

العُبْقَرِي في الرياضيات

السؤال الأول: الله غار بنه

الثالثة ثانوي

الشعب: ● تسيير وإقتصاد.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدوال الأسية واللوغاريتمية)

الملخص // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ملخص: حول الدوال الأسية واللوغاريتمية // التحضير الجيد يكالوريا // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

1 الدالة الأسية

1 مبرهنة وتعريف

توجد دالة وحيدة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث:

$$f'(x) = f(x) \quad (1) \quad f(0) = 1 \quad (2)$$

نرمز إليها بالرمز "exp"، ونسميها الدالة الأسية النيبيرية.

نتائج من التعريف:

$$\exp(0) = 1$$

من أجل كل عدد حقيقي x ، $\exp'(x) = \exp(x)$

2 خواص جبرية

x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح.

$$\exp(x) > 0 \quad (1)$$

$$\exp(x) \times \exp(-x) = 1 \quad (2)$$

$$\exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)} \quad (3)$$

$$\exp(x + y) = \exp(x) \times \exp(y) \quad (4)$$

$$\exp(x - y) = \frac{\exp(x)}{\exp(y)} \quad (5)$$

$$\exp(nx) = [\exp(x)]^n \quad (6)$$

العدد e والترميز e^x :

العدد e هو صورة 1 بالدالة الأسية أي:

$$\exp(1) = e \simeq 2,72$$

حسب الخاصية (5) ومن أجل $x = 1$ نجد:

$$\exp(n) = [\exp(1)]^n = e^n \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\exp(x) = e^x \quad \text{اصطلاحاً:}$$

(من أجل كل $x \in \mathbb{R}$)

قواعد الحساب: (خواص الدالة "exp")

x و y عددان حقيقيان و n عدد صحيح.

$$e^0 = 1 \quad (1)$$

$$(e^x)' = e^x > 0 \quad (2)$$

$$e^x \times e^{-x} = 1 \quad (3) \quad \left(e^{-x} = \frac{1}{e^x} > 0 \right)$$

$$e^{x-y} = \frac{e^x}{e^y} \quad (5)$$

$$e^{x+y} = e^x \times e^y \quad (4)$$

$$e^{nx} = (e^x)^n \quad (6) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

3 دراسة الدالة "exp"

لدينا: $\exp(x) = e^x$ و $D_{\exp} =]-\infty; +\infty[$

النهايات

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad (1)$$

إنجاه النفي

من أجل كل عدد حقيقي x ، $(e^x)' = e^x > 0$

إن: الدالة "exp" متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$.

جدول التغيرات

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$(e^x)'$			+	
e^x	0^+	1	e	$+\infty$

نعلم أن $e^x > 0$ من جدول التغيرات:

■ $x < 0$ يعني: $0 < e^x < 1$

■ $x = 0$ يعني: $e^x = 1$

■ $0 < x < 1$ يعني: $1 < e^x < e$

■ $x > 1$ يعني: $e^x > e$

يمكن أن يكون x عبارة جبرية.

بما أن الدالة " exp " متزايدة تماماً على $\mathbb{R}$ ، فإن:

■ $a > b$ يعني: $e^a > e^b$

■ $a < b$ يعني: $e^a < e^b$

■ $a = b$ يعني: $e^a = e^b$

a و b عدنان حقيقيان أو عبارتان جبريتان.

ملاحظة مهمة: نستخدم لحل معادلات ومراجحات ولدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن e .

نتائج:

■ بما أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ فإن (C_{exp}) يقبل محور الفواصل كمقارب عند $-\infty$.

■ لدينا: $\exp(0) = e^0 = 1$ و $\exp'(0) = 1$

إذن: (C_{exp}) يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 0 مماساً، $(\Delta): y = \exp'(0)(x - 0) + \exp(0)$

أي: $(\Delta): y = x + 1$.

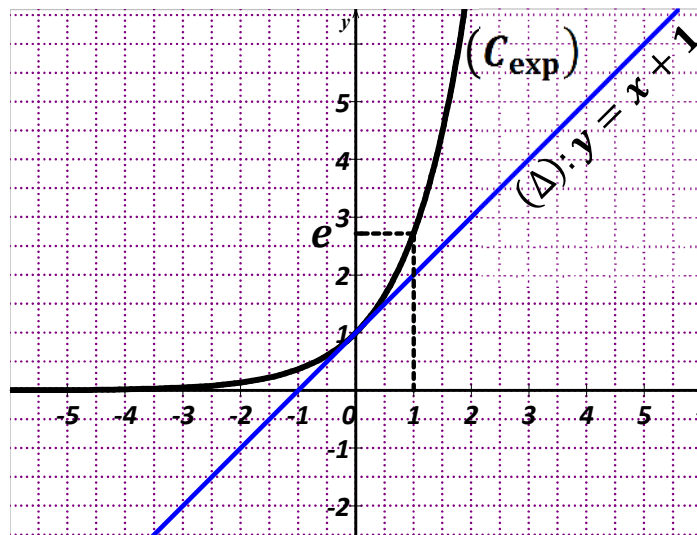
■ باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة " exp " عند 0:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\exp(x) - \exp(0)}{x - 0} = \exp'(0)$ إذن: ③ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

■ الدالة $x \mapsto x + 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto e^x$ بجوار 0

أي: $e^x \simeq x + 1$ من أجل x قريب من 0.

النمثيل البياني



4 دراسة الدالة "exp o u"

لدينا: $(\exp \circ u)(x) = e^{u(x)}$

المشقة

$$(e^{u(x)})' = u'(x)e^{u(x)}$$

إشارة $(e^{u(x)})'$

من إشارة $u'(x)$

لأن: $e^{u(x)} > 0$

إنجاء النفي

للدالتين "u" و "exp o u"

نفس اتجاه التغير على I، حيث:

u معرفة على I.

لأن الدالة "exp" متزايدة تماماً.

النهايات

لدراسة نهاية دالة "exp o u"

نستعمل المبرهنة الخاصة

بنهاية دالة مركبة.

5 التزايد المقارن

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^- \quad \text{⑤} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad \text{④}$$

($n \in \mathbb{N}^*$)

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto e^x$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad \text{⑤} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad \text{④}$$

نستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

6 معادلات من الشكل "ae^{2x} + be^x + c = 0" حيث (a ≠ 0)

نضع: $X = e^x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ نتنتج قيم x في حالة وجودها (لأن $e^x > 0$).

■ نأخذ قيم $X > 0$ لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

7 المعادلات التفاضلية من الشكل "y' = ay + b" بحيث (a ≠ 0)

■ المعادلة التفاضلية $y' = ay$ ، الحلول هي الدوال $x \mapsto ce^{ax}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

■ المعادلة التفاضلية $y' = ay + b$ ، الحلول هي الدوال $x \mapsto ce^{ax} - \frac{b}{a}$ حيث $c \in \mathbb{R}$.

■ إذا أعطي شرط مثلاً $f(x_0) = y_0$ ، نعوّض في الحلول، نقوم بإيجاد c، ويصبح الحل وحيد للمعادلة التفاضلية.

8 إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

■ إشارة $e^x - 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e^x - 1$	-	○	+

لدراسة إشارة العبارة $(abc \neq 0) ae^{2x} + be^x + c$

نحلّه باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')(e^x - X'') \quad \Delta > 0 \quad \Rightarrow$$

$$ae^{2x} + be^x + c = a(e^x - X')^2 \quad \Delta = 0 \quad \Rightarrow$$

$$ae^{2x} + be^x + c \quad \Delta < 0 \quad \Rightarrow$$

يمكن تلخص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة

لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $ae^{ax+\beta} + b$ ☞ إذا كان: a و b موجبين فإن: $ae^{ax+\beta} + b > 0$ ☞ إذا كان: a و b سالبين فإن: $ae^{ax+\beta} + b < 0$ ☞ إذا كان: a و b مختلفين في الإشارة، فإن: $ae^{ax+\beta} + b$ متغيرة الإشارة ولمعرفة إشارته▪ نحل المعادلة والمتراجحات $ae^{ax+\beta} + b > 0$ $ae^{ax+\beta} + b < 0$ $ae^{ax+\beta} + b = 0$

2 الدالة اللوغاريتمية

1 اللوغاريتم النيبيري لعدد

مبرهنة وتعريف:

يوجد عدد حقيقي وحيد b بحيث $e^b = a > 0$ ،
يسمى هذا العدد اللوغاريتم النيبيري للعدد a ،
ونرمز إليه بالرمز " $\ln a$ " أي $b = \ln a$.

1 تعريف الدالة " $\ln$ "

نسمي "الدالة اللوغاريتمية النيبيرية"
الدالة التي نرمز إليها بالرمز " $\ln$ "،
والتي تُرفق بكل عدد حقيقي x من
] $0; +\infty$ [العدد الحقيقي $\ln x$.

نتائج من التعريف:

- من أجل $x \in \mathbb{R}$ و $y \in]0; +\infty[$ ، $e^x = y$ يعني: $x = \ln y$
 - من أجل $x \in]0; +\infty[$ ، $e^{\ln x} = x$
 - من أجل $x \in \mathbb{R}$ ، $\ln(e^x) = x$
 - بمأن: $e^0 = 1$ فإن: $\ln 1 = 0$ ، وبمأن: $e^1 = e$ فإن: $\ln e = 1$
- حسب النتيجة (1) الدالة اللوغاريتمية النيبيرية " $\ln$ " هي الدالة العكسية للدالة الأسية النيبيرية " $\exp$ ".
في معلم متعامد ومتجانس، $(C_{\exp})$ و $(C_{\ln})$ متناظران بالنسبة إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x$ (المنصف الأول).

2 خواص جبرية

الخاصية الأساسية: x و y عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$ ،

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad ①$$

نتائج: x و y عدنان حقيقيان من $]0; +\infty[$ و n عدد صحيح

$$\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x \quad ②$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y \quad ③$$

$$(n \in \mathbb{Z}) \quad \ln(x^n) = n \ln x \quad ④$$

$$\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \quad ⑤$$

- يكون للعدد $\ln x$ معنى إذا فقط إذا كان: $x > 0$ (ما بعد $\ln$ موجب تماماً)
- يكون للعدد $\ln[u(x)]$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) > 0$ (ما بعد $\ln$ موجب تماماً)
- يكون للعدد $\ln|u(x)|$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) \neq 0$
- يكون للعدد $\ln[u(x)]^n$ معنى إذا فقط إذا كان: $u(x) \neq 0$ ، في حالة $n = 2k$ زوجي.
- $u(x) > 0$ ، في حالة $n = 2k + 1$ فردي.

③ دراسة الدّالة "ln"

لدينا: $D_{\ln} =]0; +\infty[$ و $\ln: x \mapsto \ln(x)$

🌸 اتجاه النّغير 🌸

من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$
 إذن: الدّالة "ln" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

🌸 النهايات 🌸

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{②} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{①}$$

🌸 جدول النّغيرات 🌸

x	0	1	e	$+\infty$
$(\ln x)'$		+		
$\ln x$	$-\infty$	0	1	$+\infty$

نعلم أنّ $\ln x$ متغيرة الإشارة (لأنّ $\ln x \in \mathbb{R}$)
 ومن جدول التّغيرات:

- $\ln x < 0$ يعني: $0 < x < 1$
- $\ln x = 0$ يعني: $x = 1$
- $0 < \ln x < 1$ يعني: $1 < x < e$
- $\ln x = 1$ يعني: $x = e$
- $\ln x > 1$ يعني: $x > e$

■ إشارة $\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	-	○	+

يُمكن أن يكون x عبارة جبرية (استعمل كلمة ما بعد $\ln$)
 بمأنّ الدّالة "ln" متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ ، فإنّ

- $\ln a > \ln b$ يعني: $a > b$
- $\ln a < \ln b$ يعني: $a < b$
- $\ln a = \ln b$ يعني: $a = b$

a و b عدنان حقيقيان موجبان تماماً أو عبارتان جبريتان موجبتان تماماً.

ملاحظة مهمة: تُستعمل لحل معادلات و متراجحات أو لدراسة إشارة عبارة جبرية تتضمن $\ln$.

نتائج:

■ بمأن $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ فإن $(C_{\ln})$ يقبل محور الترتيب كمقارب له.

■ لدينا: $\ln(1) = 0$ و $(\ln 1)' = \frac{1}{1} = 1$

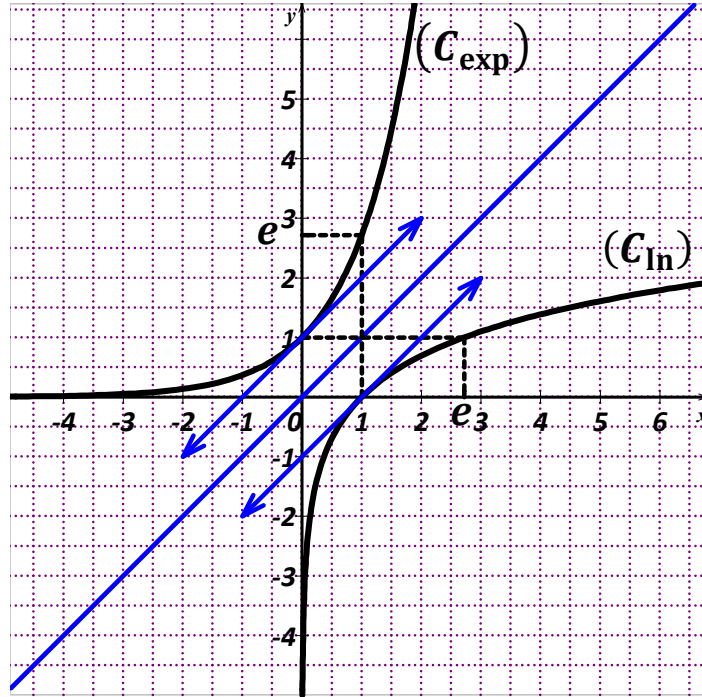
■ إذن: $(C_{\ln})$ يقبل عند النقطة ذات الفاصلة 1 مماساً، $(\Delta'): y = (\ln 1)'(x - 1) + \ln 1$ أي: $(\Delta'): y = x - 1$.

■ باستعمال تعريف العدد المشتق للدالة "ln" عند 1

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad \text{③} \quad \text{إذن: } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h) - \ln(1)}{h} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x) - \ln(1)}{x-1} = (\ln 1)'$$

■ الدالة $x \mapsto x - 1$ هي أحسن تقريب تألفي للدالة $x \mapsto \ln x$ بجوار 1 أي: $\ln x \simeq x - 1$ من أجل x قريب من 1.

النموذج البياني



④ دراسة الدالة "ln o u"

لدينا: $(\ln \circ u)(x) = \ln[u(x)]$

النهايات

لدراسة نهاية دالة "ln o u"
نستعمل المبرهنة الخاصة
بنهاية دالة مركبة.

إنجاء النفي

للدالتين "u" و "ln o u"
نفس اتجاه التغير على I، حيث:
u معرفة وموجبة تماماً على I.
لأن الدالة "ln" متزايدة تماماً.

المشتقة

$$(\ln[u(x)])' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

ملاحظة:

$$(\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

5 التزايد المقارن

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x^n$ و $x \mapsto \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^- \quad ⑤ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

التزايد المقارن للدالتين $x \mapsto x$ و $x \mapsto \ln x$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \quad ⑤ \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad ④$$

نستعمل هذه النهايات لرفع حالات عدم التعيين.

6 معادلات من الشكل $a[\ln x]^2 + b \ln x + c = 0$ حيث $a \neq 0$

نضع: $X = \ln x$

نقوم بعد ذلك بحل المعادلة $aX^2 + bX + c = 0$ ننتج قيم x في حالة وجودها (لأن $x > 0$).
■ نأخذ قيم X لإيجاد x وذلك بالعودة إلى الوضع.

7 إشارة بعض العبارات زردت في البكالوريا

لدراسة إشارة العبارة $a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c$ ($abc \neq 0$)

نحلله باستعمال المميز $\Delta = b^2 - 4ac$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c = a(\ln x - X')(\ln x - X''), \Delta > 0$$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c = a(\ln x - X')^2, \Delta = 0$$

$$a[\ln(x)]^2 + b \ln(x) + c, \Delta < 0$$

يمكن تلخيص إشارته في جدول باستعمال القواعد المعروفة لإشارة كثير حدود من الدرجة الثانية.

إشارة $a \ln(ax + \beta) + b$

■ نحل المعادلة والمتراجحات $a \ln(ax + \beta) + b > 0$

$$a \ln(ax + \beta) + b < 0$$

$$a \ln(ax + \beta) + b = 0$$

ملاحظة مهمة جداً: لحل معادلات (أو متراجحات) تتضمن $\ln$ نعين أولاً مجموعة التعريف D .

2 اللوغاريتمية

الجدالة

2 النهايات

1 الأسية

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1 \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0^+ \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0^+ \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+ \quad ②$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \quad ①$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \quad ③$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \quad ④$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0^- \quad ⑤$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty \quad ④$$

$(n \in \mathbb{N}^*)$

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدّوال اللوغاريتمية - بكالوريا جزائرية)

التمارين // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

ليكن $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$ كثير الحدود حيث:

1. (أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$.

(ب) استنتج في المجال $0; +\infty[$ حلول المتراجحة التالية: $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$.

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$.

التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$.

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1. (أ) حل في المجال $0; +\infty[$ المعادلة: $f(x) = 0$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

(ب) حلّ $f(x)$ إلى جداء عاملين.

(ج) حل في المجال $0; +\infty[$ المتراجحة: $2\ln x + 2 \geq 0$.

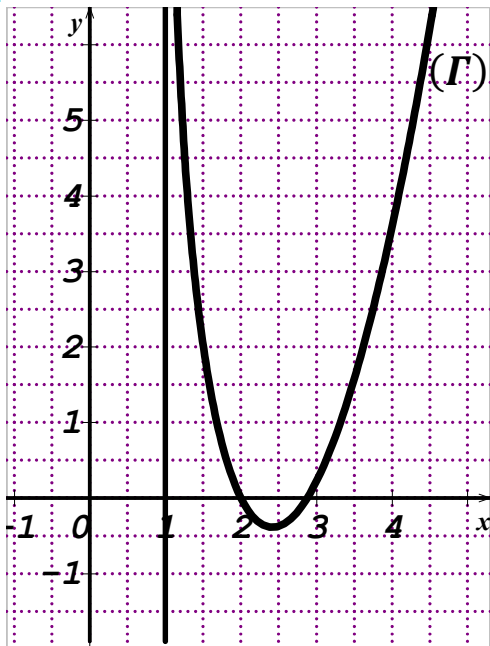
2. أحسب $f'(x)$ واستنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

3. بيّن أنّ المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثيها.

التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $1; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x-1)$

($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري). (Γ) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس كما هو في الشكل التالي:



1. بقراءة بيانية، عيّن عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$.

2. احسب $g(2)$.

3. بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

4. استنتج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $1; +\infty[$.

II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $1; +\infty[$ بـ:

$$f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أ- أوجد نهاية الدالة f عند $+\infty$. (لاحظ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسيا.

ج- بيّن أنّ المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب

مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

د- أوجد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f) .

هـ- ادرس الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ) .

- (2) أبين أنه من أجل كل عدد x من المجال $1; +\infty[$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، $f'(x)$ هي الدالة المشتقة للدالة f .
- ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f وشكل جدول تغيراتها.
- (3) ارسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) . (نأخذ $f(\alpha) \simeq 3,9$)
- (4) أ- عيّن مشتقة الدالة: $[\ln(x-1)]^2$ ، $x \mapsto$ ، ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $1; +\infty[$.
- ب- احسب: $\int_2^5 f(x) dx$ ، فسّر النتيجة هندسياً.

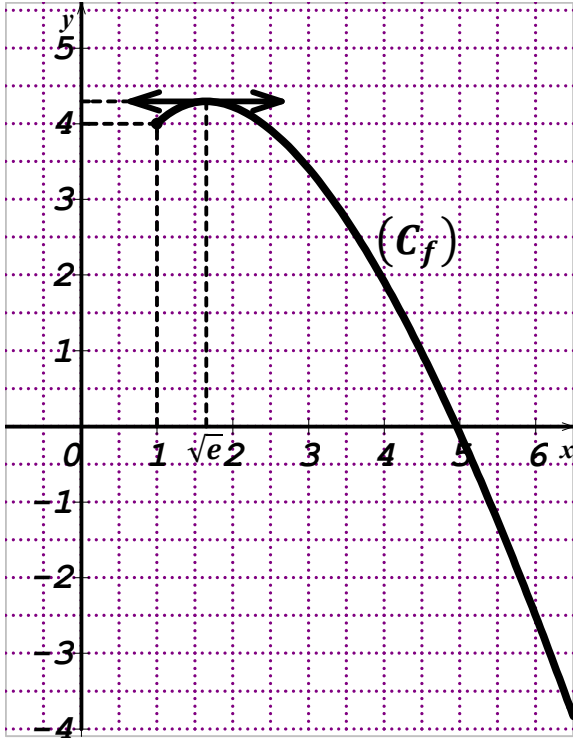
التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية توجد ثلاثة اقتراحات من بينها واحد فقط صحيح، حدّد الاقتراح الصحيح في كل حالة مع التبرير.

- (1) مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$ هي:
- أ. $[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$ ؛ ب. $[-\frac{1}{3}; +\infty[$ ؛ ج. $\mathbb{R}$.
- (2) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $0; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{x}$. الدالة الأصلية F للدالة f على المجال $0; +\infty[$ والتي تنعدم من أجل $x = e$ معرفة كما يلي:
- أ. $F(x) = e^{-2} - \frac{1}{x^2}$ ؛ ب. $F(x) = -1 + \ln x$ ؛ ج. $F(x) = \ln x$.
- (3) القيمة المتوسطة للدالة $g: x \mapsto \frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2; 2]$ تساوي:
- أ. $\frac{4}{3}$ ؛ ب. 3؛ ج. $\frac{1}{3}$.

التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

التمثيل البياني (C_f) المقابل هو للدالة f المعرفة على المجال $1; +\infty[$ بالعلاقة:



$f(x) = ax + b + cx \ln x$ ؛ حيث a, b و c أعداد حقيقية.

- (1) خمن بقراءة بيانية اتجاه تغير f ونهاية f عند $+\infty$.
- (2) أ- أحسب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f على $1; +\infty[$.
- ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أن $f(5) = 16 - 10 \ln 5$.
- ج- بين أن: $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$.
- د- تحقق من صحة تخمينك في السؤال 1، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f .

(3) بين أن المعادلة: $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $1; +\infty[$ ، ثم تحقق أن $4,95 < \alpha < 4,96$.

(4) نعرف العدد الحقيقي S كما يلي: $S = \int_1^\alpha f(x) dx$.

(حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$).

أبين أن الدالة: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على $1; +\infty[$.

ب- أعط تفسيراً هندسياً للعدد S ، ثم احسبه بدلالة α .

جـيـن أن: $S = \frac{1}{2}\alpha(\alpha + 1) - 3$ ، ثم استنتج حصرا للعدد S .

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2}$.

(1) عيّن، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$.

(2) أتحقق أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$.

ب- استنتج الدّوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$.

(II) الدالة العددية f معرفة على المجال $]0; 8]$ كما يلي: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أتحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8]$ والتي تنعدم عند 1.

ب- استنتج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; 8]$.

ج- احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم فسّر النتيجة هندسياً.

د- شكّل جدول تغيرات الدالة f .

(2) بيّن أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث: $3,8 < \alpha < 3,9$.

(3) مثّل بيانياً (C_f).

(III) الدالة العددية h معرفة على $]-\frac{2}{3}; 2]$ كما يلي: $h(x) = f(3x + 2)$.

(1) بيّن أنه إذا كان $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن $0 < 3x + 2 \leq 2$.

وإذا كان $0 \leq x \leq 2$ فإن $2 \leq 3x + 2 \leq 8$.

(2) احسب $h'(x)$. (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

(3) شكّل جدول تغيرات h .

التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن: $(2x + 1)(x^2 - 5x + 6) = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$

ب) حل في $\mathbb{R}$ كلا من المعادلتين: $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7 \ln x + 6 = 0$

$$6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$$

ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراجحة: $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$.

التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) الدالة العددية g معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$.

(1) ادرس اتجاه تغير الدالة g .

(2) احسب $g(1)$ ثم استنتج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$.

(II) الدالة العددية f معرفة على $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (يُعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)
 (ب) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم فسّر النتيجة هندسياً.

(2) (أ) بيّن أنّه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ فإنّ: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f .
 (ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

(3) (أ) بيّن أنّ المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .
 (ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) .

(4) عيّن فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) مُوازيًا للمستقيم (D) ثم اكتب معادلة للمماس (T) .

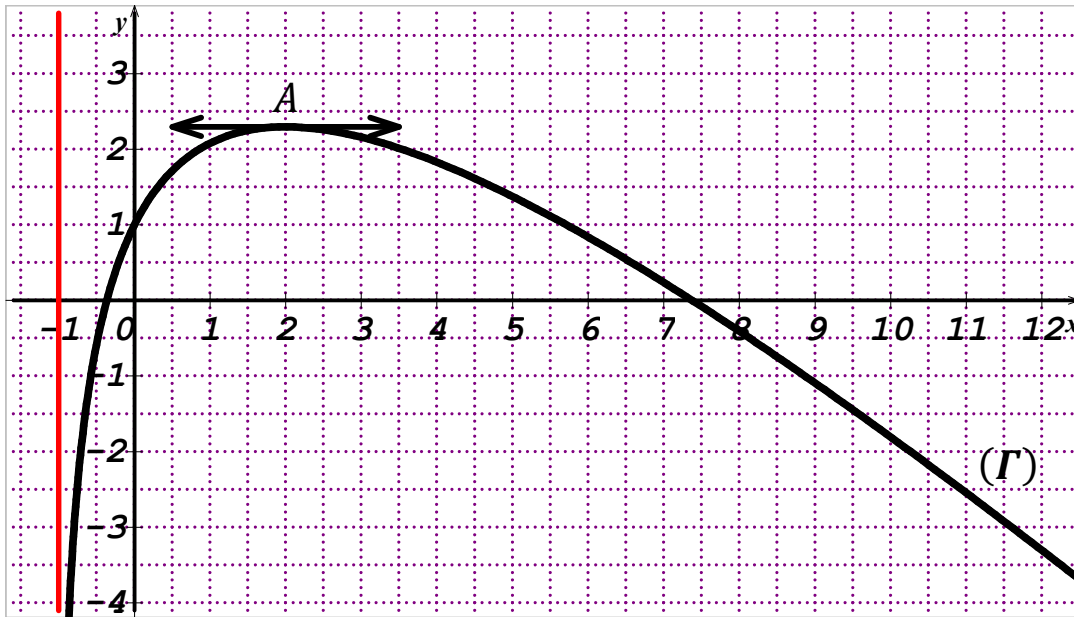
(5) ارسم (D) ، (T) و (C_f) .

(6) احسب القيمة المتوسطة للدّالة f على المجال $[1; 3]$.

التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

المستوي منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

f دالة معرفة على المجال $] -1; +\infty[$ بـ: $f(x) = ax + b + 3 \ln(x + 1)$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.
 (I) التمثيل البياني للدّالة f ، المُعطى في الشكل المقابل، يقبل في النقطة $A(2; -1 + 3 \ln 3)$ مماساً مُوازيّاً لحامل محور الفواصل.



(1) بقراءة بيانية:

(أ) ضع تخميناً حول $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$.

(ب) شكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة، جد قيمة كل من a و b .

(II) نعتبر في هذا الجزء: $f(x) = -x + 1 + 3 \ln(x + 1)$.

(1) احسب نهاية الدّالة f عند (-1) بقيم أكبر.

(2) احسب نهاية الدّالة f عند $+\infty$. (يُعطى $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

(3) أ) عيّن النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم اكتب معادلة للمماس (T) .

ب) استنتج بياناً، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً.

(4) g الدالة المعرفة على المجال $]-1; +\infty[$ بـ: $g(x) = (x + 1) \ln(x + 1) - x$.

أ) احسب $g'(x)$ ؛ ثم استنتج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$.

ب) لتكن α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل،

بيّن أنّ: $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$.

ج) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدّد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين

معادلتيهما: $x = \alpha$ ، $x = 0$.

د) تحقّق أنّ: $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1\right) ua$ ؛ ثمّ عيّن حصرّاً لـ S . (ua وحدة مساحة)

(III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

ننمذج الكلفة الهاشمية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0; 7]$ بالدالة f المعرفة في

الجزء (II)، أي من أجل $x \in [0; 7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.

نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

(1) عيّن عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أنّ الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$.

(2) قدّر قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة.

التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

g دالة عددية معرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $g(x) = ax + b + \ln x$ حيث a و b عدنان حقيقيان.

(1) عيّن a و b بحيث: $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$.

(2) نضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$.

أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

ب- ادرس اتجاه تغيّر الدالة g ثم شكّل جدول تغيّراتها.

ج- بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقياً وحيداً α حيث: $0,2 < \alpha < 0,3$.

د- حدّد تبعاً لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ كما يلي: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) بيّن أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتج اتجاه تغيّر الدالة f .

(2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$. (يُعطى: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

(3) تحقّق أنّ: $f(\alpha) = -\alpha$ ثم شكّل جدول تغيّرات الدالة f .

(4) احسب $f(1)$ و $f(5)$ ثم ارسم (C_f) على المجال $]0; 5[$.

التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$.

(1) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$. (تُعطى: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

(2) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,4 < \alpha < 1,5$.

(4) حدّد إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = (2x - 4) \ln x$.

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$. فسّر النتيجة هندسياً.

ب- احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) أبين أنّه من أجل كلّ عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$.

ب- استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(3) عيّن نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل.

(4) أ- اكتب معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

ب- أنشئ (T) و (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \simeq -0,41$)

(5) نعتبر الدّالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$.

أبين أنّ F دالة أصلية للدّالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب- احسب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = 1$ و $x = 2$.

التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017 د 01 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) نعتبر الدّالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = x^2 + 3 \ln x - 3$.

(1) ادرس اتجاه تغيّر الدّالة g .

(2) بيّن أنّ: المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث: $1,40 < \alpha < 1,41$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

(II) نعتبر الدّالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x + 1 - \frac{3 \ln x}{x}$.

ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ) احسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ، فسّر النتيجة بيانياً.

ب) احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

(2) بيّن أنّ: من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماماً، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

(3) استنتج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم شكّل جدول تغيّراتها.

(4) أ) بيّن أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f).

ب) ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ).

(5) أنشئ المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f). (تُعطى: $f(\alpha) \simeq 1,68$)

(6) أ) بيّن أنّ الدّالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدّالة $\ln x \mapsto x$ على المجال $]0; +\infty[$.

ب) احسب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمت التي معادلاتها: $x = e$ ، $x = 1$ و $y = x + 1$.

التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لتكن f الدّالة العددية المعرّفة على المجال $]-2; 8[$ بـ: $f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$.
وليكن (C_f) منحنى الدّالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
نأخذ الوحدة البيانية: $2cm$.

(1) احسب نهايتي الدّالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$ وفسّر النتيجةين بيانياً.

(2) تحقّق أنّه من أجل كلّ x من $]-2; 8[$: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$. $f'(x)$ مشتقة الدّالة f

(3) ادرس إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ وشكّل جدول تغيّرات الدّالة f .

(4) عيّن نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

(5) بيّن أنّه من أجل كلّ x من المجال $]-2; 8[$: $f(6-x) = f(x)$ وفسّر النتيجة بيانياً.

(6) ارسم المنحنى (C_f) .

(7) لتكن الدّالة العددية F المعرّفة على المجال $]-2; 8[$ بـ:

$$F(x) = (x+2) \ln(x+2) + (x-8) \ln(-x+8) - 2x - x \ln 16$$

بيّن أنّ F دّالة أصلية لـ f على المجال $]-2; 8[$.

(8) احسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $y = 0$ ، $x = 0$ و $x = 4$.

مجلة العبقرى في الرياضيات (الدوال اللوغاريتمية - بكالوريا جزائرية)

الحلول // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

حل التمرين 01: (03 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $P(x)$ كثير الحدود حيث: $P(x) = 2x^2 - 5x + 2$.

1.1) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $P(x) = 0$:

$P(x) = 0$ تُكافئ $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ، نحسب مميزها Δ : $\Delta = (-5)^2 - 4(2)(2) = 9 > 0$

إذن: للمعادلة حلين متمايزين هما، $x' = \frac{-(-5) + \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5+3}{4} = 2$ و $x'' = \frac{-(-5) - \sqrt{9}}{2(2)} = \frac{5-3}{4} = \frac{1}{2}$

ب) استنتج في المجال $]0; +\infty[$ حلول المتراجحة التالية، $2(\ln x)^2 - 5\ln x + 2 > 0$:

نضع: $X = \ln x$ نجد: $2X^2 - 5X + 2 > 0$ ، ندرس إشارة $2X^2 - 5X + 2$ (الجزرين هما $\frac{1}{2}$ و 2)

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	$+\infty$
$2X^2 - 5X + 2$		+	-	+

وبالتالي: $X \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$ أي: $\ln x \in]-\infty; \frac{1}{2}[\cup]2; +\infty[$ إذن: $x \in]0; e^{\frac{1}{2}}[\cup]e^2; +\infty[$

2. حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$:

$2^{2x+1} = 5 \times 2^x - 2$ تُكافئ: $2^1 \times 2^{2x} - 5 \times 2^x + 2 = 0$

أي: $2 \times (2^x)^2 - 5 \times 2^x + 2 = 0$

نضع: $Y = 2^x$ نجد: $2Y^2 - 5Y + 2 = 0$

وعليه: $Y = \frac{1}{2}$ أو $Y = 2$

أي: $2^x = \frac{1}{2}$ أو $2^x = 2$

وبالتالي: $2^x = 2^1$ أو $2^x = 2^{-1}$

إذن: $x = 1$ أو $x = -1$

حل التمرين 02: (04 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3$ و $D_f =]0; +\infty[$

و (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس. ($\ln$ هو رمز اللوغاريتم النيبيري)

1.1) حل في المجال $]0; +\infty[$ المعادلة، $f(x) = 0$:

لدينا: $f(x) = 0$ يعني: $(\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = 0$

وبوضع: $\ln x = Y$ نجد: $Y^2 + 2Y - 3 = 0$... (1) مميزها: $\Delta = 2^2 - 4(1)(-3) = 16 > 0$

المعادلة (1) تقبل حلين متمايزين هما، $Y' = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2(1)} = 1$ و $Y'' = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2(1)} = -3$

من أجل $Y' = 1$ يكون $\ln x = 1$ ومنه: $x = e$

من أجل $Y'' = -3$ يكون $\ln x = -3$ ومنه: $x = e^{-3}$

إذن: $S = \{e^{-3}; e\}$

تفسير النتيجة هندسيا: (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين فاصلتيهما، e و e^{-3} .

(ب) تحليل $f(x)$ إلى جداء عاملين:

كثير الحدود $Y^2 + 2Y - 3$ يقبل جذرين متمايزين هما، $Y' = 1$ و $Y'' = -3$.

فيكتب من الشكل: $Y^2 + 2Y - 3 = 1(Y - Y')(Y - Y'') = (Y - 1)(Y + 3)$

ومن أجل $\ln x = Y$ نجد: $f(x) = (\ln x)^2 + 2\ln x - 3 = (\ln x - 1)(\ln x + 3)$

(ج) حل في المجال $]0; +\infty[$ المتراجحة، $2\ln x + 2 \geq 0$:

$2\ln x + 2 \geq 0$ تكافئ $\ln x \geq -1$ ومنه: $x \geq e^{-1}$ أي: $x \geq \frac{1}{e}$ إذن: $S = \left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$

(2) حساب $f'(x)$ واستنتاج اتجاه تغير الدالة f :

f قابلة للإشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = 2\left(\frac{1}{x}\right)(\ln x) + 2 \times \frac{1}{x} = \frac{2\ln x + 2}{x}$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(2\ln x + 2)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	$\frac{1}{e}$	$+\infty$
$2\ln x + 2$		-	+
$f'(x)$		-	+

إذن: f متناقصة تماما على المجال $\left]0; \frac{1}{e}\right]$ ، ومتزايدة تماما على المجال $\left[\frac{1}{e}; +\infty\right[$.

(3) تبين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة انعطاف يُطلب تعيين إحداثيها:

لدينا: $f''(x) = \frac{2\left(\frac{1}{x}\right) \times x - 1 \times (2\ln x + 2)}{x^2} = \frac{2 - (2\ln x + 2)}{x^2} = \frac{-2\ln x}{x^2} = \frac{2(-\ln x)}{x^2}$

ومنه: إشارة $f''(x)$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f''(x)$		+	-

نلاحظ أن: $f''(x)$ تنعدم عند 1 مغيرة إشارتها، إذن: (C_f) يقبل نقطة انعطاف هي: $I(1; f(1))$ أي: $I(1; -3)$.

حل التمرين 03: (09 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = x^2 - 2x - 4\ln(x - 1)$ و $D_g =]1; +\infty[$

(Γ) التمثيل البياني لـ g في معلم متعامد ومتجانس.

(1) تعيين بيانيا عدد حلول المعادلة $g(x) = 0$:

بما أن (Γ) يقطع حامل محور الفواصل في نقطتين مختلفتين؛ فإن للمعادلة $g(x) = 0$ حلين متمايزين.

(2) حساب $g(2)$:

بالتعويض نجد: $g(2) = (2)^2 - 2(2) - 4\ln(2 - 1) = 0$

(3) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$:

▪ g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]2,87; 2,88[$

(لأن من البيان نلاحظ أنها متزايدة تماما على المجال $]2,5; +\infty[$)

▪ ولدينا: $\begin{cases} g(2,87) \simeq -0,0069 \\ g(2,88) \simeq 0,0093 \end{cases}$ أي: $g(2,87) \times g(2,88) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً α حيث $2,87 < \alpha < 2,88$.

(4) استنتاج حسب قيم x ، إشارة $g(x)$ في المجال $]1; +\infty[$:

من البيان وحسب الأسئلة السابقة ينتج:

x	1	2	α	$+\infty$
$g(x)$		+	-	+

(II) لدينا: $f(x) = x - 3 + 4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$ و $D_f =]1; +\infty[$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) أ- إيجاد نهاية الدالة f عند $+\infty$: (علماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

بوضع: $X = x - 1$ (لما $x \rightarrow +\infty$ ، فإن $X \rightarrow +\infty$)

نجد: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(X - 2 + 4 \frac{\ln X}{X} + \frac{5}{X} \right) = +\infty$

(لأن $\lim_{X \rightarrow +\infty} (X - 2) = +\infty$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$ و $\lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{5}{X} = 0$)

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسياً:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \left(x - 3 + \frac{4 \ln(x-1) + 5}{x-1} \right) = -\infty$

(لأن $\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1) = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow 1} \ln(x - 1) = -\infty$)

تفسير النتيجة هندسياً:

بمأن: $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ ، فإن: المستقيم ذو المعادلة $x = -1$ (الموازي لمحور الترتيب) مقارب للمنحنى

(C_f).

ج- تبين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$:

(نُبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} \right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(4 \frac{\ln X}{X} + \frac{5}{X} \right) = 0$

إذن: المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x - 3$ هو مستقيم مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$.

د- إيجاد فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f):

نحل المعادلة $f(x) = x - 3$ في المجال $]1; +\infty[$.

لدينا: $f(x) = x - 3$ معناه: $4 \frac{\ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1} = 0$

ومنه: $\frac{4 \ln(x-1) + 5}{x-1} = 0$

وعليه: $4 \ln(x-1) + 5 = 0$ و $x - 1 > 0$

وبالتالي: $x = e^{-\frac{5}{4}} + 1$ ؛ (وهي فاصلة نقطة تقاطع (Δ) مع (C_f)).

هـ دراسة الوضعية النسبية للمنحنى (C_f) بالنسبة إلى المستقيم (Δ): (ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x - 3)$)

لدينا: $f(x) - (x - 3) = \frac{4 \ln(x-1) + 5}{x-1}$ ، ومنه:

إشارة الفرق $f(x) - (x - 3)$ من إشارة البسط $(4 \ln(x-1) + 5)$ (لأن: $x - 1 > 0$ على المجال $]1; +\infty[$)

نضع: $0 < 4 \ln(x-1) + 5$ نجد: $x > e^{-\frac{5}{4}} + 1$ إذن:

x	1	$e^{-\frac{5}{4}} + 1$	$+\infty$
$4 \ln(x-1) + 5$	-	○	+
$f(x) - (x-3)$	-	○	+
الوضع النسبي		يقع (C_f) تحت (Δ)	يقع (C_f) فوق (Δ)

(2) أثبت أن من أجل كل عدد x من المجال $1; +\infty$ لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

f قابلة للاشتقاق على $1; +\infty$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 + 4 \left(\frac{\frac{1}{x-1} \times (x-1) - 1 \times \ln(x-1)}{(x-1)^2} \right) - \frac{5(1)}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + 4 - 4 \ln(x-1) - 5}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)}{(x-1)^2}$$

ومن: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ (وهو المطلوب).

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f وتشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$ ، ومنه: لـ $f'(x)$ و $g(x)$ نفس إشارة وعليه:

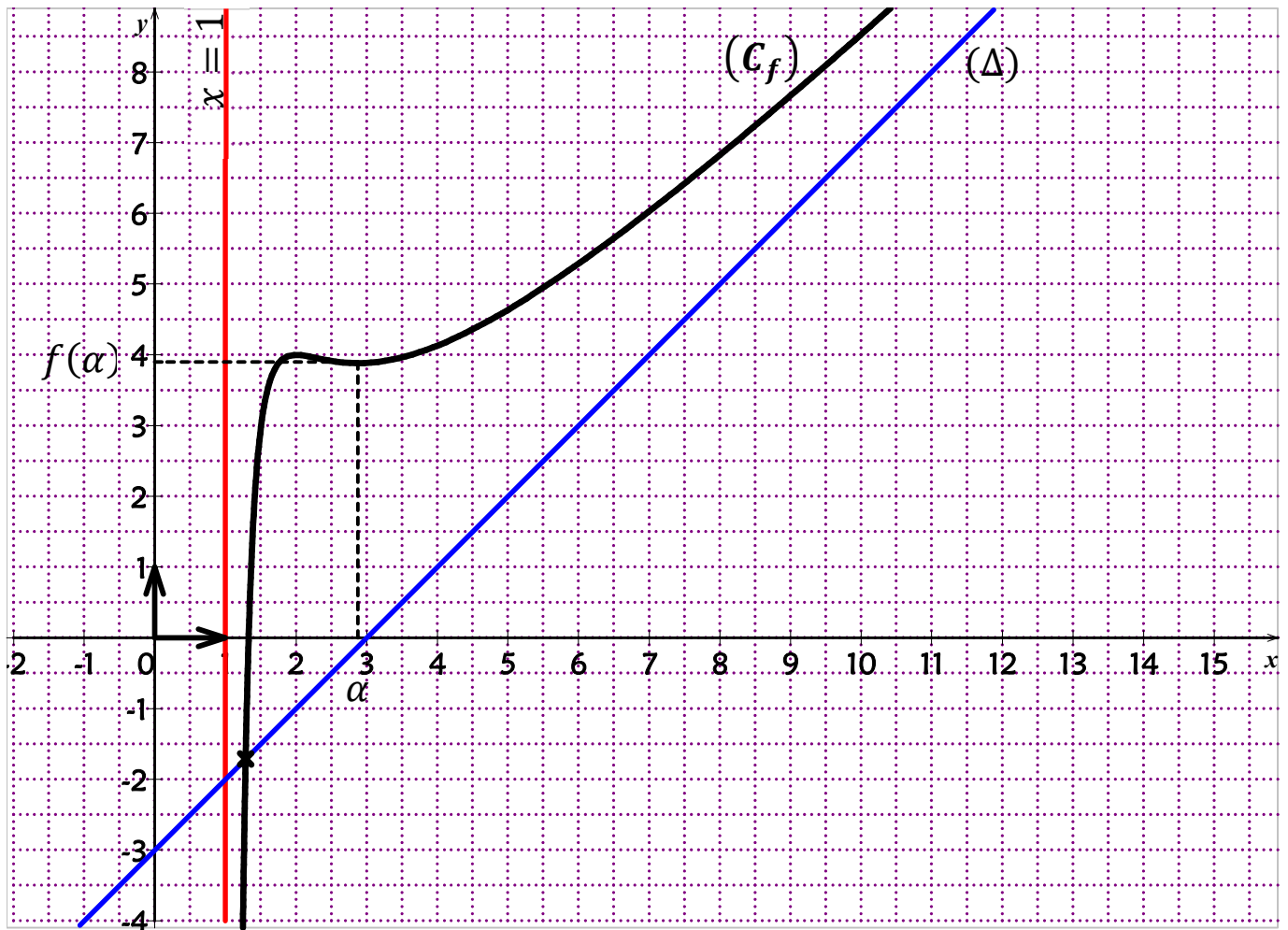
x	1	2	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	-	+

إذن: f متزايدة تماماً على كل من المجالين $2; -\infty$ و $[\alpha; +\infty)$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[2; \alpha]$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	1	2	α	$+\infty$
$f'(x)$	-	○	-	+
$f(x)$		4	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) رسم المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) : (بأخذ $9 \simeq 3, f(\alpha)$)



4) أعطين مشتقة الدالة $x \mapsto [\ln(x-1)]^2$ ، ثم استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:
 نضع: $h(x) = [\ln(x-1)]^2$ ، h قابلة للاشتقاق على $]1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$h'(x) = 2 \times \frac{1}{x-1} \times [\ln(x-1)]^1 = 2 \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$:

الدالة $x \mapsto \frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$ أصلية للدالة f على المجال $]1; +\infty[$.

بحساب $\int_2^5 f(x)dx$:

$$\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1) \right]_2^5 \quad \text{لدينا:}$$

$$\int_2^5 f(x)dx = \left[\frac{25}{2} - 15 + 2[\ln(4)]^2 + 5\ln(4) \right] - [-4] = 8[\ln 2]^2 + 10\ln 2 + \frac{3}{2} \quad \text{ومنه:}$$

تفسير النتيجة هندسيا:

التكامل $\int_2^5 f(x)dx$ هو مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) وحامل محور الفواصل والمستقيمين ذوي المعادلتين $x=5$ و $x=2$.

حل التمرين 04: (03 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

تحديد الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

1) مجموعة حلول المتراجحة $\ln(-3x+2) \leq \ln 3$ هي: أ. $\left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$ ؛

التعليل: لدينا: $D = \left]-\infty; \frac{2}{3}\right]$ (المجموعة المرجعية)

ولدينا: $\ln(-3x + 2) \leq \ln 3$ تكافئ: $-3x + 2 \leq 3$

ومنه: $-3x \leq 1$

وعليه: $x \geq -\frac{1}{3}$

وبالتالي: $S = D \cap \left[-\frac{1}{3}; +\infty\right]$ إذن: $S = \left[-\frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right]$

(2) لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بالعلاقة $f(x) = \frac{1}{x}$. الدالة الأصلية F للدالة f على المجال

$]0; +\infty[$ والتي تتعد من أجل $x = e$ معرفة كما يلي: ب. $F(x) = -1 + \ln x$

التعليق: لدينا: من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $F(x) = \ln x + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)

ولدينا: $F(e) = 0$ تكافئ: $\ln e + k = 0$

ومنه: $1 + k = 0$ وبالتالي: $k = -1$ إذن: $F(x) = -1 + \ln x$

02ط الاقتراح الصحيح هو: ب. $F(x) = -1 + \ln x$ لأن:

$$F(x) = \int_e^x \frac{1}{t} dt = [\ln t]_e^x = \ln x - \ln e = \ln x - 1$$

(3) القيمة المتوسطة للدالة $g: x \mapsto \frac{x^2}{4}$ على المجال $[-2; 2]$ تساوي: ج. $\frac{1}{3}$ لأن:

$$m = \frac{1}{2 - (-2)} \int_{-2}^2 g(x) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{1}{12} x^3 \right]_{-2}^2 = \frac{1}{4} \times \frac{1}{12} \left[(2^3) - ((-2)^3) \right] = \frac{1}{3}$$

حل التمرين 05: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $D_f = [1; +\infty[$ وفي $f(x) = ax + b + cx \ln x$ حيث a, b و c أعداد حقيقية.

(1) تخمين بيانياً اتجاه تغير f ونهاية f عند $+\infty$:

▪ f متزايدة تماماً على المجال $[1; \sqrt{e}]$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$ ؛

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

(2) أحساب بدلالة a و c عبارة $f'(x)$ حيث f' هي الدالة المشتقة للدالة f على $[1; +\infty[$:

f قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = a + c \left(1 \times \ln x + \frac{1}{x} \times x \right) = a + c(\ln x + 1)$

ب- باستعمال معطيات في الشكل، وعلماً أن $f(5) = 16 - 10 \ln 5$.

- تبيان أن: $f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x$ ؛

$$\begin{cases} a(1) + b + c(1) \ln 1 = 4 \\ a + c(\ln \sqrt{e} + 1) = 0 \\ a(5) + b + c(5) \ln 5 = 16 - 10 \ln 5 \end{cases} \quad \text{لدينا:} \quad \begin{cases} f(1) = 4 \\ f'(\sqrt{e}) = 0 \\ f(5) = 16 - 10 \ln 5 \end{cases} \quad \text{أي:}$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a + c \left(\frac{1}{2} \ln e + 1 \right) = 0 \\ 5a + b + 5c \ln 5 = 16 - 10 \ln 5 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$\begin{cases} a + b = 4 \\ a + \frac{3}{2}c = 0 \\ 5a + b = 16 \\ 5c = -10 \end{cases} \text{ أي:}$$

$$\begin{cases} a = 3 \\ b = 1 \\ c = -2 \end{cases} \text{ وبالتالي:} \quad \boxed{f(x) = 3x + 1 - 2x \ln x} \text{ إذن:}$$

جـ التحقق من صحة التخمين في السؤال 1، ثم تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{cases} \text{ لدينا: } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(3 + \frac{1}{x} - \ln x \right) \right] = -\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

$$\text{لدينا: } f'(x) = 1 - 2 \ln x$$

إشارة $f'(x)$ على المجال $[1; +\infty[$:

$$\boxed{f'(x) > 0} \text{ يعني: } 1 - 2 \ln x > 0 \text{ ومنه: } \ln x < \frac{1}{2} \text{ وعليه: } 1 < x < e^{\frac{1}{2}} \text{ أي: } \boxed{1 < x < \sqrt{e}}$$

$$\boxed{f'(x) = 0} \text{ يعني: } 1 - 2 \ln x = 0 \text{ ومنه: } \ln x = \frac{1}{2} \text{ وعليه: } x = e^{\frac{1}{2}} \text{ أي: } \boxed{x = \sqrt{e}}$$

$$\boxed{f'(x) < 0} \text{ يعني: } 1 - 2 \ln x < 0 \text{ ومنه: } \ln x > \frac{1}{2} \text{ وعليه: } x > e^{\frac{1}{2}} \text{ أي: } \boxed{x > \sqrt{e}}$$

ومنه: f متزايدة تماماً على المجال $[1; \sqrt{e}]$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$ ؛

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	1	$\sqrt{e}$	α	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	
$f(x)$	4	$f(\sqrt{e})$		$-\infty$

حيث $f(\sqrt{e}) = 3(\sqrt{e}) + 1 - 2(\sqrt{e}) \ln \sqrt{e} = 3\sqrt{e} + 1 - 2\sqrt{e} \times \frac{1}{2} \ln e = 2\sqrt{e} + 1$

(3) تبيان أن المعادلة، $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α على $[1; +\infty[$:

• لدينا: حسب جدول التغيرات، f متزايدة تماماً على المجال $[1; \sqrt{e}]$ و $f(1) = 4$

أي: $f(x) = 0$ لا تقبل حلاً على المجال $[1; \sqrt{e}]$.

• على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$:

■ f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} f(\sqrt{e}) = 2\sqrt{e} + 1 \simeq 4,30 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \end{cases} \text{ أي: } 0 \in]-\infty; 2\sqrt{e} + 1]$$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[\sqrt{e}; +\infty[$.

التحقق أن $4,95 < \alpha < 4,96$:

$$\text{لدينا: } \begin{cases} f(4,95) \simeq 0,02 \\ f(4,96) \simeq -0,01 \end{cases} \text{ أي: } f(4,95) \times f(4,96) < 0 \text{ إذن: } \boxed{4,95 < \alpha < 4,96}$$

(4) العدد الحقيقي S معرف كما يلي، $S = \int_1^\alpha f(x) dx$ (حيث α هو حل المعادلة $f(x) = 0$).

أثبتان أن الدالة، $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على $[1; +\infty[$:
 g قابلة للاشتقاق على $[1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = 4x + 1 - \left(2x \ln x + \frac{1}{x} \times x^2\right) = 4x + 1 - 2x \ln x - x = 3x + 1 - 2x \ln x = f(x)$$

إذن: $g: x \mapsto 2x^2 + x - x^2 \ln x$ دالة أصلية للدالة f على $[1; +\infty[$.

ب- إعطاء تفسير هندسي للعدد S :

العدد S هو مساحة الحيز من المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما $x = 1$ و $x = \alpha$.

حساب بدلالة α ، العدد S :

$$S = \int_1^\alpha f(x) dx = [g(x)]_1^\alpha = g(\alpha) - g(1) = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \ln \alpha$$

ج- تبين أن، $S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3$:

$$\ln \alpha = \frac{3\alpha+1}{2\alpha} \quad \text{لدينا: } \alpha \text{ حل للمعادلة } f(x) = 0 \text{ أي: } f(\alpha) = 0 \text{ ومنه: } 3\alpha + 1 - 2\alpha \ln \alpha = 0 \text{ وعليه:}$$

$$S = 2\alpha^2 + \alpha - 3 - \alpha^2 \left(\frac{3\alpha+1}{2\alpha}\right) = 2\alpha^2 + \alpha - \frac{1}{2} \alpha(3\alpha + 1) - 3$$

$$\text{ومنه: } S = \frac{1}{2} \alpha[4\alpha + 2 - (3\alpha + 1)] - 3 = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3 \text{ (وهو المطلوب).}$$

استنتاج حصرا للعدد S :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{4,95}{2} < \frac{1}{2} \alpha < \frac{4,96}{2} \\ 5,95 < \alpha + 1 < 5,96 \end{array} \right. \text{ ومنه: } \left\{ \begin{array}{l} 4,95 < \alpha < 4,96 \\ S = \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3 \end{array} \right.$$

$$\frac{4,95}{2} (5,95) - 3 < \frac{1}{2} \alpha(\alpha + 1) - 3 < \frac{4,96}{2} (5,96) - 3 \text{ وبالتالي:}$$

$$\text{إذن: } 11,73 < S < 11,78$$

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

$$I \text{ لدينا: } g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2} \text{ و }]0; +\infty[. D_g =$$

(1) تعيين، تبعا لقيم x ، إشارة $g(x)$:

إشارة $g(x)$ من إشارة البسط $(-x^2 + x + 2)$ على $]0; +\infty[$.

نضع: $-x^2 + x + 2 = 0$ مميزها: $\Delta = (1)^2 - 4(-1)(2) = 9 > 0$ للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$x' = \frac{-(-1)+\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1+3}{-2} = \frac{2}{-2} = -1 \notin]0; +\infty[\text{ و } x'' = \frac{-(-1)-\sqrt{9}}{2(-1)} = \frac{-1-3}{-2} = \frac{-4}{-2} = 2$$

x	0	2	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-

(2) أ- التحقق أنه، من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، $g(x) = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}$:

$$g(x) = \frac{-x^2+x+2}{x^2} = \frac{-x^2}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{2}{x^2} = -1 + \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2} \text{ لدينا: من أجل كل } x \text{ من }]0; +\infty[$$

ب- استنتاج الدوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$:

الدوال الأصلية للدالة g على $]0; +\infty[$ ، هي دوال من الشكل $G: x \mapsto -x + \ln x - \frac{2}{x} + k$ (حيث $k \in \mathbb{R}$)

(II) لدينا: $f(x) = 3 - x - \frac{2}{x} + \ln x$ و $D_f =]0; 8]$.

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1) أ-التحقق أن f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8]$ والتي تنعدم عند 1:

ط(01) لدينا: $\begin{cases} f'(x) = -1 - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x} = g(x) \\ f(1) = 3 - 1 - \frac{2}{1} + \ln 1 = 0 \end{cases}$ إذن: f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8]$ والتي تنعدم عند 1.

ط(02) لدينا: $\int_1^x g(t)dt = [G(t)]_1^x = G(x) - G(1) = \left(-x + \ln x - \frac{2}{x} + k\right) - \left(-1 + \ln 1 - \frac{2}{1} + k\right)$

ومنه: $\int_1^x g(t)dt = -x + \ln x - \frac{2}{x} + 3 = f(x)$

إذن: f هي الدالة الأصلية للدالة g على المجال $]0; 8]$ والتي تنعدم عند 1.

ب-استنتاج اتجاه تغير الدالة f على المجال $]0; 8]$:

لدينا: من أجل كل x من $]0; 8]$ ، $f'(x) = g(x)$ (لأن f دالة أصلية لـ g)

أي: لـ $f'(x)$ و $g(x)$ نفس الإشارة،

إذن: f متزايدة تماماً على المجال $]0; 2]$ ، ومتناقصة تماماً على المجال $[2; 8]$.

ج-حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ، ثم تفسير النتيجة هندسياً:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(3 - x - \frac{2}{x} + \ln x\right) = -\infty$ لأن: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{2}{x}\right) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \end{cases}$

التفسير الهندسي:

بمأن: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$ ، فإن: المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الترتيب) مقارب لـ (C_f) .

د-تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	2	8
$f'(x)$		+	-
$f(x)$		$\ln 2$	$-\frac{21}{4} + 3 \ln 2$

2) تبيان أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين، أحدهما α ، حيث $3,8 < \alpha < 3,9$:

بالنسبة للحل الأول:

▪ f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]0; 2]$

ولدينا: $\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty \\ f(2) = \ln 2 > 0 \end{cases}$ أي: $0 \in]-\infty; \ln 2]$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً وهو العدد 1 في المجال $]0; 2]$.

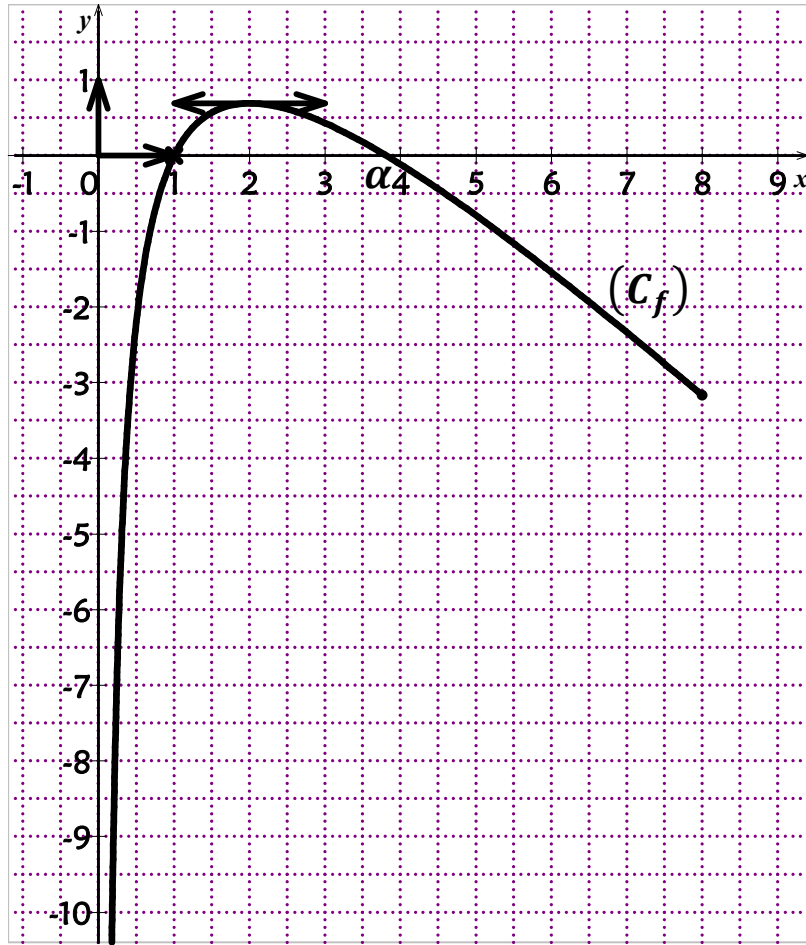
بالنسبة لـ α :

▪ f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]3,8; 3,9[$ (لأنها متناقصة تماماً على المجال $[2; 8]$)

ولدينا: $\begin{cases} f(3,8) \simeq 0,01 \\ f(3,9) \simeq -0,05 \end{cases}$ أي: $f(3,8) \times f(3,9) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $3,8 < \alpha < 3,9$.

(3) تمثيل بيانياً (C_f) :



(III) لدينا: $h(x) = f(3x + 2)$ و $D_h =]-\frac{2}{3}; 2]$

نلاحظ أن: h عبارة عن مركب دالتين f و $x \mapsto 3x + 2$.

(1) في حالة: $-\frac{2}{3} < x \leq 0$ فإن: $-2 < 3x \leq 0$ ويكون: $0 < 3x + 2 \leq 2$

وفي حالة: $0 \leq x \leq 2$ فإن: $0 \leq 3x \leq 6$ ويكون: $2 \leq 3x + 2 \leq 8$.

(2) حساب $h'(x)$: (عبارة $h(x)$ غير مطلوبة)

تذكير: $[u(ax + b)]' = au'(ax + b)$.

h قابلة للاشتقاق على $]-\frac{2}{3}; 2]$ ، ولدينا: $h'(x) = 3f'(3x + 2)$

(3) تشكيل جدول تغيرات h :

إشارة $h'(x)$ من إشارة $f'(3x + 2)$.

لدينا:

$3x + 2$	0	2	8
$f'(3x + 2)$		+	-
$f(3x + 2)$		$\ln 2$	
		$-\infty$	$-\frac{21}{4} + 3 \ln 2$

x	$-\frac{2}{3}$	0	2
$h'(x)$		$+$	$-$
$h(x)$		$\ln 2$	$-\frac{21}{4} + 3 \ln 2$

حل التمرين 07: (04 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(أ) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن، $(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x^3-9x^2+7x+6$:
لدينا:

$$(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x(x^2-5x+6) + 1(x^2-5x+6) \\ = 2x^3 - 10x^2 + 12x + x^2 - 5x + 6 = 2x^3 - 9x^2 + 7x + 6$$

إذن: $(2x+1)(x^2-5x+6) = 2x^3-9x^2+7x+6$

(ب) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7 \ln x + 6 = 0$:

لدينا: $D =]0; +\infty[$ (المجموعة المرجعية)

وباستعمال السؤال (1)

$$(2 \ln x + 1)[(\ln x)^2 - 5 \ln x + 6] = 0 \quad \text{تُكافئ:} \quad 2(\ln x)^3 - 9(\ln x)^2 + 7 \ln x + 6 = 0$$

$$\begin{cases} 2 \ln x + 1 = 0 \\ \text{أو} \\ (\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0 \end{cases} \quad \text{ومنه:}$$

$$\square \quad 2 \ln x + 1 = 0 \quad \text{معناه:} \quad \ln x = -\frac{1}{2} \quad \text{ومنه:} \quad x = e^{-\frac{1}{2}} \quad \text{أي:} \quad x = \frac{1}{\sqrt{e}} \in D$$

$$\square \quad \text{بوضع:} \quad X = \ln x, \quad \text{المعادلة} \quad (\ln x)^2 - 5 \ln x + 6 = 0$$

$$\Delta = (-5)^2 - 4(1)(6) = 1 > 0 \quad \text{تُصبح:} \quad X^2 - 5X + 6 = 0 \quad (*) \quad \text{مميز} \quad (*)$$

$$\text{للمعادلة} \quad (*) \quad \text{حليين متمايزين هما:} \quad X' = \frac{-(-5)+\sqrt{1}}{2(1)} = 3 \quad \text{و} \quad X'' = \frac{-(-5)-\sqrt{1}}{2(1)} = 2$$

$$\text{وبالعودة إلى الوضع نجد: من أجل} \quad X = 3 \quad \text{أي:} \quad \ln x = 3 \quad \text{فإن:} \quad x = e^3 \in D$$

$$\text{ومن أجل} \quad X = 2 \quad \text{أي:} \quad \ln x = 2 \quad \text{فإن:} \quad x = e^2 \in D$$

$$\text{إذن: مجموعة الحلول هي} \quad S_1 = \left\{ \frac{1}{\sqrt{e}}; e^2; e^3 \right\}$$

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$:

$$e^{3x}(6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2) = e^{3x}(0) \quad \text{تُكافئ:} \quad 6e^{-3x} + 7e^{-2x} - 9e^{-x} + 2 = 0$$

$$6 + 7e^x - 9e^{2x} + 2e^{3x} = 0 \quad \text{تُصبح:}$$

$$2(e^x)^3 - 9(e^x)^2 + 7e^x + 6 = 0 \quad \text{أي:}$$

$$(2e^x + 1)[(e^x)^2 - 5e^x + 6] = 0 \quad \text{ومنه:}$$

$$(2e^x + 1)(e^x - 3)(e^x - 2) = 0 \quad \text{وعليه:}$$

$$\text{وبالتالي:} \quad e^x - 3 = 0 \quad \text{أو} \quad e^x - 2 = 0 \quad \text{(لأن:} \quad 2e^x + 1 > 0 \text{)}$$

$$\text{أي أن:} \quad x = \ln 3 \quad \text{أو} \quad x = \ln 2$$

إذن: مجموعة الحلول هي $S_2 = \{\ln 2; \ln 3\}$.

(ج) حل في $\mathbb{R}$ المتراحة، $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 \leq 0$: (ندرس إشارة $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$)
إشارة $(2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6)$ من إشارة $[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$
(لأن $2e^x + 1 > 0$ و $2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6 = (2e^x + 1)[(e^x)^2 - 5e^x + 6]$)

x	$-\infty$	$\ln 2$	$\ln 3$	$+\infty$	
$(e^x)^2 - 5e^x + 6$	+		-		+
$2e^{3x} - 9e^{2x} + 7e^x + 6$	+		-		+

إذن: مجموعة الحلول هي $S_3 = [\ln 2; \ln 3]$.

(2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة، $\log(x^2 + 100) = 1 + \log 2 + \log x$:

لدينا: $D =]0; +\infty[$ (المجموعة المرجعية)

$\log(x^2 + 100) = \log 10 + \log 2 + \log x$ تُكافئ:

$\log(x^2 + 100) = \log(10 \times 2 \times x)$ وتُصبح:

ومنه: $x^2 + 100 = 10 \times 2 \times x$

أي: $(x - 10)^2 = 0$

يعني: $x - 10 = 0$ ، وبالتالي: $x = 10 \in D$

إذن: مجموعة الحلول هي $S_4 = \{10\}$.

حل التمرين 08: (07 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = 1 - x^2 - \ln x$ و $D_g =]0; +\infty[$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $g'(x) = -2x - \frac{1}{x} = -\left(2x + \frac{1}{x}\right) < 0$

إذن: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$.

(2) حساب $g(1)$ ثم استنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$:

لدينا: $g(1) = 1 - (1)^2 - \ln 1 = 0$.

استنتاج تبعا لقيم x إشارة $g(x)$:

بما أن: g متناقصة تماما على المجال $]0; +\infty[$ و $g(1) = 0$ ، فإن:

x	0	1	$+\infty$
$g(x)$	+	○	-

(II) لدينا: $f(x) = x - 1 - \frac{\ln x}{x}$ و $D_f =]0; +\infty[$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: (علماً أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - 1) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ ثم تفسير النتيجة هندسيا:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

التفسير الهندسي:

المستقيم ذو المعادلة $x = 0$ (محور الترتيب) مُقارب لـ (C_f) .

(2) تبين أنه من أجل كل x من $]0; +\infty[$ ، فإن: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغير الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = \frac{-g(x)}{x^2} = \frac{-(1-x^2-\ln x)}{x^2} = \frac{x^2-1+\ln x}{x^2}$

إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ، وبالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+

إذن: f متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$ ، ومتزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$.

(ب) تشكيل جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

(3) تبين أن المستقيم (D) الذي معادلته $y = x - 1$ مُقارب مائل للمنحنى (C_f) :

نبين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = 0$.

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 1)] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\right) = 0$

ومنه: المستقيم $(D): y = x - 1$ مُقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

(ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (D) : (ندرس إشارة الفرق $[f(x) - (x - 1)]$)

لدينا: $f(x) - (x - 1) = \frac{-\ln x}{x}$

ومنه: إشارة الفرق $[f(x) - (x - 1)]$ عكس إشارة $(\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$ ، وبالتالي:

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f(x) - (x - 1)$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (D)	(C_f) يقطع (D)	(C_f) يقع تحت (D)

4) تعيين فاصلة النقطة A من (C_f) التي يكون فيها المماس (T) مُوازيا للمستقيم (D) ثم كتابة معادلة للمماس

:(T)

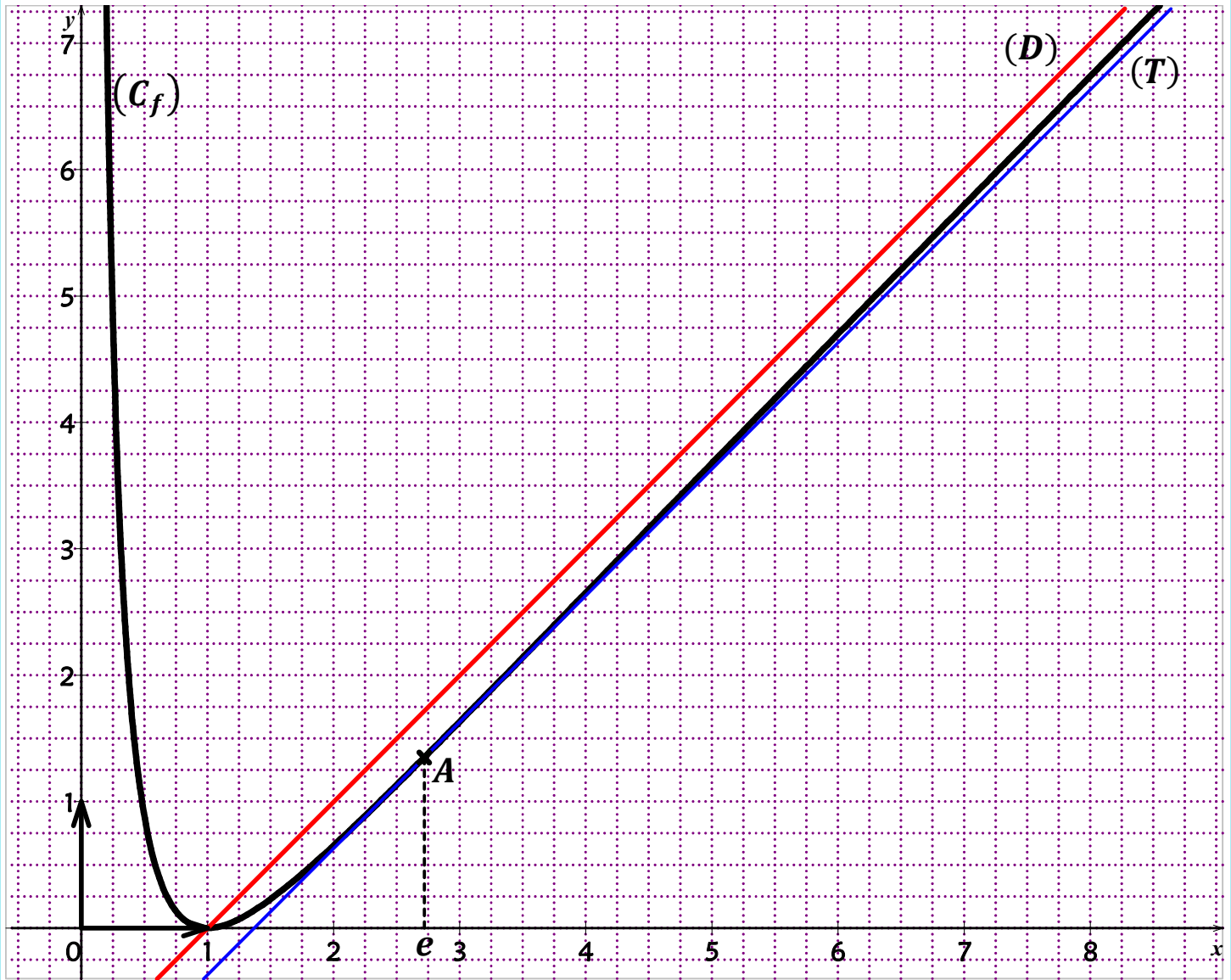
معناه: $f'(x) = 1$ ومنه: $\frac{-g(x)}{x^2} = 1$ أي: $-g(x) = x^2$ وعليه: $\ln x = 1$ إذن: $x = e = x_A$

معادلة (T) من الشكل: $y = f'(x_A)(x - x_A) + \underbrace{f(x_A)}_{y_A}$

$$\begin{cases} f'(x_A) = f'(e) = 1 \\ f(x_A) = f(e) = e - 1 - \frac{\ln e}{e} = e - 1 - \frac{1}{e} \end{cases} \text{ولدينا:}$$

$$\text{بالتعويض نجد: } y = 1(x - e) + e - 1 - \frac{1}{e} \text{ ومنه: } (T): y = x - 1 - \frac{1}{e}$$

(5) رسم (D)، (T) و (C_f):



(6) حساب القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$:

القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[1; 3]$ هي العدد m والمعرف كما يلي:

$$m = \frac{1}{3-1} \int_1^3 f(x) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} x^2 - x - \frac{(\ln x)^2}{2} \right]_1^3 = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{2} (3)^2 - 3 - \frac{(\ln 3)^2}{2} \right) - \left(\frac{1}{2} (1)^2 - 1 - \frac{(\ln 1)^2}{2} \right) \right]$$

$$\text{ومنه: } m = 1 - \frac{(\ln 3)^2}{4}$$

حل التمرين 09: (09 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $D_f =]-1; +\infty[$ و $f(x) = ax + b + 3 \ln(x + 1)$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

(Γ) التمثيل البياني للدالة f ، يقبل في النقطة $A(2; -1 + 3 \ln 3)$ مماساً موازياً لحامل محور الفواصل

معناه: $f'(2) = 0$ و $f(2) = -1 + 3 \ln 3$.

(1) بقراءة بيانية:

(أ) وضع تخمين حول $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$:

من البيان: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ؛ $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$

(ب) تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :
من البيان:

x	-1	2	$+\infty$
$f'(x)$		$+$	$-$
$f(x)$		$-1 + 3 \ln 3$	

$-\infty \nearrow$ $\searrow -\infty$

(2) باستعمال المعطيات المتوفرة، إيجاد قيمة كل من a و b :

▪ f معرفة وقابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ، ولدينا: $f'(x) = a + \frac{3}{x+1}$

▪ ولدينا من جهة أخرى: $\begin{cases} f'(2) = 0 \\ f(2) = -1 + 3 \ln 3 \end{cases}$ معناه: $\begin{cases} a + 1 = 0 \\ 2a + b + 3 \ln 3 = -1 + 3 \ln 3 \end{cases}$ ومنه: $a = -1$ و $b = 1$.

إذن: $f(x) = -x + 1 + 3 \ln(x+1)$ و $f'(x) = -1 + \frac{3}{x+1}$.

(II) باعتبار في هذا الجزء: $f(x) = -x + 1 + 3 \ln(x+1)$.

(1) حساب نهاية الدالة f عند (-1) بقيم أكبر:

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow -1} \ln(x+1) = \lim_{y \rightarrow 0} \ln y = -\infty$.

(2) حساب نهاية الدالة f عند $+\infty$: (علماً أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$)

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x \left(-1 + \frac{1}{x} + 3 \frac{\ln(x+1)}{x} \right) \right] = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.

(3) (أ) تعيين النقطة B من المنحنى (Γ) التي يكون فيها المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، ثم كتابة معادلة للمماس (T) :

المماس (T) للمنحنى (Γ) موازياً للمستقيم الذي معادلته $y = x$ ، معناه: $f'(x) = 1$ أي: $-1 + \frac{3}{x+1} = 1$ ومنه: $x = \frac{1}{2}$

إذن: $B \left(\frac{1}{2}; f \left(\frac{1}{2} \right) \right)$ أي: $B \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{3}{2} \right)$ (لأن: $B \in (\Gamma)$)

كتابة معادلة للمماس (T) :

(T) مماس للمنحنى (Γ) في النقطة B .

معادلة (T) من الشكل: $y = f' \left(\frac{1}{2} \right) \left(x - \frac{1}{2} \right) + f \left(\frac{1}{2} \right)$

ولدينا: $\begin{cases} f' \left(\frac{1}{2} \right) = 1 \\ f \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{3}{2} \end{cases}$ بالتعويض نجد: $y = 1 \left(x - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} + 3 \ln \frac{3}{2}$ ومنه: $(T): y = x + 3 \ln \frac{3}{2}$

(ب) استنتاج بيانياً، قيم العدد الحقيقي m التي تقبل من أجلها المعادلة $f(x) = x + m$ حلين موجبين تماماً:

المعادلة $f(x) = x + m$ تقبل حلين موجبين تماماً من أجل $1 < m < 3 \ln \frac{3}{2}$.

(4) لدينا: $g(x) = (x+1) \ln(x+1) - x$ و $D_g =]-1; +\infty[$

(أ) حساب $g'(x)$ ؛ ثم استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$ ؛
 g قابلة للاشتقاق على $]-1; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = \left[1 \ln(x+1) + \frac{1}{x+1} \times (x+1) \right] - 1 = \ln(x+1)$$

استنتاج دالة أصلية للدالة f على المجال $]-1; +\infty[$:

بمأن: g أصلية للدالة $x \mapsto \ln(x+1)$ على المجال $]-1; +\infty[$ ،

فإن: الدالة $F: x \mapsto -\frac{1}{2}x^2 + x + 3g(x)$ أصلية لـ f على المجال $]-1; +\infty[$.

$$(F(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1) \ln(x+1))$$

(ب) α و β فاصلتي نقطتي تقاطع المنحنى (Γ) مع حامل محور الفواصل، معناه: $f(\alpha) = f(\beta) = 0$

تبيان أن $\alpha \in]7,37; 7,38[$ و $\beta \in]-0,37; -0,36[$:

بالنسبة لـ α :

■ f مستمرة ومتناقصة تماماً على المجال $]7,37; 7,38[$ (لأنها متناقصة تماماً على $[2; +\infty[$)

■ ولدينا: $\begin{cases} f(7,37) \simeq 0,003 \\ f(7,38) \simeq -0,002 \end{cases}$ أي: $f(7,37) \times f(7,38) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $]7,37; 7,38[$.

بالنسبة لـ β :

■ f مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]-0,37; -0,36[$ (لأنها متزايدة تماماً على $[-1; 2]$)

■ ولدينا: $\begin{cases} f(-0,37) \simeq -0,01 \\ f(-0,36) \simeq 0,02 \end{cases}$ أي: $f(-0,37) \times f(-0,36) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً β في المجال $]-0,37; -0,36[$.

(ج) حساب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (Γ) وحامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما

$x = \alpha$ ، $x = 0$

لدينا: $S = \int_0^\alpha f(x) dx = [F(x)]_0^\alpha = F(\alpha) - F(0) = F(\alpha)$

$$S = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1) \ln(\alpha+1) \right) ua$$

(د) التحقق أن $S = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1 \right) ua$ ؛ ثم تعيين حصراً لـ S : (ua وحدة مساحة)

بمأن: $f(\alpha) = 0$ فإن: $\ln(\alpha+1) = \frac{\alpha-1}{3}$ وبالتعويض نجد:

$$S = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + 3(\alpha+1) \left(\frac{\alpha-1}{3} \right) \right) ua = \left(-\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha + \alpha^2 - 1 \right) ua = \left(\frac{1}{2}\alpha^2 - 2\alpha - 1 \right) ua$$

تعيين حصراً لـ S :

$$\begin{cases} \frac{(7,37)^2}{2} < \frac{1}{2}\alpha^2 < \frac{(7,38)^2}{2} \\ -2(7,38) - 1 < -2\alpha - 1 < -2(7,37) - 1 \end{cases}$$

$$11,39845 < S < 11,49220$$

(III) تنتج إحدى الورشات في اليوم الواحد 7 آلاف قطعة على الأكثر.

نُتمذج الكلفة الهاشمية C_m (الوحدة 1000 دينار) لإنتاج قطعة إضافية على المجال $[0; 7]$ بالدالة f المعرفة في الجزء II)، أي من أجل $x \in [0; 7]$ لدينا $C_m(x) = f(x)$.
نرمز بـ $C_T(x)$ إلى الكلفة الإجمالية لإنتاج x قطعة.

1) تعيين عبارة الكلفة الإجمالية $C_T(x)$ علماً أن الكلفة الإجمالية لإنتاج الألف قطعة الأولى هي $\frac{5}{2}$:

نعلم أن الكلفة الإجمالية C_T أصلية للكلفة الهاشمية C_m ، وبما أن F أصلية لـ f
فإن: $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + c$ (حيث $c \in \mathbb{R}$)، مع $C_T(1) = \frac{5}{2}$
ومنه: $-\frac{1}{2} - 2 + 3(2)\ln 2 + c = \frac{5}{2}$

وعليه: $c = 5 - 6\ln 2$ ، إذن: $C_T(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 2x + 3(x+1)\ln(x+1) + 5 - 6\ln 2$

2) تقدير قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة:

بالتعويض نجد: $C_T(7) = -\frac{1}{2}(7)^2 - 2(7) + 3(8)\ln(8) + 5 - 6\ln 2 \simeq 12,248$
إذن: قيمة الكلفة الإجمالية لإنتاج 7 آلاف قطعة هي 12,248 ألف دينار.

حل التمرين 10: (07,5 نقطة) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

I) لدينا: $]0; +\infty[D_g$ و $g(x) = ax + b + \ln x$ ، حيث a و b عدنان حقيقيان.

1) تعيين a و b بحيث، $g(1) = 2$ و $g'(2) = \frac{3}{2}$:

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $g'(x) = a + \frac{1}{x}$.

ومن: $\begin{cases} a + b = 2 \\ a + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ أي: $\begin{cases} g(1) = 2 \\ g'(2) = \frac{3}{2} \end{cases}$ إذن: $a = b = 1$ ، $g(x) = x + 1 + \ln x$ و $g'(x) = 1 + \frac{1}{x}$.

2) بوضع: $g(x) = x + 1 + \ln x$:

أحساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$:

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$.

■ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$.

ب-دراسة اتجاه تغير الدالة g ثم تشكيل جدول تغيراتها:

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $g'(x) = 1 + \frac{1}{x} > 0$.

ومنه: g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ ، ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	0	α	$+\infty$
$g'(x)$		+	
$g(x)$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ج-تبيان أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً حقيقياً وحيداً α حيث، $0,2 < \alpha < 0,3$:

■ g مستمرة و متزايدة تماماً على المجال $]0,2; 0,3[$ (لأنها متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$)

■ ولدينا: $\begin{cases} g(0,2) \simeq -0,41 \\ g(0,3) \simeq 0,10 \end{cases}$ أي: $g(0,2) \times g(0,3) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $0,2 < \alpha < 0,3$.

د-تحديد تبعا لقيم العدد الحقيقي x إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

بمأن: g متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ ، و $g(\alpha) = 0$ فإن:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	■	-	+

(II) لدينا: $f(x) = \frac{x \ln x}{x+1}$ و $D_f =]0; +\infty[$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم استنتاج اتجاه تغيّر الدالة f :

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{\left((1 \ln x) + \left(\frac{1}{x} \times x\right)\right)(x+1) - 1(x \ln x)}{(x+1)^2} = \frac{(1 + \ln x)(x+1) - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{x+1+x \ln x + \ln x - x \ln x}{(x+1)^2} = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$$

ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+

إذن: f متناقصة تماما على $]0; \alpha[$ ؛ ومتزايدة تماما على المجال $[\alpha; +\infty[$.

(2) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (علما أن $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$):

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} (x+1) = 1$

■ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1 + \frac{1}{x}} = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$

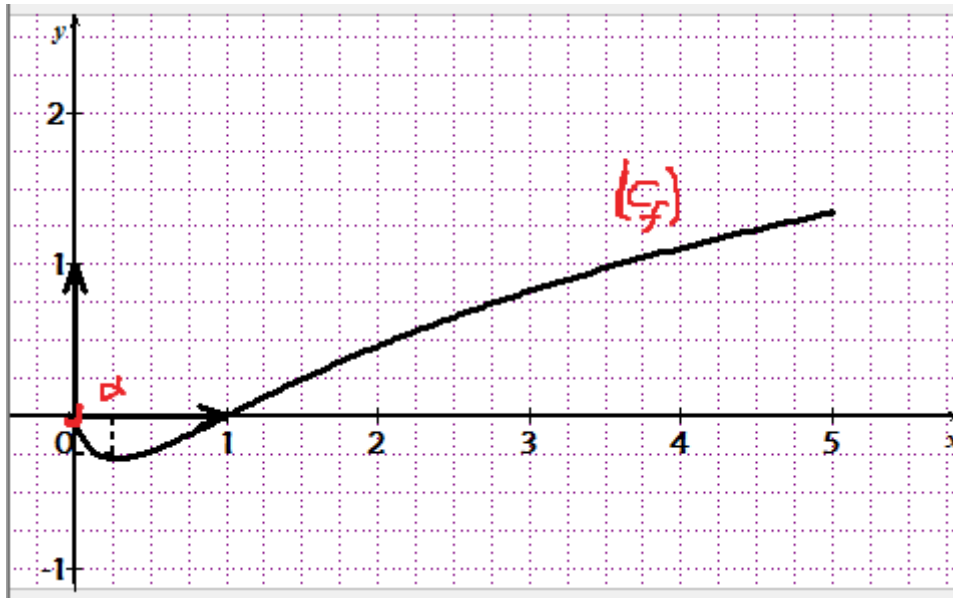
(3) التحقق أن $f(\alpha) = -\alpha$ ثم تشكيل جدول تغيّرات الدالة f :

لدينا: $\ln \alpha = -(\alpha + 1)$ لأن: $g(\alpha) = 0$ ومنه: $f(\alpha) = \frac{\alpha \ln \alpha}{\alpha+1} = \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\alpha+1} = -\alpha$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+
$f(x)$	0	$-\alpha$	$+\infty$

(4) حساب $f(1)$ و $f(5)$ ثم رسم (C_f) على المجال $]0; 5[$:

بالتعويض نجد: $f(1) = 0$ و $f(5) = \frac{5 \ln 5}{6}$



حل التمرين 11: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: تسيير وإقتصاد.

(I) لدينا: $g(x) = -4 + 2x(1 + \ln x)$ و $D_f =]0; +\infty[$

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$: (علما أن $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$)

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-4 + 2x + 2x \ln x) = -4$ لأن: $\lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

■ ولدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + \ln x) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty$

(2) دراسة اتجاه تغير الدالة g على المجال $]0; +\infty[$ ثم تشكيل جدول تغيراتها:
 g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$g'(x) = 2(1 + \ln x) + \left(\frac{1}{x} \times 2x\right) = 2[(1 + \ln x) + 1] = 2(\ln x + 2)$$

ومنه: إشارة $g'(x)$ من إشارة $(\ln x + 2)$

نضع: $\ln x + 2 = 0$ نجد: $\ln x = -2$ ومنه: $x = e^{-2}$

x	0	e^{-2}	$+\infty$
$g'(x)$	■	-	+

إذن: g متناقصة تماما على $]0; e^{-2}[$ ؛ ومتزايدة تماما على المجال $[e^{-2}; +\infty[$.

تشكيل جدول تغيراتها:

x	0	e^{-2}	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+	
$f(x)$	-4	$-4 - 2e^{-2}$	$+$	$+\infty$

(3) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $1,4 < \alpha < 1,5$:

■ g مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]1,4; 1,5[$ (لأنها متزايدة تماما على $[e^{-2}; +\infty[$)

■ ولدينا: $\begin{cases} g(1,4) \simeq -0,26 \\ g(1,5) \simeq 0,22 \end{cases}$ أي: $g(1,4) \times g(1,5) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1,4 < \alpha < 1,5$.

(4) تحديد إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	■	-	+

(II) لدينا: $f(x) = (2x - 4) \ln x$ و $D_f =]0; +\infty[$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(1) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

■ **لدينا:** $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} (2x - 4) = -4$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty$

تفسيرها الهندسي:

حامل محور الترتيب مقارب لـ (C_f) .

ب- حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

■ **لدينا:** $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - 4) = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$

(2) أ- تبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$:

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 2(\ln x) + \left(\frac{1}{x} \times (2x - 4)\right) = \frac{2x \ln x + 2x - 4}{x} = \frac{-4 + 2x(1 + \ln x)}{x} = \frac{g(x)}{x}$$

ب- استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم تشكيل جدول تغيراتها:

لدينا: $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+

إذن: f متناقصة تماما على $]0; \alpha[$ ؛ ومتزايدة تماما على $[\alpha; +\infty[$.

ويكون جدول تغيراتها كالتالي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

(3) تعيين نقط تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]0; +\infty[$)

$$f(x) = 0 \text{ معناه: } (2x - 4) \ln x = 0$$

$$\text{ومنه: } 2x - 4 = 0 \text{ أو } \ln x = 0$$

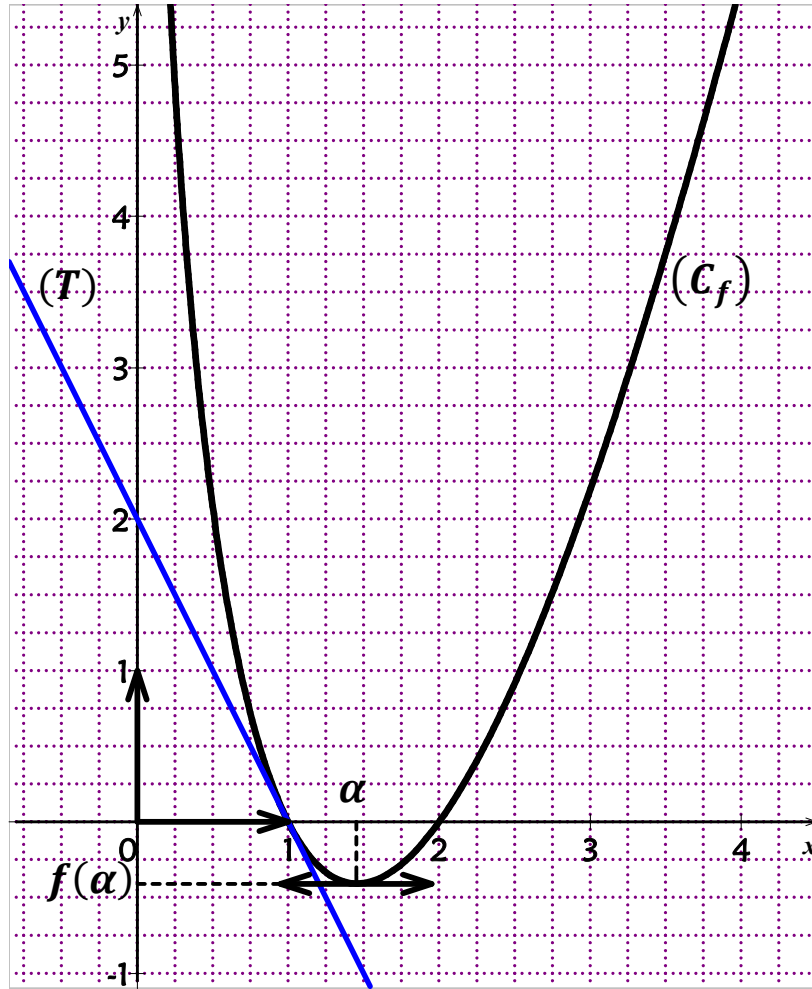
$$\text{وعليه: } x = 2 \text{ أو } x = 1, \text{ إذن: } (C_f) \cap (xx') = \{A(1; 0); B(2; 0)\}$$

(4) كتابة معادلة للمماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1:

$$\text{معادلة } (T) \text{ من الشكل: } y = f'(1)(x - 1) + f(1)$$

$$\text{ولدينا: } \begin{cases} f'(1) = g(1) = -2 \\ f(1) = y_A = 0 \end{cases} \text{ إذن: } (T): y = -2x + 2$$

ب- إنشاء (T) و (C_f) : (علما أن $f(\alpha) \simeq -0,41$)



5) لدينا: الدالة F المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $F(x) = (x^2 - 4x) \ln x - \frac{1}{2}x^2 + 4x$
 أتبين أن F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$:

F قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $F'(x) = (2x - 4)(\ln x) + \left(\frac{1}{x} \times (x^2 - 4x)\right) - x + 4$
 ومنه: $F'(x) = (2x - 4)(\ln x) + x - 4 - x + 4 = (2x - 4)(\ln x) = f(x)$
 إذن: F دالة أصلية للدالة f على المجال $]0; +\infty[$.

ب- حساب مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها: $x = 1$ و $x = 2$ ، $y = 0$:

لتكن مساحة الحيز هي A نجد: $A = \int_1^2 -f(x) dx = -[F(x)]_1^2 = -[F(2) - F(1)]$
 ومنه: $A = -\left[(-4 \ln 2 + 6) - \frac{9}{2}\right] = -\frac{3}{2} + 4 \ln 2 \text{ ua}$

حل التمرين 12: (08 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 01 // الشعبة: تسيير وإ.

1) لدينا: $g(x) = x^2 + 3 \ln x - 3$ و $D_g =]0; +\infty[$.

(1) دراسة اتجاه تغير الدالة g :

g قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا: $g'(x) = 2x + \frac{3}{x} > 0$

ومنه: g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$.

(2) تبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1,40 < \alpha < 1,41$:

▪ g مستمرة ومتزايدة تماماً على المجال $]1,40; 1,41[$ (لأنها متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$)

■ ولدينا: $\begin{cases} g(1,40) \simeq -0,03 \\ g(1,41) \simeq 0,02 \end{cases}$ أي: $g(1,40) \times g(1,41) < 0$

إذن: حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث، $1,40 < \alpha < 1,41$.

استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x :

بمأن: g متزايدة تماماً على $]0; +\infty[$ ، و $g(\alpha) = 0$ فإن:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	■	-	+

(II) لدينا: $f(x) = x + 1 - \frac{3 \ln x}{x}$ و $D_f =]0; +\infty[$

(C_f) التمثيل البياني لـ f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(أ) حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{x} = -\infty$

تفسيرها بيانياً: حامل محور الترتيب مقارب لـ (C_f) .

(ب) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

■ لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x + 1) = +\infty$

(2) تبيان أنّ من أجل كلّ عدد حقيقي x موجب تماماً، $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$:

f قابلة للاشتقاق على $]0; +\infty[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = 1 - 3 \frac{\left(\left(\frac{1}{x} \times x\right) - (1 \ln x)\right)}{x^2} = 1 - 3 \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 3 + 3 \ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

(3) استنتاج اتجاه تغيّر الدّالة f ثم تشكيل جدول تغيّراتها:

بمأن: $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ ، فإن: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+

إذن: f متناقصة تماماً على $]0; \alpha[$ ؛ ومتزايدة تماماً على المجال $[\alpha; +\infty[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	■	-	+
$f(x)$	0	$f(\alpha)$	$+\infty$

(4) تبيان أنّ المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) :

نُبين أنّ $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = 0$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{3 \ln x}{x}\right) = 0$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

إذن: المستقيم (Δ) ذا المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$.

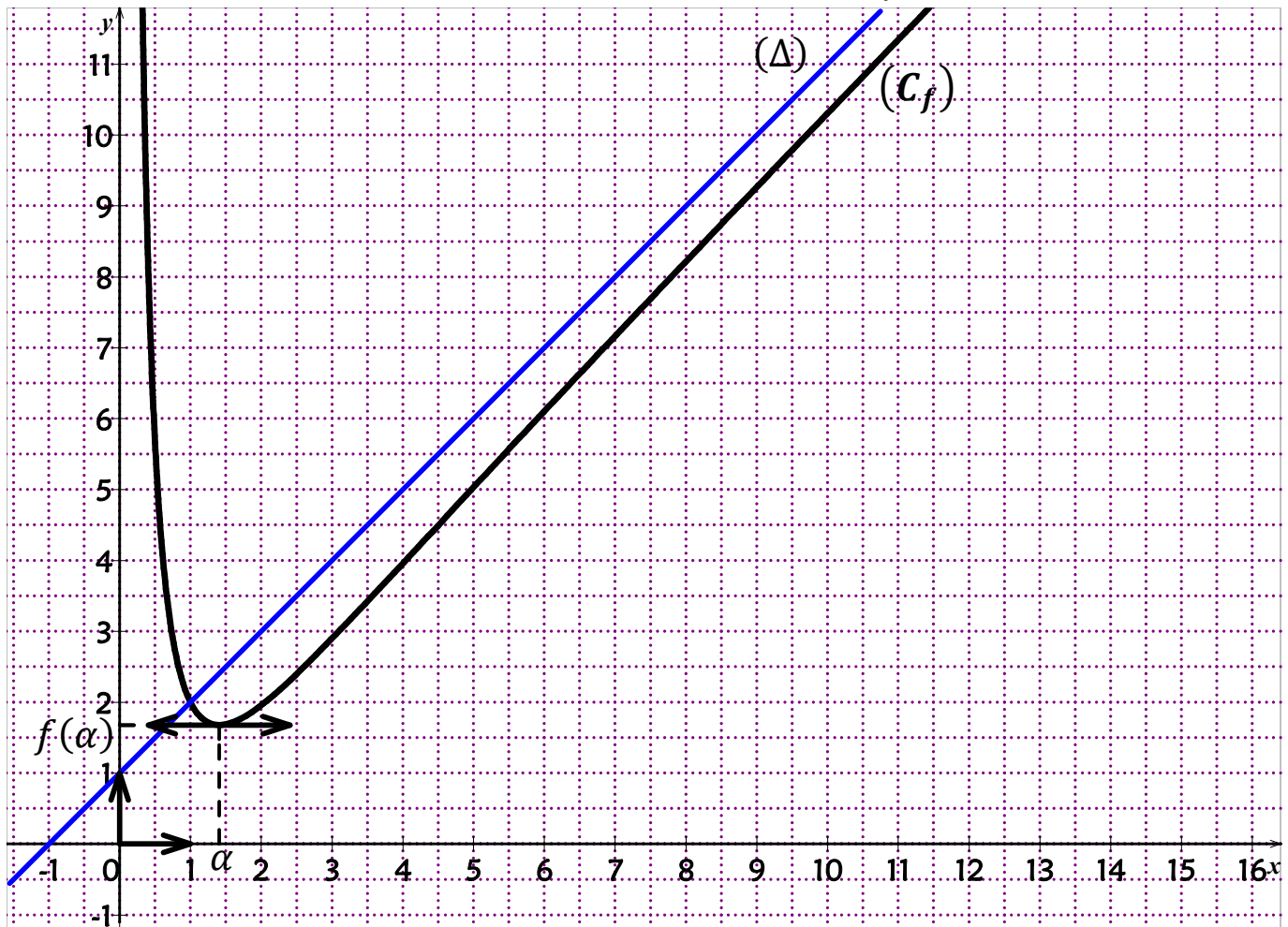
(ب) دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : (ندرس إشارة الفرق $f(x) - y$)

لدينا: $f(x) - y = \frac{3(-\ln x)}{x}$

ومنه: إشارة الفرق $[f(x) - y]$ من إشارة $(-\ln x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$		-	+
$f(x) - y$		+	-
الوضع النسبي	(C_f) يقع فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ)	(C_f) يقع تحت (Δ)

(5) إنشاء المستقيم (Δ) والمنحنى (C_f) : (علما أن $f(\alpha) \simeq 1,68$)



(6) (أ) تبين أن الدالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدالة $\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$:

$h'(x) = \frac{1}{3}(2) \left(\frac{1}{x}\right) (\ln x) = \frac{\ln x}{x}$ ولدينا: $]0; +\infty[$ ،

إذن: الدالة h حيث $h(x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2$ أصلية للدالة $\frac{\ln x}{x}$ على المجال $]0; +\infty[$.

(ب) حساب S مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $x = e$ ، $x = 1$

و $y = x + 1$:

لتكن مساحة الحيز هي A نجد: $A = \int_1^e [y - f(x)] dx = 3 \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = 3[h(x)]_1^e = \frac{3}{2}ua$

التمرين 13: (08 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشّعبة: تسيير وإقتصاد.

لدينا: $f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$ و $D_f =]-2; 8[$ و (C_f) منحنى الدّالة f في المستوى المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
ملاحظة: الوحدة البيانية: $2cm$.

(1) حساب نهايتي الدّالة f عند طرفي مجموعة التعريف $]-2; 8[$:

- لدينا: $\lim_{x \rightarrow -2^+} f(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow -2^+} \ln(x+2) = \lim_{y \rightarrow 0^+} \ln y = -\infty$.
- ولدينا: $\lim_{x \rightarrow 8^-} f(x) = -\infty$ ، لأن: $\lim_{x \rightarrow 8^-} \ln(-x+8) = \lim_{y \rightarrow 0^-} \ln y = -\infty$.

تفسير النتيجةين بيانيا:

المستقيمان اللذان معادلاتهما $x = -2$ و $x = 8$ على الترتيب (الموازيان لحامل محور الترتيب) مستقيمان مقاربان لـ (C_f) .

(2) التحقق أنّه من أجل كلّ x من $]-2; 8[$ ، $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$ ،

f قابلة للاشتقاق على $]-2; 8[$ ، ولدينا:

$$f'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{-1}{-x+8} = \frac{1(-x+8) - 1(x+2)}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-x+8-x-2}{(x+2)(-x+8)} = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$

(3) دراسة إشارة $f'(x)$ على المجال $]-2; 8[$ وتشكيل جدول تغيّرات الدّالة f :

لدينا: $f'(x) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$ ، ومنه: إشارة $f'(x)$ من إشارة البسط $(-2x+6)$

(لأن: $x+2 > 0$ و $-x+8 > 0$ على المجال $]-2; 8[$) ما بعد $\ln$ موجب تماما تذكروا

نضع: $-2x+6 = 0$ نجد: $x = 3$ ومنه:

x	-2	3	8
$-2x+6$	+	○	-
$f'(x)$	+	○	-

إذن: f متزايدة تماما على $]-2; 3[$ ؛ ومتناقصة تماما على $]3; 8[$.

ويكون جدول تغيّراتها كالتالي:

x	-2	3	8
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$		$2 \ln \frac{5}{4}$	

$-\infty \swarrow \quad \searrow \quad -\infty$

(4) تعيين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات:

• تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الترتيب: (نحسب $f(0)$)

$$f(0) = \ln 2 + \ln 8 - \ln 16 = \ln 2 + 3 \ln 2 - 4 \ln 2 = 0$$

إذن: $(C_f) \cap (yy') = \{O(0; 0)\}$.

• تقاطع المنحنى (C_f) مع حامل محور الفواصل: (نحل المعادلة $f(x) = 0$ في المجال $]-2; 8[$)

$$f(x) = 0 \text{ معناه: } \ln(x+2) + \ln(-x+8) = \ln 16$$

$$\ln(x+2)(-x+8) = \ln 16 \text{ ومنه:}$$

$$(x+2)(-x+8) = 16 \text{ وعليه:}$$

$$x(-x+6) = 0 \text{ ويكون:}$$

$$\text{وبالتالي: } x=0 \text{ و } x=6, \text{ إذن: } (C_f) \cap (xx') = \{O(0;0); A(6;0)\}$$

(5) تبيان أنه من أجل كل x من المجال $]-2; 8[$ ، $(6-x)$ ينتمي إلى $]-2; 8[$ و $f(6-x) = f(x)$ لدينا: $x \in]-2; 8[$ أي: $-2 < x < 8$

$$\text{ومنه: } -8 < -x < 2 \text{ وعليه: } -2 < 6-x < 8 \text{ أي: } (6-x) \in]-2; 8[$$

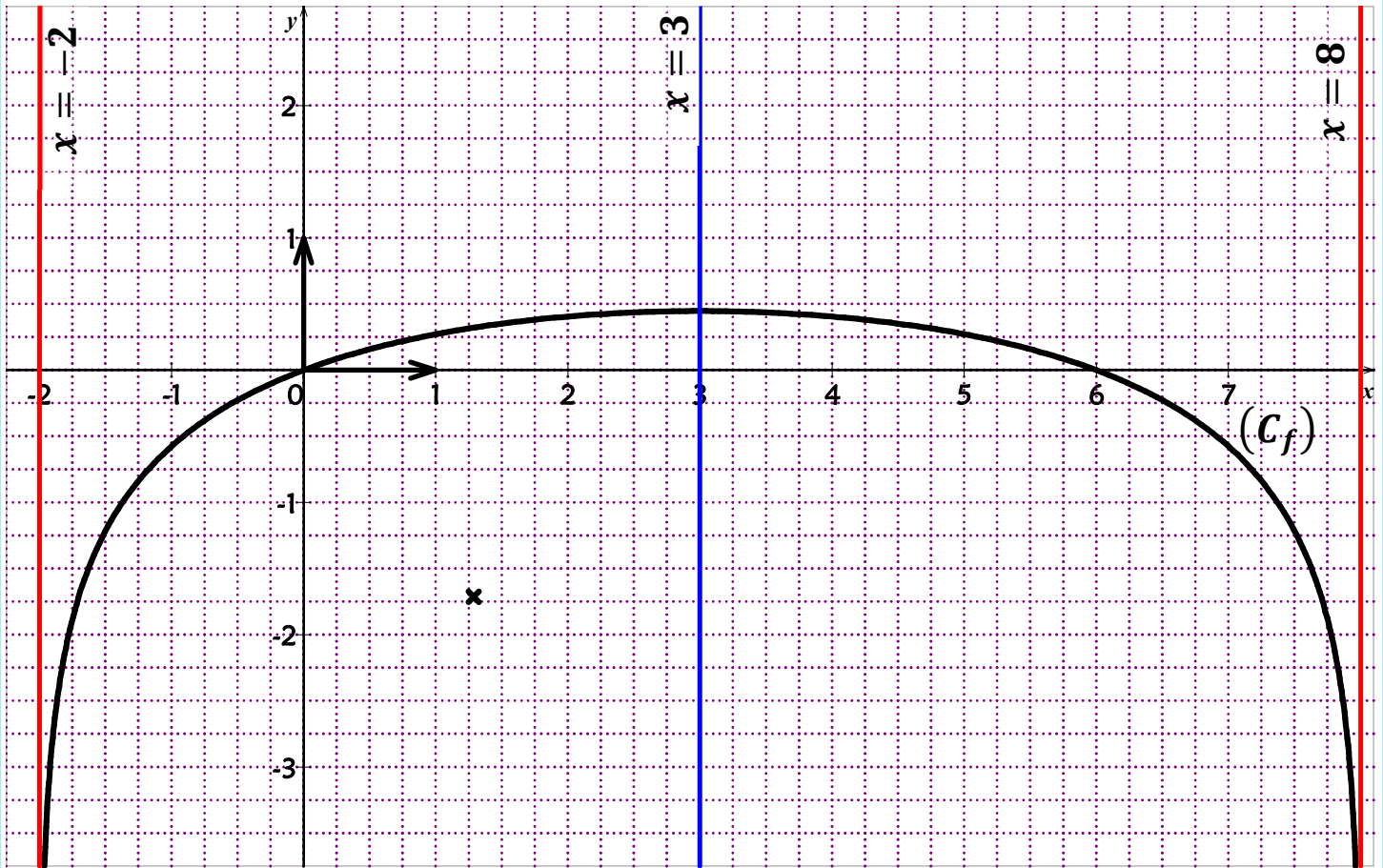
$$\text{ولدينا: } f(6-x) = \ln[(6-x)+2] + \ln[-(6-x)+8] - \ln 16$$

$$\text{ومنه: } f(6-x) = \ln(-x+8) + \ln(x+2) - \ln 16 = f(x)$$

تفسير النتيجة بياناً:

لدينا: $f(6-x) = f(x)$ أي: $f(6-x) - f(x) = 0$ من الشكل $f(2\alpha - x) - f(x) = 0$ حيث $\alpha = 3$ ، إذن: المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو محور تناظر لـ (C_f) .

(6) رسم المنحنى (C_f) :



(7) لدينا: $F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - x\ln 16$ و $D_F =]-2; 8[$ تبيان أن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2; 8[$:

F قابلة للاشتقاق على $]-2; 8[$ ، ولدينا:

$$F'(x) = \left[1 \times \ln(x+2) + \frac{1}{x+2} \times (x+2) \right] + \left[1 \times \ln(-x+8) + \frac{(-1)}{-x+8} \times (x-8) \right] - 2 - \ln 16$$

$$\text{ومنه: } F'(x) = \ln(x+2) + 1 + \ln(-x+8) + 1 - 2 - \ln 16 = f(x)$$

وبالتالي: F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2; 8[$.

(8) حساب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها $y = 0$ ،

$$x = 0 \text{ و } x = 4:$$

لتكن مساحة الحيز هي A ومنه:

$$A = \int_0^4 f(x) dx \times 4cm^2 = [F(x)]_0^4 \times 4cm^2 = [F(4) - F(0)] \times 4cm^2$$

$$\text{ويكون: } A = 4(6 \ln 6 - 2 \ln 2 - 8)cm^2$$