرين الاول :

نحسب $-3a+2b$.

$-3a+2b=-3(2n+3)+2(3n+5)=1$.إذن $-3a+2b=1$ وبالتالي حسب مبرهنة بيزو a و b أوليان فيما بينهما .

تمرين 2 :

n عدد طبيعي غيرمعدوم . نضع $a=2n^2+4n+1$ و $b=n+2$. باستعمال مبرهنة بيزو ، برهن أن العددين a و b أوليان فيما بينهما .

الحل التمرين الثاني :

لدينا : $a=2n(n+2)+1$ أي $a=2nb+1$ وبالتالي نجد $a-2nb=1$ وعليه حسب مبرهنة بيزو يوجد عددان صحيحان 1 و $-2n$ بحيث $a-2nb=1$ وبالتالي a و b أوليان فيما بينهما .

مبرهنة غوص :

مبرهنة : a ، b و c ثلاثة أعداد صحيحة غير معدومة .
إذاكان a يقسم الجداء bc وكان a أوليا مع b فإن a يقسم c .

البرهان : ليكن a و b عددان صحيحان أوليين فيما بينهما غير معدومين ، حسب مبرهنة بيزو يوجد عددين صحيحان u و v حيث : $au+bv=1$. ليكن c عددا صحيحا غير معدوم حيث يقسم الجداء bc .بضرب طرفي المساواة $au+bv=1$ في c نحصل على $cau+cbv=c$. وبما أن a يقسم الجداء bc اذن a يقسم الجداء bcv ولدينا a يقسم الجداء acu فإن a يقسم $cau+cbv$ أي a يقسم c .

خواص :

1) a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي .
إذا كان p يقسم الجداء ab فإن p يقسم a أو p يقسم b .

البرهان :

a و b عددان طبيعيان غير معدومين و p عدد أولي حيث p يقسم الجداء ab .
*) إذا كان p يقسم a تكون الخاصية محققة .
*) إذا كان p لا يقسم a فإن $p\gcd(a;p)=1$ لأن p عدد أولي وقاسميه هما 1 و p إذن a و p أوليان فيما بينهما .
وبما أن p يقسم الجداء ab وهو أولي مع a وحسب مبرهنة غوص فإن p يقسم b .

2) a ، b و c أعداد طبيعية غير معدومة .
إذا كان a مضاعفا للعددين b و c وكان b و c أوليين فيما بينهما فإن a مضاعفا للجداء bc

البرهان :

a مضاعفا للعددين b و c يوجد عددين طبيعيين k و k' حيث $a=kb.....(1)$ و $a=k'c$.
اذن $kb=k'c$.
العدد c يقسم $k'c$ اذن c يقسم kb وبما أن c أولي مع b وحسب مبرهنة غوص فان c يقسم k .
اذن يوجد عدد طبيعي k'' حيث $k=k''c$ وبالتعويض في **(1)** نجد $a=k''cb$ وبالتالي a مضاعف للعدد $kb.$.

تمرين :

1) عين في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-24y=0$.
2) تأكد أن الثنائية $(7;2)$ حل للمعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-24y=1$.
3) استنتج في $\mathbb{Z}^2$ مجموعة حلول المعادلة ذات المجهول $(x;y)$: $7x-24y=1$.

الحل التمرين :

1) $7x-24y=0$ ومنه $7x=24y$.

24 يقسم $24y$ و بالتالي 24 يقسم $7x$ بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة غوص 24 يقسم x نضع $x=24k$ حيث k عدد صحيح .

بالتعويض في المساواة $7x=24y$ نحصل على $7(24k)=24y$ و منه $y=7k$.

الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k;7k)$ حيث k عدد صحيح .

2) $7\times7-24\times2=1$ و منه $(7;2)$ حل للمعادلة $7x-24y=1$.

3) بطرح 1 من طرفي المعادلة $7x-24y=1$ نحصل على $7x-24y-1=0$.

و نعلم أن $7\times7-24\times2=1$ إذن $7x-24y-7\times7+24\times2=0$. و منه $7(x-7)=24(y-2)$.

24 يقسم $24(y-2)$ و بالتالي 24 يقسم $7(x-7)$ بما أن 24 أولي مع 7 فإن حسب مبرهنة غوص 24 يقسم $(x-7)$ نضع $(x-7)=24k$ حيث k عدد صحيح أي $x=24k+7$

بالتعويض في المساواة $7(x-7)=24(y-2)$ نحصل على $7(24k)=24(y-2)$

ومنه $y=7k+2$. الحلول هي الثنائيات من الشكل $(24k+7;7k+2)$ حيث k عدد صحيح .

ملاحظة :

يمكن الحصول على الثنائية $(7;2)$ باستعمال الطريقة التالية (الطريقة ليست وحيدة)

لدينا : $7x-24y=1$ وبالتالي نجد : $24y+1=7x$.

اذن نبحث عن العدد الصحيح y حيث $24y+1$ مضاعف للعدد 7 .

نأخذ $y=0$ و $y=1$: نجد أن $24y+1$ ليس مضاعف للعدد 7 .

نأخذ $y=2$ نجد : $24y+1=24\times2+1=49=7\times7$ وبالتالي $x=7$.

اذن $(7;2)$ حل للمعادلة $7x-24y=1$.