

العُبْرِي في الرياضيات

المنشآت العددية

الثالثة ثانوي

- الشعب: آداب وفلسفة؛
- آداب ولغات أجنبية.

جمع وإعداد الأستاذ: بوعزة مصطفى.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية) الملخص // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

ملخص: حول المتتاليات العددية // التحضير الجيد بكالوريا // الشعبة: آوف؛ لغ أ.

1 دراسة اتجاه تغير متتالية (u_n) :

ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

- في حالة $u_{n+1} - u_n > 0$ ، فإن: (u_n) متزايدة تماماً.
- في حالة $u_{n+1} - u_n < 0$ ، فإن: (u_n) متناقصة تماماً.
- في حالة $u_{n+1} - u_n = 0$ ، فإن: (u_n) ثابتة.

2 المتتالية الحسابية:

1 طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) حسابية:

يكفي أن نثبت أن: ① الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت أي: $u_{n+1} - u_n = r$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $u_{n+1} = u_n + r$.

حيث: r عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

2 عبارة الحد العام لمنثالية حسابية: (u_n) بدلالة n ؛ u_n يسمى الحد العام.

① بصفة عامة $u_n = u_p + (n - p)r$ ، علاقة تربط بين حدين مختلفين.

② $u_n = u_0 + nr$ ، في حالة u_0 هو الحد الأول.

③ $u_n = u_1 + (n - 1)r$ ، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة: ① هذه العلاقات يمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

② تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) حسابية ومعرفة بحدين مختلفين وبإستعمال العلاقة نقوم

بحساب الأساس نجد: $r = \frac{u_n - u_p}{n - p}$.

3 مجموع حدود منثالية من منثالية حسابية:

بصفة عامة: $\frac{(\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول})}{2} (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}$.

حيث: 1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

4 خاصية الوسط الحسابي:

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان $a + c = 2b$

أو $b = \frac{a+c}{2}$.

3 المتتالية الهندسية:

1) طريقة إثبات أن المتتالية (u_n) هندسية:

يكفي أن نُثبت أن: ① الحصول $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت أي: $\frac{u_{n+1}}{u_n} = q$.

② أو نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد: $u_{n+1} = qu_n$.

حيث: q عدد حقيقي، يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

2) عبارة الحد العام لمنثالية حسابية: (u_n) بدلالة n ؛ u_n يسمى الحد العام.

① بصفة عامة $u_n = u_p \times q^{n-p}$ ، علاقة تربط بين حدين مختلفين.

② $u_n = u_0 \times q^n$ ، في حالة u_0 هو الحد الأول.

③ $u_n = u_1 \times q^{n-1}$ ، في حالة u_1 هو الحد الأول.

ملاحظة: ① هذه العلاقات يُمكن إستعمالها في حالات أخرى، وذلك بتعويض u_n بأي حد مُعطى في التمرين.

② تُستعمل العلاقة ①، إذا كانت (u_n) هندسية ومعرفة بحدين مختلفين وبإستعمال العلاقة نقوم

بحساب الأساس نجد: $q^{n-p} = \frac{u_n}{u_p}$.

3) مجموع حدود منثالية من منثالية هندسية:

بصفة عامة: $\left(\frac{1-q^{\text{عدد الحدود}}}{1-q} \right) (\text{الحد الأول}) = \text{المجموع}$.

حيث: 1 + دليل الحد الأول - دليل الحد الأخير = عدد الحدود.

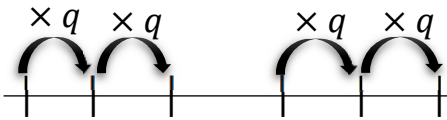
4) خاصية الوسط الهندسي:

تكون الأعداد الحقيقية a ، b و c بهذا الترتيب حدوداً متتابعة من متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان $a \times c = b^2$.

المتتالية (u_n)

هندسية

حسابية



$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$



$u_0 \quad u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{n-1} \quad u_n \quad u_{n+1}$

حيث q عدد حقيقي $u_{n+1} = qu_n$
 q يسمى أساس المتتالية الهندسية (u_n) .

حيث r عدد حقيقي $u_{n+1} = u_n + r$
 r يسمى أساس المتتالية الحسابية (u_n) .

**كيف نبين
أن**

الطريقة 01:

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = qu_n$

الطريقة 01:

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت (الأساس)

الطريقة 02:

نكتب u_{n+1} بدلالة u_n نجد:
 $u_{n+1} = u_n + r$

**عبارة الحد
العام للمتتالية
 (u_n)**

كتابة u_n بدلالة n

هذه العلاقات يُمكن
استعمالها وذلك
بتعويض u_n بأي حد
مُعطى

إذا أعطى u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n$$

إذا أعطى u_1 :

$$u_n = u_1 \times q^{n-1}$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p \times q^{n-p}$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية
هندسية.

إذا أعطى u_0 :

$$u_n = u_0 + nr$$

إذا أعطى u_1 :

$$u_n = u_1 + (n-1)r$$

من أجل عددين طبيعيين n و p :

$$u_n = u_p + (n-p)r$$

علاقة تربط بين حدين مختلفين في متتالية
حسابية.

بصفة عامة:

$$\left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right) \text{ الحد الأول} = \text{المجموع}$$

**مجموع حدود
متتابعة من
متتالية**

بصفة عامة:

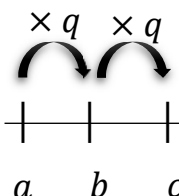
$$\left(\frac{\text{الحد الأخير} + \text{الحد الأول}}{2} \right) (\text{عدد الحدود}) = \text{المجموع}$$

$$1 + \text{دليل الحد الأول} - \text{دليل الحد الأخير} = \text{عدد الحدود}$$

الوسط الهندسي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابعة من
متتالية هندسية إذا وفقط إذا كان

$$a \times c = b^2$$



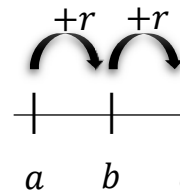
$$\begin{cases} a = \frac{b}{q} \\ c = bq \end{cases}$$

خاصية الوسط

الوسط الحسابي:

تكون a , b و c ثلاث حدود متتابعة من
متتالية حسابية إذا وفقط إذا كان

$$a + c = 2b$$



$$\begin{cases} a = b - r \\ c = b + r \end{cases}$$

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية - بكالوريا جزائرية)
التمارين // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ احسب u_0, u_1, u_2 .

2/ بين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها. عيّن اتجاه تغيّر (u_n) .

3/ تحقق أن العدد 2008 حدّ من حدود المتتالية (u_n) . ما رتبته؟

4/ احسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$.

التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرفة بحدّها الأول $u_1 = 7$ ومن أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

1/ احسب u_2, u_3, u_4 .

2/ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، نُعرف المتتالية (v_n) كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أ- أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدّها الأول v_1 .

ب- اكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم استنتج u_n بدلالة n .

ج- نضع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ ، احسب S_n بدلالة n .

د- عيّن n علماً أن $S_n = 1016$.

التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$.

1/ أ- احسب الأساس r للمتتالية (u_n) .

ب- احسب الحد العاشر.

2/ اكتب عبارة u_n بدلالة n .

3/ بين أن العدد (-2008) هو حدّاً من حدود (u_n) . محدّدًا رتبته.

4/ احسب المجموع: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$.

التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب.

1- عيّن أساس هذه المتتالية وحدّها الأول u_0 إذا علمت أن: $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$.

2- تحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n = 18 \times 2^n$.

3- احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ ، ثم استنتج قيمة العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 1134$.

التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحددين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1- عيّن أساسها وحدّها الأول u_0 .

2- اكتب u_n بدلالة n .

3- بين أن 6028 حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

4- أحسب المجموع $S: S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$.

(II) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n = 2 \times 8^n$.

1- بين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_0 .

2- أحسب بدلالة n المجموع $S': S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$.

التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدّها الأول u_0 حيث:

$$u_1 = 6 \text{ و } u_4 = 48.$$

1. أ- أحسب الأساس والحدّ الأول للمتتالية (u_n) .

ب- استنتج أن عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$.

2. أ- علماً أن $2^8 = 256$ ؛ بين أن العدد 768 هو حدّ من حدود المتتالية (u_n) .

ب- أحسب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$.

3. (v_n) متتالية عددية معرفة بـ: $v_0 = 4$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $v_{n+1} = 2v_n - 1$.

أ- أحسب: v_1, v_2, v_3 .

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = 3 \times 2^n + 1$.

ج- أحسب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$.

التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(أ) (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$.

1. احسب u_0 ، ثم اكتب الحد العام u_n بدلالة n .

2. احسب المجموع: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

(ب) (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $v_n = 1 - 5n$.

1. بين أن (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها ثم استنتج اتجاه تغييرها.

2. احسب المجموع: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$.

(ج) نعتبر المتتالية (k_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام: $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

-تحقق أن: $k_n = u_n + v_n$ ثم احسب المجموع: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$.

التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المرفقتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام: $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$.

عين في كلّ حالة من الحالات الخمس في الجدول أدناه الاقتراح الصحيح من بين الاقتراحات الثلاث مع التعليل.

1	اقتراح 1	اقتراح 2	اقتراح 3
1	(u_n) هي متتالية	هندسية	حسابية
2	الحد الخامس والأربعون للمتتالية (u_n) يساوي	-90	-92
3	المجموع $u_0 + u_1 + \dots + u_n$ يساوي	$n^2 + 1$	$-n^2 - 1$
4	(v_n) متتالية هندسية أساسها	$\frac{1}{9}$	9
5	المتتالية (v_n)	متزايدة	متناقصة

التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.
1. (أ) احسب b ثم اكتب a و c بدلالة r .
(ب) علماً أن: $a \times c = -16$
- عيّن الأساس r ثم استنتج a و c .
 2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.
(أ) عبّر عن الحدّ العام u_n بدلالة n .
(ب) احسب u_{15} ثم استنتج المجموع: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$.
 3. (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$
- احسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$.

التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدها الأول u_1 و $u_3 = 7$.
1. (أ) احسب بدلالة r الجداين: $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$.
(ب) عيّن الأساس r بحيث: $T_2 - T_1 = 27$.
 2. نضع $r = 3$.
(أ) اكتب عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n .
(ب) نضع من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
بيّن أن: $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$.
 3. (ج) جد العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 145$.
(أ) اكتب الحدّ u_{n+5} بدلالة n .
(ب) تحقّق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$.
(ج) استنتج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً.

التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (v_n) متتالية هندسية حدها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.
- 1- (أ) عبّر عن v_n بدلالة n .
(ب) احسب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .
 - 2- نضع، من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.
(أ) احسب بدلالة n المجموع S_n .
(ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n بحيث: $S_n = 80$.
(ج) أثبت بالتراجع أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

- (u_n) متتالية حسابية حدها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.
- 1- احسب u_0 .
 - 2- بيّن أنّه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$.

3- عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$.

4- أحسب المجموع: $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$.

5- المتتالية العددية (v_n) معرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 1$.

(أ) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (v_n) .

(ب) أحسب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$.

التمرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عيّن الاقتراح الصّحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة، في كلّ حالة من الحالات الأربعة الآتية، مع التّعليل:

(1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدّها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

(أ) $u_n = 1 + 3n$ (ب) $u_n = 7 + 3n$ (ج) $u_n = -5 + 3n$

(2) n عدد طبيعي. المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ يساوي:

(أ) $\frac{n^2+n}{2}$ (ب) $\frac{n(n-1)}{2}$ (ج) $\frac{n^2+1}{2}$

(3) x عدد حقيقي. تكون الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية إذا كان:

(أ) $x = 3$ (ب) $x = 5$ (ج) $x = -2$

(4) (v_n) متتالية هندسية معرّفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$. أساس المتتالية (v_n) هو:

(أ) 2 (ب) 3 (ج) 6

التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(v_n) المتتالية العددية المعرّفة بما يلي: $v_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_{n+1} = 5v_n + 4$.

(1) احسب: v_1 ، v_2 و v_3 .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_n = v_n + 1$.

أ- بيّن أنّ (u_n) متتالية هندسية أساسها $q = 5$ وحدّها الأول $u_0 = 2$.

ب- اكتب u_n بدلالة n واستنتج v_n بدلالة n .

ج- حلّ العدد 1250 إلى جداء عوامل أوليّة واستنتج أنّه حد من حدود المتتالية (u_n) .

(3) أ- احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$.

ب- احسب بدلالة n المجموع S'_n حيث: $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$.

التمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية الهندسية التي حدّها الأوّل u_0 وأساسها q حيث: $u_0 = 2$ و $q = 3$.

(1) احسب u_1 و u_2 .

(2) اكتب u_n بدلالة n ؛ ثمّ استنتج u_5 .

(3) عيّن اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(4) أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$.

(ب) استنتج قيمة المجموع: $2 + 6 + 18 + \dots + 486$.

(5) أ) عيّن باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد 3، 3^2 ، 3^3 و 3^4 .

(ب) استنتج أنّه لكل k من $\mathbb{N}$ ؛ $3^{4k} \equiv 1 [5]$.

(6) عيّن الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلا للقسمة على 5.

التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث: $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

(أ) بيّن أنّ: $u_1 + u_3 = 1$.

(ب) عيّن الحدّ الأول u_1 ؛ ثمّ استنتج أنّ $r = -\frac{5}{2}$.

(2) اكتب u_n بدلالة n .

(3) (أ) احسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(ب) عيّن قيمة العدد الطبيعي n التي يكون من أجلها $S_n = -\frac{657}{2}$.

(4) n عدد طبيعي غير معدوم، نضع: $T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$.

(أ) تحقّق أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ $(n+2)(9-5n) = -5n^2 - n + 18$.

(ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، أثبت أنّه لكل n من $\mathbb{N}^*$ $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

التمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

لتكن (u_n) متتالية عددية معرّفة من أجلّ عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

(1) احسب u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 .

(2) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية وعيّن أساسها.

(3) ادرس اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .

(4) بيّن أنّ العدد 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.

(5) (أ) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

(ب) عيّن العدد n بحيث يكون: $S_n = 328$.

التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) التي أساسها 3 وحدّها الأول u_0 وثقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

(1) احسب الحدّ الأول u_0 .

(2) اكتب الحدّ العام u_n بدلالة n .

(3) عيّن العدد الطبيعي n بحيث: $u_n = 145$.

(4) احسب المجموع S بحيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$.

(5) نعتبر المتتالية (v_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$.

احسب المجموع S' بحيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$.

التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

(u_n) المتتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرّفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$.

(1) بيّن أنّ أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدّها الأول هو 5.

(2) اكتب عبارة الحدّ العام للمتتالية (u_n) بدلالة n ثمّ استنتج قيمة حدّها السابع.

(3) (أ) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(ب) استنتج قيمة المجموع S' حيث $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$.

التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د01 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

(u_n) متتالية حسابية معرفّة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$.
(1) عيّن الأساس r للمتتالية (u_n).

(2) بيّن أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$.

(3) اثبت أنّ العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n)، ما هي رتبته؟

(4) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

نعتبر المتتالية الحسابية (u_n) المعرفّة على $\mathbb{N}$ بحدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) احسب الحد u_4 علما أنّ: $u_3 + u_5 = 20$.

(2) احسب الحد u_5 علما أنّ: $2u_4 - u_5 = 7$.

(3) استنتج قيمة r واحسب u_0 .

(4) تحقّق أنّ: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3n - 2$.

(5) احسب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

(6) جد العدد الطبيعي n حيث: $S_n = 33$.

التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د02 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغ

في كل حالة من الحالات الأربع الآتية اقترح ثلاث إجابات، واحدة فقط منها صحيحة، يُطلب تحديدها مع التعليل.

(1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3 - وحدّها الأول 1 هو:

(أ) -17 (ب) -14 (ج) -11

(2) مجموع 100 حدّ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو:

(أ) $\frac{3^{101}-1}{2}$ (ب) $\frac{1-3^{100}}{2}$ (ج) $\frac{3^{100}-1}{2}$

(3) نضع من أجل كل عدد حقيقي x : $a = 2x + 2$ ، $b = 6x - 3$ ، $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a ، b ، c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون:

(أ) $x = \frac{4}{3}$ (ب) $x = 0$ (ج) $x = \frac{3}{4}$

(4) المتتالية العددية (u_n) المعرفّة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية:

(أ) حسابية أساسها 1 (ب) هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ (ج) لا حسابية ولا هندسية.

التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة من الحالات التالية، مع التبرير:

(1) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = n^2 - 1$

(أ) متزايدة تماما (ب) متناقصة تماما (ج) ليست رتيبة.

(2) (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_1 = 3$ وأساسها $q = 2$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي:

(أ) $v_n = 3 \times 2^n$ (ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ (ج) $v_n = 2 \times 3^n$

المجموع $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$ يُساوي:

(أ) $3(2^n - 1)$ (ب) $(2^n - 1)$ (ج) $6^2(3^n - 1)$

التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماماً، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

- (1) بيّن أنّ $u_1 = 24$ ، ثم استنتج قيمة u_0 .
- (2) بيّن أنّ $q = 4$ ، ثم اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (3) أثبت أنّه من أجل كل عدد طبيعي $n: 18 \times 4^n = u_{n+1} - u_n$ ، ثم استنتج اتجاه تغيّر المتتالية (u_n) .
- (4) احسب 4^4 ، ثم تحقّق أنّ العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وعيّن رتبته.
- (5) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$.

التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) متتالية عددية معرّفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$.

- (1) بيّن أنّ المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1 .
- (2) عيّن رتبة الحد الذي قيمته 575.
- (3) احسب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$.
- (4) (v_n) المتتالية المعرّفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$.
- (أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 .
- (ب) احسب بدلالة n المجموع: $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

التمرين 06: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أ.

(u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .

- (1) علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، عيّن u_1 .
- (2) علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، عيّن الحد الأول u_0 ، ثم استنتج قيمة r أساس المتتالية (u_n) .
- (3) اكتب عبارة الحد العام u_n بدلالة n .
- (4) عيّن قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$.
- (ب) أحسب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) .
- (5) أحسب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$.
- (6) عيّن العدد الطبيعي n حتى يكون: $S_n = 96$.

مجلة العبقري في الرياضيات (المتتاليات العددية - بكالوريا جزائرية)
الحلول // الشعبة: آداب وفلسفة؛ لغات أجنبية.

حل التمرين 01: (05 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 01 // الشعبة: آ ف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي: $u_n = 3n + 1$.

1/ حساب u_0, u_1, u_2 :

$$u_0 = 3(0) + 1 = 0 + 1 = 1$$

$$u_1 = 3(1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

$$u_2 = 3(2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

2/ تبين أن (u_n) حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت)

$$u_{n+1} = 3(n+1) + 1 = 3n + 3 + 1 = 3n + 4 \text{ ومنه: } u_n = 3n + 1$$

$$u_{n+1} - u_n = (3n + 4) - (3n + 1) = 3n + 4 - 3n - 1 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية أساسها 3.

تعيين اتجاه تغير (u_n) :

بما أن: (u_n) حسابية أساسها موجب تماما ($3 > 0$)، فإنها: متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

3/ التحقق أن العدد 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$u_n = 2008 \text{ نجد: } 3n + 1 = 2008$$

$$\text{ومنه: } 3n = 2008 - 1 \text{ أي: } n = \frac{2007}{3} = 669 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{669} = 2008 \text{)}$$

إذن: 2008 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: $669 + 1 = 670$ لأن الحد الأول هو u_0 .

4/ حساب المجموع $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{669}$:

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{669} = (669 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{669}}{2} \right) = 670 \left(\frac{1 + 2008}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = 670 \left(\frac{2009}{2} \right) = 670(1004,5) = 673015$$

حل التمرين 02: (06 نقاط) بكالوريا 2008 // الموضوع 02 // الشعبة: آ ف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} u_1 = 7 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$

1/ حساب u_2, u_3, u_4 :

$$u_2 = 2u_1 + 1 = 2(7) + 1 = 15$$

$$u_3 = 2u_2 + 1 = 2(15) + 1 = 31$$

$$u_4 = 2u_3 + 1 = 2(31) + 1 = 63$$

2/ (v_n) متتالية معرفة كما يأتي: $v_n = u_n + 1$.

أثبت أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها q وحدها الأول v_1 :

ط (01) نُبين أن الحاصل $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت.

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 1 \text{ ومنه: } v_{n+1} = u_{n+1} + 1 = (2u_n + 1) + 1 = 2u_n + 2 = 2(u_n + 1)$$

$$\text{وعليه: } \boxed{\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2(u_{n+1})}{u_{n+1}} = 2}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدّها الأول $v_1 = u_1 + 1 = 7 + 1 = 8$

ب-كتابة عبارة الحد العام v_n بدلالة n :

بمأن: (v_n) متتالية هندسية أساسها 2 وحدّها الأول $v_1 = 8$ ، فإن: $v_n = v_1 \times q^{n-1}$

$$\text{بالتعويض نجد: } \boxed{v_n = 8 \times 2^{n-1}}$$

استنتاج u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } v_n = u_n + 1 \text{ ومنه: } \boxed{u_n = v_n - 1 = 8 \times 2^{n-1} - 1}$$

ج-حساب S_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 8 \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = \frac{8}{-1} (1 - 2^{n+1})$$

$$\text{إذن: } \boxed{S_n = 8(2^n - 1)}$$

د-تعيين n علماً أنّ $S_n = 1016$:

$$8(2^n - 1) = 1016 \text{ معناه: } S_n = 1016$$

$$\text{ومنه: } 2^n - 1 = \frac{1016}{8}$$

$$\text{أي: } 2^n - 1 = 127$$

$$\text{وعليه: } 2^n = 128 = 2^7 \text{ (لأن } 128 = 2^7 \text{)}$$

$$\text{إذن: } \boxed{n = 7} \text{ (} S_7 = 1016 \text{)}$$

حل التمرين 03: (06 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفّة على $\mathbb{N}^*$ بحدّها الأول $u_1 = 2$ وبالعلاقة $u_2 - 2u_5 = 19$

(1) أحساب الأساس r للمتتالية (u_n) : (نكتب كل من u_2 و u_5 بدلالة الحد الأول u_1 المعطى)

$$\begin{cases} u_2 = u_1 + (2 - 1)r = 2 + r \\ u_5 = u_1 + (5 - 1)r = 2 + 4r \end{cases} \text{ نجد: } \boxed{u_n = u_1 + (n - 1)r}$$

$$\text{العلاقة } u_2 - 2u_5 = 19 \text{ تُصبح: } (2 + r) - 2(2 + 4r) = 19$$

$$\text{ومنه: } 2 + r - 4 - 8r = 19$$

$$\text{وعليه: } -7r = 21 \text{ إذن: } \boxed{r = \frac{21}{-7} = -3}$$

ب-حساب الحد العاشر:

بمأنّ الحد الأوّل هو u_1 ، إذن الحد العاشر هو

$$u_{10} = u_1 + (10 - 1)r = u_1 + 9r = 2 + 9(-3) = 2 - 27 = -25$$

(2) كتابة عبارة u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } \boxed{u_n = u_1 + (n - 1)r} \text{ ومنه: } u_n = 2 + (n - 1)(-3) \text{ إذن: } \boxed{u_n = -3n + 5}$$

(3) تبين أنّ العدد (-2008) هو حداً من حدود (u_n) :

$$\text{نضع: } \boxed{u_n = -2008} \text{ نجد: } -3n + 5 = -2008$$

$$\text{ومنه: } -3n = -2008 - 5$$

$$\text{أي: } n = \frac{-2013}{-3} = 671 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{671} = -2008 \text{)}$$

إذن: (2008-) حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 671 لأن الحد الأول هو u_1 .

4) حساب المجموع، $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671}$:

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_{671} = (671 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{671}}{2} \right) = 671 \left(\frac{2 + (-2008)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = 671 \left(\frac{-2006}{2} \right) = 671(-1003) = -673013.$$

حل التمرين 04: (07 نقاط) بكالوريا 2009 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ وأساسها موجب ($q > 0$)

1- تعيين أساس المتتالية (u_n) وحدّها الأول u_0 علماً أنّ، $u_3 = 144$ و $u_5 = 576$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ ومنه: } u_5 = u_3 \times q^{5-3}$$

$$576 = 144 \times q^2 \text{ وعليه:}$$

$$q^2 = \frac{576}{144} = 4 \text{ ومنه:}$$

$$\text{أي: } q = \sqrt{4} = 2 > 0 \text{ (مقبول) أو } q = -\sqrt{4} = -2 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{إذن: } \boxed{q = 2}$$

تعيين الحد الأول u_0 :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_3 = u_0 \times q^3 \text{ إذن: } \boxed{u_0 = \frac{u_3}{q^3} = \frac{144}{2^3} = \frac{144}{8} = 18}$$

$$\text{أو: } u_5 = u_0 \times q^5 \text{ نجد: } \boxed{u_0 = \frac{u_5}{q^5} = \frac{576}{2^5} = \frac{576}{32} = 18}$$

2- التحقق أنّه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 18 \times 2^n$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } \boxed{u_n = 18 \times 2^n}$$

3- حساب بدلالة n المجموع، $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 18 \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = \frac{18}{-1} (1 - 2^{n+1})$$

$$\text{ومنه: } S_n = -18(1 - 2^{n+1}) = 18(2^{n+1} - 1)$$

استنتاج قيمة العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 1134$:

$$18(2^{n+1} - 1) = 1134 \text{ معناه: } \boxed{2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}}$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} - 1 = \frac{1134}{18}$$

$$\text{أي: } 2^{n+1} - 1 = 63$$

$$\text{ومنه: } 2^{n+1} = 64 = 2^6$$

$$\text{وعليه: } n + 1 = 6 \text{، إذن: } \boxed{n = 5} \text{ (} S_5 = 1134 \text{)}$$

حل التمرين 05: (05 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بالحددين: $u_{10} = 31$ و $u_{15} = 46$.

1- تعيين أساس المتتالية (u_n) :

$$\text{لدينا: } u_n = u_p + (n - p)r \text{، ومنه: } u_{15} = u_{10} + (15 - 10)r$$

$$\text{وعليه: } 46 = 31 + 5r \text{ وبالتالي: } 5r = 46 - 31 \text{ إذن: } \boxed{r = \frac{15}{5} = 3}$$

$$r = \frac{u_n - u_p}{n - p} = \frac{u_{15} - u_{10}}{15 - 10} = \frac{46 - 31}{5} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{الطريقة 02:}$$

تعيين الحد الأول u_0 :

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{لدينا:} \quad u_{10} = u_0 + 10r \quad \text{ومنه:}$$

$$u_0 = u_{10} - 10r = 31 - 10(3) = 31 - 30 = 1 \quad \text{وعليه:}$$

$$u_{15} = u_0 + 15r \quad \text{ومنه:} \quad u_n = u_0 + nr \quad \text{أو}$$

$$u_0 = u_{15} - 15r = 46 - 15(3) = 46 - 45 = 1 \quad \text{وعليه:}$$

2- كتابة u_n بدلالة n : (عبارة الحد العام)

$$u_n = u_0 + nr \quad \text{لدينا:} \quad u_n = 1 + 3n \quad \text{إذن:}$$

3- تبين أن 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$6028 = 1 + 3n \quad \text{نضع:} \quad u_n = 6028 \quad \text{نجد:}$$

$$6027 = 3n \quad \text{ومنه:} \quad 6027 = 3n \quad \text{وبالتالي:} \quad n = \frac{6027}{3} = 2009 \in \mathbb{N} \quad (u_{2009} = 6028)$$

إذن: العدد 6028 حد من حدود المتتالية (u_n) .

4- حساب المجموع S , $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009}$:

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2009} = (2009 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2009}}{2} \right) = (2010) \left(\frac{1 + 6028}{2} \right) \quad \text{لدينا:}$$

$$S = (2010) \left(\frac{6029}{2} \right) = (2010)(3014,5) = 6059145 \quad \text{ومنه:}$$

(II) لدينا: (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ $v_n = 2 \times 8^n$:

1- تبين أن (v_n) متتالية هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدها الأول v_0 :

نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت:

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 8^{n+1}}{2 \times 8^n} = \frac{8^{n+1}}{8^n} = \frac{8^n \times 8^1}{8^n} = 8 \quad \text{لدينا:} \quad v_n = 2 \times 8^n \quad \text{ومنه:} \quad v_{n+1} = 2 \times 8^{n+1} \quad \text{وبالتالي:}$$

$$v_0 = 2 \times 8^0 = 2 \times 1 = 2 \quad \text{إذن:} \quad (v_n) \text{ هندسية، أساسها } q = 8 \text{ وحدها الأول } v_0 = 2$$

2- حساب بدلالة n المجموع S' , $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n$:

$$S' = v_0 + v_1 + \dots + v_n = v_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 2 \left(\frac{1 - 8^{n+1}}{1 - 8} \right) = \frac{2}{-7} (1 - 8^{n+1}) \quad \text{لدينا:}$$

$$S' = \frac{2}{7} (8^{n+1} - 1) \quad \text{ومنه:}$$

حل التمرين 06: (07 نقاط) بكالوريا 2010 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ ، أساسها q وحدها الأول u_0 حيث:

$$u_1 = 6 \quad \text{و} \quad u_4 = 48$$

1- أ- حساب الأساس والحد الأول للمتتالية (u_n) :

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \quad \text{ومنه:} \quad u_4 = u_1 \times q^{4-1}$$

$$48 = 6 \times q^3 \quad \text{ويكون:}$$

$$q^3 = \frac{48}{6} = 8 \quad \text{وعليه:} \quad q^3 = 8 \quad \text{وبما أن } 8 = 2^3 \text{ فإن } q^3 = 2^3 \quad \text{إذن:} \quad q = 2$$

حساب الحد الأول u_0 :

$$u_n = u_0 \times q^n \quad \text{ومنه:} \quad u_1 = u_0 \times q^1 \quad \text{ويكون:} \quad u_0 = \frac{u_1}{q^1} = \frac{6}{2} = 3$$

أ. $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_4 = u_0 \times q^4$ ويكون: $u_0 = \frac{u_4}{q^4} = \frac{48}{16} = 3$

ب- استنتاج أن عبارة الحد العام لـ (u_n) هي: $u_n = 3 \times 2^n$

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ، إذن: $u_n = 3 \times 2^n$

2. أ- علماً أن $2^8 = 256$ ؛ تبين أن العدد 768 هو حد من حدود المتتالية (u_n) :

نضع: $u_n = 768$ نجد: $3 \times 2^n = 768$

ومنه: $2^n = \frac{768}{3} = 256$

وعليه: $2^n = 2^8$ (لأن $2^8 = 256$)

وبالتالي: $n = 8 \in \mathbb{N}$ ، إذن: 768 حد من حدود المتتالية (u_n) .

ب- حساب المجموع S حيث: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7$

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_7 = u_0 \left(\frac{1 - q^{7-0+1}}{1 - q} \right) = 3 \left(\frac{1 - 2^8}{1 - 2} \right) = \frac{3}{-1} (1 - 256)$

ومنه: $S = -3(-255) = 765$

3. لدينا: (v_n) متتالية معرفة بـ: $\begin{cases} v_0 = 4 \\ v_{n+1} = 2v_n - 1 \end{cases}$

أ- حساب v_1, v_2, v_3 :

▪ $v_1 = 2v_0 - 1 = 2(4) - 1 = 7$

▪ $v_2 = 2v_1 - 1 = 2(7) - 1 = 13$

▪ $v_3 = 2v_2 - 1 = 2(13) - 1 = 25$

ب- البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 \times 2^n + 1$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: (من أجل $n = 0$)، لدينا: $v_0 = 3 \times 2^0 + 1 = 3(1) + 1 = 4$ إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $v_n = 3 \times 2^n + 1$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $v_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + 1$

البرهان: لدينا:

$$v_{n+1} = 2v_n - 1 = 2(3 \times 2^n + 1) - 1 = 2^1 \times 3 \times 2^n + 2 - 1 = 3 \times 2^{n+1} + 1$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، $v_n = 3 \times 2^n + 1$

ج- حساب المجموع S' حيث: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7$

نلاحظ أن: $v_n = 3 \times 2^n + 1 = u_n + 1$

ومنه: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_7 = (u_0 + 1) + (u_1 + 1) + \dots + (u_7 + 1)$

وعليه: $S' = (u_0 + u_1 + \dots + u_7) + 8 = S + 8 = 765 + 8 = 773$

حل التمرين 07: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

أ) لدينا: (u_n) متتالية هندسية أساسها 3 وحدّها الأول u_0 بحيث: $u_0 + u_3 = 28$

1. حساب u_0 :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ومنه: $u_3 = u_0 \times q^3 = u_0 \times 3^3 = 27u_0$
 العلاقة $u_0 + u_3 = 28$ تُصبح $u_0 + 27u_0 = 28$ ومنه: $28u_0 = 28$ إذن: $u_0 = 1$
 كتابة الحد العام u_n بدلالة n :

لدينا: $u_n = u_0 \times q^n$ ، إذن: $u_n = 3^n$.

2. حساب المجموع، $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9$

لدينا: $S_1 = u_0 + u_1 + \dots + u_9 = u_0 \left(\frac{1-q^{9-0+1}}{1-q} \right) = 1 \left(\frac{1-3^{10}}{1-3} \right) = 1 \left(\frac{1-3^{10}}{-2} \right)$

ومنه: $S_1 = \frac{1}{-2} (1 - 3^{10}) = \frac{1}{2} (3^{10} - 1) = \frac{1}{2} (59048) = 29524$

(ب) لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $v_n = 1 - 5n$.

1. تبيان أنّ (v_n) متتالية حسابية يُطلب تعيين أساسها: (نُبين أنّ الفرق $v_{n+1} - v_n$ عدد ثابت)

لدينا: $v_n = 1 - 5n$ ومنه: $v_{n+1} = 1 - 5(n+1) = 1 - 5n - 5 = -4 - 5n$

وعليه: $v_{n+1} - v_n = (-4 - 5n) - (1 - 5n) = -4 - 5n - 1 + 5n = -5$

أي: $v_{n+1} = v_n - 5$

إذن: (v_n) متتالية حسابية أساسها $r = -5$.

استنتاج اتجاه تغييرها:

بما أنّ (v_n) حسابية أساسها $(r = -5 < 0)$ سالبة تماماً فإنّها متناقصة تماماً على $\mathbb{N}$.

2. حساب المجموع، $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9$

لدينا: $S_2 = v_0 + v_1 + \dots + v_9 = (9 - 0 + 1) \left(\frac{v_0 + v_9}{2} \right) = 10 \left(\frac{1 - 44}{2} \right) = \frac{10}{2} (1 - 44)$

ومنه: $S_2 = 5(-43) = -215$

(ملاحظة: $v_9 = 1 - 5(9) = 1 - 45 = -44$)

(ج) لدينا: المتتالية (k_n) المعرّفة على $\mathbb{N}$ بحدّها العام، $k_n = 1 + 3^n - 5n$.

-التحقّق أنّ، $k_n = u_n + v_n$

لدينا: $\begin{cases} u_n = 3^n \\ v_n = 1 - 5n \end{cases}$ ، ومنه: $k_n = 1 + 3^n - 5n = 3^n + (1 - 5n) = u_n + v_n$

حساب المجموع، $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9$

لدينا: $k_n = u_n + v_n$

ومنه: $S = k_0 + k_1 + \dots + k_9 = (u_0 + v_0) + (u_1 + v_1) + \dots + (u_9 + v_9)$

وعليه: $S = (u_0 + u_1 + \dots + u_9) + (v_0 + v_1 + \dots + v_9) = S_1 + S_2$

إذن: $S = 29524 - 215 = 29309$

حل التمرين 08: (06 نقاط) بكالوريا 2011 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) و (v_n) متتاليتان عدديتان معرفتان على $\mathbb{N}$ بحدّيهما العام، $u_n = -2n$ و $v_n = 3^{-2n}$
 (نلاحظ أنّ $v_n = 3^{u_n}$)

تعيين الاقتراح الصحيح مع التعليل:

(1) لدينا: $u_n = -2n$ ومنه: $u_{n+1} = -2(n+1) = -2n - 2$

وعليه: $u_{n+1} - u_n = (-2n - 2) - (-2n) = -2n - 2 + 2n = -2$

إذن: (u_n) هي متتالية حسابية.

(2) بمأن (u_n) معرفة على $\mathbb{N}$ ، فحدها الأول هو u_0 ، وبالتالي: حدها الخامس والأربعون هو:

$$u_{44} = -2(44) = -88$$

(3) حسب السؤال (1) لدينا: متتالية حسابية،

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{0 + (-2n)}{2} \right)$$

$$u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n + 1) \left(\frac{-2n}{2} \right) = (n + 1)(-n) = -n^2 - n$$

(4) (v_n) متتالية هندسية أساسها: $q = \frac{v_{n+1}}{v_n}$ ،

$$v_{n+1} = 3^{-2(n+1)} = 3^{-2n-2} = 3^{-2n+(-2)} = 3^{-2n} \times 3^{-2} \text{ ومنه: } v_n = 3^{-2n}$$

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{3^{-2n} \times 3^{-2}}{3^{-2n}} = 3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$$

(5) المتتالية (v_n) متزايدة تماما، لأن:

$$v_{n+1} - v_n = (3^{-2n} \times 3^{-2}) - (3^{-2n}) = 3^{-2n}(3^{-2} - 1) = 3^{-2n} \left(\frac{1}{9} - 1 \right) = \frac{-8}{9} \times 3^{-2n} < 0$$

حل التمرين 09: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 01 // الشعبة: آ ف؛ لغ أ.

لدينا: a, b, c ثلاثة حدود متتابعة لمتتالية حسابية متزايدة أساسها r حيث: $a + b + c = 9$.

1.1 حساب b :

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $a + c = 2b$.

$$a + b + c = 9 \text{ تصبح } 2b + b = 9 \text{ ومنه: } 3b = 9 \text{ إذن: } b = 3$$

كتابة a و c بدلالة r :

$$\begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases} \text{ وبالتالي: } \begin{cases} b = a + r \\ c = b + r \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases}$$

(ب) علماً أن: $a \times c = -16$ -تعيين الأساس r :

لدينا مما سبق: $a = 3 - r$ و $c = 3 + r$.

$$a \times c = -16 \text{ تكافئ: } (3 - r) \times (3 + r) = -16$$

$$\text{ومنه: } 3^2 - r^2 = -16$$

$$\text{وعليه: } -r^2 = -25$$

$$\text{ويكون: } r^2 = 25$$

$$\text{وبالتالي: } r = \sqrt{25} = 5 \text{ أو } r = -\sqrt{25} = -5 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{إذن: } r = 5 \text{ (لأن المتتالية حسابية متزايدة)}$$

استنتاج a و c :

$$\text{لدينا: } \begin{cases} a = 3 - r \\ c = 3 + r \end{cases} \text{ و } r = 5 \text{ إذن: } \begin{cases} a = -2 \\ c = 8 \end{cases}$$

2. (u_n) متتالية حسابية حدها الأول $u_0 = -2$ وأساسها 5.

$$\text{نلاحظ أن } \begin{cases} u_0 = -2 = a \\ 5 = r \end{cases} \text{ إذن: } \begin{cases} u_1 = b = 3 \\ u_2 = c = 8 \end{cases}$$

(أ) التعبير عن الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ إذن: } u_n = -2 + 5n$$

ب) حساب u_{15} :

لدينا: $u_{15} = -2 + 5(15) = -2 + 75 = 73$.

استنتاج المجموع، $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15}$:

لدينا: $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{15} = (15 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{15}}{2} \right) = 16 \left(\frac{-2 + 73}{2} \right)$

ومنه: $S = 16(35,5) = 568$.

3. لدينا: (v_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $8v_n - u_n = 0$.

حساب المجموع، $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15}$:

لدينا: $8v_n - u_n = 0$ ومنه: $v_n = \frac{1}{8}u_n$

وبالتالي: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{15} = \frac{1}{8}u_0 + \frac{1}{8}u_1 + \dots + \frac{1}{8}u_{15}$

ومنه: $S' = \frac{1}{8}(u_0 + u_1 + \dots + u_{15}) = \frac{1}{8}S = \frac{1}{8}(568) = 71$.

حل التمرين 10: (06 نقاط) بكالوريا 2012 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية متزايدة، أساسها r ، حدّها الأول u_1 و $u_3 = 7$.

1. أ) حساب بدلالة r الجداءين $T_1 = u_1 \times u_5$ و $T_2 = u_2 \times u_4$:

لدينا: $u_n = u_p + (n - p)r$

$$\begin{cases} u_1 = u_3 + (1 - 3)r = 7 - 2r \\ u_2 = u_3 + (2 - 3)r = 7 - r \\ u_4 = u_3 + (4 - 3)r = 7 + r \\ u_5 = u_3 + (5 - 3)r = 7 + 2r \end{cases} \quad \text{ومنه: } u_n = u_3 + (n - 3)r \text{ وعليه:}$$

وبالتالي: $T_1 = u_1 \times u_5 = (7 - 2r)(7 + 2r) = 7^2 - (2r)^2 = 49 - 4r^2$

و $T_2 = u_2 \times u_4 = (7 - r)(7 + r) = 7^2 - (r)^2 = 49 - r^2$

ب) تعيين الأساس r بحيث، $T_2 - T_1 = 27$:

لدينا: $T_2 - T_1 = 27$ تكافئ: $(49 - r^2) - (49 - 4r^2) = 27$

ومنه: $49 - r^2 - 49 + 4r^2 = 27$

وعليه: $r^2 = \frac{27}{3}$

أي: $r^2 = 9$

وبالتالي: $r = -\sqrt{9} = -3$ أو $r = \sqrt{9} = 3$

وبمأن (u_n) حسابية متزايدة (أساسها موجب)، فإن: $r = 3$.

2. بوضع $r = 3$.

أ) كتابة عبارة الحدّ العام u_n بدلالة n :

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها $r = 3$ ، حدّها الأول $u_1 = 7 - 2(3) = 1$

فإن: $u_n = u_1 + (n - 1)r$ بالتعويض نجد: $u_n = 1 + (n - 1)(3)$ إذن: $u_n = 3n - 2$

ب) $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ (n عدد طبيعي غير معدوم)

تبيان أن، $S_n = \frac{3n^2 - n}{2}$:

لدينا: $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) = n \left(\frac{1 + (3n - 2)}{2} \right) = n \left(\frac{3n - 1}{2} \right)$

$$S_n = \frac{n(3n-1)}{2} = \frac{3n^2-n}{2} \text{ ومنه:}$$

(ج) إيجاد العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 145$:

$$\frac{3n^2-n}{2} = 145 \text{ معناه: } S_n = 145$$

$$3n^2 - n - 290 = 0 \text{ ومنه:}$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-290) = 1 + 3480 = 3481 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متميزين هما:

$$n' = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)+\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1+59}{6} = \frac{60}{6} = 10 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1)-\sqrt{3481}}{2(3)} = \frac{1-59}{6} = \frac{-29}{3} \notin \mathbb{N} \text{ و}$$

إذن: $(S_{10} = 145)$ $n = 10$

(أ) كتابة الحد u_{n+5} بدلالة n :

$$u_n = 3n - 2 \text{ لدينا:}$$

$$u_{n+5} = 3(n+5) - 2 = 3n + 15 - 2 = 3n + 13 \text{ ومنه: } u_{n+5} = 3n + 13$$

(ب) التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم، $\frac{u_{n+5}}{n} = 3 + \frac{13}{n}$:

$$\frac{u_{n+1}}{n} = \frac{3n+13}{n} = \frac{3n}{n} + \frac{13}{n} = 3 + \frac{13}{n} \text{ لدينا:}$$

(ج) استنتاج الأعداد الطبيعية n التي يكون من أجلها العدد $\frac{u_{n+5}}{n}$ طبيعياً:

$$3 + \frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ معناه: } \frac{u_{n+1}}{n} \in \mathbb{N}$$

$$\frac{13}{n} \in \mathbb{N} \text{ ومنه:}$$

وعليه: $n \in D_{13}$ أي: $n \in \{1; 13\}$ (قيم n هي قواسم العدد 13)

إذن: $n = 1$ أو $n = 13$.

حل التمرين 11: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (v_n) متتالية هندسية حدّها الأول $v_0 = 2$ وأساسها 3.

1- (أ) التعبير عن v_n بدلالة n :

$$v_n = 2 \times 3^n \text{ لدينا: } v_n = v_0 \times q^n \text{ إذن:}$$

(ب) حساب بدلالة n الفرق $v_{n+1} - v_n$:

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1 \text{ ومنه: } v_n = 2 \times 3^n$$

$$v_{n+1} - v_n = (6 \times 3^n) - (2 \times 3^n) = 4 \times 3^n \text{ وعليه:}$$

$$v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n \text{ إذن:}$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (v_n) :

بما: $v_{n+1} - v_n = 4 \times 3^n > 0$ فإن: (v_n) متزايدة تماماً على $\mathbb{N}$.

2- حساب بدلالة n المجموع S_n :

(أ) حساب بدلالة n المجموع S_n :

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1-3^n}{1-3} \right) = \frac{2}{-2} (1 - 3^n)$$

$$S_n = -(1 - 3^n) = 3^n - 1 \text{ ومنه: } S_n = 80$$

(ب) تعيين قيمة العدد الطبيعي n بحيث، $S_n = 80$

$$3^n - 1 = 80 \text{ معناه: } S_n = 80$$

$$\text{ومنه: } 3^n = 81 \text{ (لدينا: } 81 = 3^4 \text{)}$$

$$\text{أي: } 3^n = 3^4 \text{، إذن: } \boxed{n = 4} \text{ (} S_4 = 80 \text{)}$$

(ج) اثبات بالتراجع أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2:

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 0$ ، لدينا: $3^0 - 1 = 1 - 1 = 0$ و 0 يقبل القسمة على 2، إذن: $P(0)$ صحيحة.

المرحلة 02:

- نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2 ($3^n - 1 = 2k$) (فرضية التراجع)
- ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $3^{n+1} - 1$ يقبل القسمة على 2 ($3^{n+1} - 1 = 2k'$).

البرهان:

$$\text{لدينا: } 3^{n+1} - 1 = 3^n \times 3^1 - 1 = (2k + 1) \times 3 - 1 = 6k + 3 - 1 = 6k + 2$$

$$\text{ومنه: } 3^{n+1} - 1 = 2(3k + 1) = 2k' \text{ (حيث } k' = 3k + 1 \text{)}$$

بالتالي: $P(n+1)$ صحيحة.

إذن: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n ، العدد $3^n - 1$ يقبل القسمة على 2.

حل التمرين 12: (06 نقاط) بكالوريا 2013 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_0 وأساسها 5 بحيث، $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$.

1- حساب u_0 :

نكتب الحدود u_1 ، u_2 و u_3 بدلالة الحد الأول u_0

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + r = u_0 + 5 \\ u_2 = u_0 + 2r = u_0 + 10 \text{ ومنه: } u_n = u_0 + nr \\ u_3 = u_0 + 3r = u_0 + 15 \end{cases}$$

$$u_0 + (u_0 + 5) + (u_0 + 10) + (u_0 + 15) = 34 \text{ تُصبح: } u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 34$$

$$\text{ومنه: } 4u_0 = 34 - 30$$

$$\text{ويكون: } 4u_0 = 4$$

$$\text{إذن: } \boxed{u_0 = 1}$$

2- تبين أنه، من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 5n + 1$:

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{، إذن: } \boxed{u_n = 1 + 5n}$$

3- تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_{n+1} + u_n - 8n = 4033$:

$$\bullet \text{ لدينا: } u_n = 5n + 1 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 5(n+1) + 1 = 5n + 6$$

$$\bullet \text{ لدينا: } u_{n+1} + u_n - 8n = 4033 \text{ معناه: } (5n + 6) + (5n + 1) - 8n = 4033$$

$$\text{ومنه: } 7 + 2n = 4033$$

$$\text{وعليه: } 2n = 4026 \text{ إذن: } \boxed{n = 2013}$$

4- حساب المجموع، $S = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{2013}$:

$$\text{لدينا: } u_{2013} = 5(2013) + 1 = 10066$$

$$\text{ومنه: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_{2013} = (2013 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{2013}}{2} \right) = \frac{2014}{2} (1 + 10066)$$

وعليه: $S = 1007(10067) = 10137469$.

5- لدينا: المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة، $v_n = 2u_n + 1$.

(أ) دراسة اتجاه تغير المتتالية (v_n) : (ندرس إشارة الفرق $v_{n+1} - v_n$)

لدينا: $v_n = 2u_n + 1$ ، ولدينا: $u_{n+1} = u_n + 5$ لأن (u_n) حسابية أساسها 5.

نجد: $v_{n+1} = 2u_{n+1} + 1 = 2(u_n + 5) + 1 = 2u_n + 11$

ومنه: $v_{n+1} - v_n = (2u_n + 11) - (2u_n + 1) = 10 > 0$

إذن: (v_n) متزايدة تماما.

(ب) حساب المجموع: $S' = v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_{2013}$

لدينا: $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{2013} = (2u_0 + 1) + (2u_1 + 1) + \dots + (2u_{2013} + 1)$

ومنه: $S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{2013}) + 1(2013 - 0 + 1) = 2S + 2014$

إذن: $S' = 20276951$

حل التمرين 13: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التعليل:

(1) (u_n) متتالية حسابية أساسها 3 وحدها $u_2 = 1$.

الحد العام للمتتالية (u_n) هو:

الطريقة 01: $u_n = u_2 + (n - 2)r = 1 + (n - 2)(3) = 1 + 3n - 6 = -5 + 3n$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $u_n = -5 + 3n$.

الطريقة 02:

• في حالة: $u_n = 1 + 3n$ ، نجد: $u_2 = 1 + 3(2) = 7 \neq 1$

• في حالة: $u_n = 7 + 3n$ ، نجد: $u_2 = 7 + 3(2) = 13 \neq 1$

• في حالة: $u_n = -5 + 3n$ ، نجد: $u_2 = -5 + 3(2) = 1$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $u_n = -5 + 3n$.

$n(2)$ عدد طبيعي،

المجموع $1 + 2 + 3 + \dots + n$ هو عبارة عن مجموع n حد من متتالية حسابية حدّها الأول يساوي 1

وأساسها 1 لتكن هذه المتتالية (u_n) نضع: $u_1 = 1$ نجد: $u_n = n$

ومنه: $1 + 2 + 3 + \dots + n = u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right)$

وعليه: $1 + 2 + 3 + \dots + n = n \left(\frac{1+n}{2} \right) = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (أ) $\frac{n^2+n}{2}$.

$x(3)$ عدد حقيقي.

الأعداد $x - 2$ ، x ، $x + 1$ بهذا الترتيب حدودا متعاقبة لمتتالية هندسية، معناه: $(x - 2) \times (x + 1) = x^2$

ومنه: $x^2 + x - 2x - 2 = x^2$

وعليه: $-x - 2 = 0$

وبالتالي: $x = -2$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ج) $x = -2$.

(4) (v_n) متتالية هندسية معرفة على $\mathbb{N}$ ، حدّها العام $v_n = 2 \times 3^{n+1}$.

أساس المتتالية (v_n) هو:

$$q = \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2 \times 3^{(n+1)+1}}{2 \times 3^{n+1}} = \frac{2 \times 3^{n+1} \times 3^1}{2 \times 3^{n+1}} = 3 \quad \text{الطريقة 01:}$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب) 3.

$$v_{n+1} = 2 \times 3^{(n+1)+1} = 2 \times 3^{(n+1)} \times 3^1 = v_n \times 3 \quad \text{الطريقة 02: لدينا: } v_n = 2 \times 3^{n+1} \text{، ومنه:}$$

$$\boxed{v_{n+1} = 3v_n} \quad \text{أي:}$$

إذن: الاقتراح الصحيح هو الاقتراح (ب) 3.

حل التمرين 14: (06 نقاط) بكالوريا 2014 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

$$\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = 5v_n + 4 \end{cases} \quad \text{لدينا: } (v_n) \text{ المتتالية العددية المعرفة بما يلي،}$$

(1) حساب v_1, v_2, v_3 :

$$v_1 = 5v_0 + 4 = 5(1) + 4 = 5 + 4 = 9$$

$$v_2 = 5v_1 + 4 = 5(9) + 4 = 45 + 4 = 49$$

$$v_3 = 5v_2 + 4 = 5(49) + 4 = 245 + 4 = 249$$

(2) لدينا: $u_n = v_n + 1$

أثبت أن (u_n) متتالية هندسية أساسها 5 $q = 5$ وحدها الأول $u_0 = 2$:

(01) نبين أن الحاصل $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ عدد ثابت.

$$u_{n+1} = v_{n+1} + 1 = (5v_n + 4) + 1 = 5v_n + 5 = 5(v_n + 1) \quad \text{ومن: } u_n = v_n + 1$$

$$\boxed{\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{5(v_n+1)}{v_n+1} = 5} \quad \text{وعليه:}$$

$$u_0 = v_0 + 1 = 1 + 1 = 2 \quad \text{إذن: } (v_n) \text{ متتالية هندسية أساسها } q = 5 \text{ وحدها الأول}$$

بكتابة u_n بدلالة n :

$$(u_n) \text{ هندسية أساسها 5 وحدها الأول } u_0 = 2 \text{، عبارة الحد العام هي: } u_n = u_0 \times q^n$$

$$\boxed{u_n = 2 \times 5^n} \quad \text{بالتعويض نجد:}$$

استنتاج v_n بدلالة n :

$$\boxed{v_n = u_n - 1 = 2 \times 5^n - 1} \quad \text{لدينا: } u_n = v_n + 1 \text{ و } u_n = 2 \times 5^n \text{ إذن:}$$

ج تحليل العدد 1250 إلى جداء عوامل أولية:

$$\begin{array}{r|l} 1250 & 2 \\ 625 & 5 \\ 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\boxed{1250 = 2 \times 5^4} \quad \text{إذن:}$$

استنتاج أن 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) :

$$\text{نضع: } u_n = 1250 \text{ نجد: } 2 \times 5^n = 2 \times 5^4$$

$$\text{أي: } \boxed{n = 4 \in \mathbb{N}} \quad (u_4 = 1250)$$

إذن: 1250 حد من حدود المتتالية (u_n) .

(3) أحساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}$

$$S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1-5^n}{1-5} \right) = \frac{2}{-4} (1-5^n)$$

$$\boxed{S_n = \frac{1}{2} (5^n - 1)}$$

ب- حساب بدلالة n المجموع S'_n : $S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$

$$v_n = u_n - 1 \text{ ومنه: } u_n = v_n + 1$$

$$S'_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = (u_0 - 1) + (u_1 - 1) + \dots + (u_{n-1} - 1)$$

$$S'_n = (u_0 + u_1 + \dots + u_{n-1}) - 1[(n-1) - 0 + 1] = S_n - n$$

$$\boxed{S'_n = \frac{1}{2} (5^n - 1) - n = \frac{1}{2} (5^n - 1) - n}$$

حل التمرين 15: (07 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية هندسية حدّها الأول u_0 وأساسها q ، حيث $u_0 = 2$ و $q = 3$.

(1) حساب u_1 و u_2 :

$$\boxed{u_{n+1} = u_n \times q} \text{ فإن: } u_{n+1} = u_n \times q$$

$$u_2 = u_1 \times q = 6 \times 3 = 18 \text{ و } u_1 = u_0 \times q = 2 \times 3 = 6$$

(2) كتابة u_n بدلالة n :

$$\boxed{u_n = 2 \times 3^n} \text{ ومنه: } u_n = u_0 \times q^n$$

$$u_5 = 2 \times 3^5 = 2 \times 243 = 486$$

(3) تعيين اتجاه تغير المتتالية (u_n) : (ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$)

$$u_{n+1} = 2 \times 3^{n+1} = 2 \times 3^n \times 3^1 \text{ ومنه: } u_n = 2 \times 3^n$$

$$u_{n+1} - u_n = (2 \times 3^{n+1}) - (2 \times 3^n) = 2 \times 3^n (3 - 1) = 4 \times 3^n > 0$$

إذن: (u_n) متزايدة تماماً.

(4) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1}$

$$S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} = u_0 \left(\frac{1-q^{(n-1)-0+1}}{1-q} \right) = 2 \left(\frac{1-3^n}{1-3} \right)$$

$$S_n = \frac{2}{-2} (1-3^n) = -(1-3^n) = 3^n - 1$$

ب) استنتج قيمة المجموع $2 + 6 + 18 + \dots + 486$:

$$2 + 6 + 18 + \dots + 486 = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_5 = 3^6 - 1 = 728$$

(5) أ) تعيين باقي القسمة الإقليدية على 5 لكل عدد من الأعداد $3, 3^2, 3^3$ و 3^4 :

$$\boxed{3 \equiv 3[5]} \text{، إذن: باقي قسمة 3 على 5 هو 3.}$$

$$\boxed{3^2 \equiv 4[5]} \text{، إذن: باقي قسمة } 3^2 \text{ على 5 هو 4.}$$

$$\boxed{3^3 \equiv 2[5]} \text{، إذن: باقي قسمة } 3^3 \text{ على 5 هو 2.}$$

$$\boxed{3^4 \equiv 1[5]} \text{، إذن: باقي قسمة } 3^4 \text{ على 5 هو 1.}$$

ب) استنتج أنه لكل k من $\mathbb{N}$: $3^{4k} \equiv 1[5]$:

$$\boxed{3^{4k} \equiv 1[5]} \text{، ومنه: } (3^4)^k \equiv (1)^k[5] \text{ (} k \in \mathbb{N} \text{) وعليه: } 3^{4k} \equiv 1[5]$$

(6) تعيين الأعداد الطبيعية n التي من أجلها يكون $3^n - 1$ قابلاً للقسمة على 5:

$$3^n - 1 \equiv 0[5] \text{ معناه: } 3^n - 1 \equiv 0[5]$$

$$3^n \equiv 1[5] \text{ ومنه: } 3^n \equiv 1[5]$$

وحسب نتيجة السؤال (5ب)، فإن: $n = 4k$ (حيث $k \in \mathbb{N}$).

حل التمرين 16: (06 نقاط) بكالوريا 2015 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية حدّها الأول u_1 وأساسها r حيث، $u_2 = \frac{1}{2}$ و $u_1 - u_3 = 5$.

$$(1) \text{ أ) تبين أن: } u_1 + u_3 = 1$$

$$\text{حسب خاصية الوسط الحسابي، } u_1 + u_3 = 2u_2 = 2\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

$$(ب) \text{ تعيين الحد الأول } u_1 \text{؛ ثم استنتاج أن } r = -\frac{5}{2}$$

$$\text{لدينا: } \begin{cases} u_1 - u_3 = 5 \\ u_1 + u_3 = 1 \end{cases} \text{ بالجمع طرفاً لطرف نجد: } (u_1 - u_3) + (u_1 + u_3) = 5 + 1$$

$$\text{ومنه: } 2u_1 = 6 \text{ وعليه: } u_1 = \frac{6}{2} = 3$$

$$\text{استنتاج أن } r = -\frac{5}{2} \text{ لدينا: } r = u_2 - u_1 = \frac{1}{2} - 3 = \frac{1-6}{2} = -\frac{5}{2}$$

$$(2) \text{ كتابة } u_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{لدينا: } u_n = u_p + (n - p)r \text{ ومنه: } u_n = u_1 + (n - 1)r$$

$$\text{بالتعويض نجد: } u_n = 3 + (n - 1)\left(-\frac{5}{2}\right)$$

$$\text{وبالتالي: } u_n = -\frac{5}{2}n + 3 + \frac{5}{2} \text{ إذن: } u_n = -\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}$$

$$(3) \text{ أ) حساب بدلالة } n \text{ المجموع } S_n \text{ حيث: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$\text{لدينا: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_n}{2} \right) = (n) \left(\frac{3 + \left(-\frac{5}{2}n + \frac{11}{2}\right)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = \frac{n}{2} \left(3 - \frac{5}{2}n + \frac{11}{2} \right) = \frac{n}{2} \left(-\frac{5}{2}n + \frac{17}{2} \right) = \frac{-5n^2 + 17n}{4}$$

$$(ب) \text{ عيّن قيمة العدد الطبيعي } n \text{ التي يكون من أجلها } S_n = -\frac{657}{2}$$

$$S_n = -\frac{657}{2} \text{ معناه: } \frac{-5n^2 + 17n}{4} = -\frac{657}{2}$$

$$\text{ومنه: } 2(-5n^2 + 17n) = 4(-657)$$

$$\text{وعليه: } -10n^2 + 34n + 2628 = 0$$

$$\Delta = (34)^2 - 4(-10)(2628) = 1156 + 105120 = 106276 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متمايزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34 + \sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34 + 326}{-20} = \frac{292}{-20} = \frac{-146}{10} \notin \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-34 - \sqrt{106276}}{2(-10)} = \frac{-34 - 326}{-20} = \frac{-360}{-20} = 18 \in \mathbb{N}$$

$$\text{إذن: } (S_{18} = -\frac{657}{2}) \text{ } [n = 18]$$

$$(4) \text{ عدد طبيعي غير معدوم، } T_n = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n$$

$$\text{أ) التحقق أنه لكل } n \text{ من } \mathbb{N}^*, (n + 2)(9 - 5n) = -5n^2 - n + 18$$

$$\text{لدينا: } (n+2)(9-5n) = 9n - 5n^2 + 18 - 10n = -5n^2 - n + 18$$

(ب) باستعمال الاستدلال بالتراجع، إثبات أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$

نسمي هذه الخاصية بـ $P(n)$.

المرحلة 01: من أجل $n = 1$ ،

$$\text{الطرف الأول: } T_1 = 1u_1 = u_1 = 3$$

$$\text{الطرف الثاني: } 3 = \frac{2(9)}{6} = \frac{1}{6}(1)((1)+1)(14-5(1)) \text{، إذن: } P(1) \text{ صحيحة.}$$

المرحلة 02:

• نفرض صحة الخاصية $P(n)$ أي: $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$ (فرضية التراجع)

• ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي: $T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$

$$\text{البرهان: لدينا: } T_{n+1} = u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \underbrace{u_1 + 2u_2 + 3u_3 + \dots + nu_n}_{T_n} + (n+1)u_{n+1}$$

$$= T_n + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)u_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n) + (n+1)\left(-\frac{5}{2}n+3\right)$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)[n(14-5n) + (-15n+18)]$$

$$= \frac{1}{6}(n+1)(-5n^2 - n + 18)$$

$$\text{حسب السؤال أ) نجد: } T_{n+1} = \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(9-5n)$$

إذن: $P(n+1)$ صحيحة.

الخلاصة: حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، $T_n = \frac{1}{6}n(n+1)(14-5n)$.

حل التمرين 17: (07 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة من أجل عدد طبيعي n بـ: $u_n = 3n - 2$.

(1) حساب u_0, u_1, u_2, u_3 :

$$u_0 = 3(0) - 2 = 0 - 2 = -2$$

$$u_1 = 3(1) - 2 = 3 - 2 = 1$$

$$u_2 = 3(2) - 2 = 6 - 2 = 4$$

$$u_3 = 3(3) - 2 = 9 - 2 = 7$$

(2) تبين أن المتتالية (u_n) حسابية وتعيين أساسها: (نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت)

$$\text{لدينا: } u_n = 3n - 2 \text{ ومنه: } u_{n+1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 3 - 2 = 3n + 1$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = (3n+1) - (3n-2) = 3n+1-3n+2 = 3$$

إذن: (u_n) حسابية، أساسها $r = 3$.

(3) دراسة اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

بما أن (u_n) حسابية أساسها موجب تماماً ($r = 3 > 0$) فإنها متزايدة تماماً.

(4) تبين أن العدد 1954 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

نضع: $u_n = 1954$ نجد: $3n - 2 = 1954$

ومنه: $3n = 1956$

وعليه: $n = \frac{1956}{3} = 652 \in \mathbb{N}$ ($u_{652} = 1954$)

إذن: 1954 حدّ من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 653 (لأنّ الحد الأول هو u_0)

(5أ) حساب بدلالة n المجموع، $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$

لدينا: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$

ومنه: $S_n = (n + 1) \left(\frac{3n - 4}{2} \right) = \frac{(n + 1)(3n - 4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$

(ب) تعيين العدد n بحيث يكون، $S_n = 328$

$S_n = 328$ معناه: $\frac{3n^2 - n - 4}{2} = 328$

ومنه: $3n^2 - n - 4 = 2(328)$

وعليه: $3n^2 - n - 660 = 0$

مميزها: $\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-660) = 1 + 7920 = 7921 > 0$

للمعادلة حلين متميزين هما:

$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1 + 89}{6} = \frac{90}{6} = 15 \in \mathbb{N}$

$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{7921}}{2(3)} = \frac{1 - 89}{6} = \frac{-88}{6} = \frac{-44}{3} \notin \mathbb{N}$

إذن: $n = 15$ ($S_{15} = 328$).

حل التمرين 18: (06 نقاط) بكالوريا 2016 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية حسابية، أساسها 3 وحدّها الأول u_0 ونُحقّق: $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$.

(1) حساب الحد الأول u_0

نكتب u_1 ؛ u_2 و u_3 بدلالة u_0

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $\begin{cases} u_1 = u_0 + (1)r = u_0 + 3 \\ u_2 = u_0 + (2)r = u_0 + 6 \\ u_3 = u_0 + (3)r = u_0 + 9 \end{cases}$

العلاقة $u_0 + u_1 + u_2 + u_3 = 10$ تُصبح: $u_0 + (u_0 + 3) + (u_0 + 6) + (u_0 + 9) = 10$

ومنه: $4u_0 + 18 = 10$

وعليه: $4u_0 = -8$ إذن: $u_0 = \frac{-8}{4} = -2$

(2) كتابة الحد العام u_n بدلالة n

لدينا: $u_n = u_0 + nr$ ومنه: $u_n = -2 + 3n$

(3) تعيين العدد الطبيعي n بحيث، $u_n = 145$

$u_n = 145$ تُكافئ: $-2 + 3n = 145$

ومنه: $3n = 147$ وعليه: $n = \frac{147}{3} = 49$ ($u_{49} = 145$)

(4) حساب المجموع S بحيث، $S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49}$

$$S = u_0 + u_1 + \dots + u_{49} = (49 - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_{49}}{2} \right) = (50) \left(\frac{-2 + 145}{2} \right) \text{ لدينا:}$$

$$S = (50) \left(\frac{143}{2} \right) = (50)(71,5) = 3575 \text{ ومنه:}$$

5) لدينا: (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}$ بالعلاقة: $v_n = 2u_n + 3$

حساب المجموع S' بحيث، $S' = v_0 + v_1 + \dots + v_{49}$

$$\text{لدينا: } v_n = 2u_n + 3$$

$$\text{ومنه: } S' = (2u_0 + 3) + (2u_1 + 3) + \dots + (2u_{49} + 3)$$

$$\text{وعليه: } S' = 2(u_0 + u_1 + \dots + u_{49}) + 3(94 - 0 + 1)$$

$$\text{وبالتالي: } S' = 2S + 3(50) = 2(3575) + 150 = 7300$$

حل التمرين 19: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ

لدينا: (u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، معرفة على $\mathbb{N}$ حيث $u_1 = 20$ و $u_3 = 320$

1) تبين أن أساس المتتالية (u_n) هو 4 وحدها الأول هو 5:

$$\text{لدينا: } u_n = u_p \times q^{n-p} \text{ ومنه: } u_3 = u_1 \times q^{3-1}$$

$$\text{وعليه: } 320 = 20 \times q^2$$

$$\text{ويكون: } q^2 = \frac{320}{20} = 16$$

$$\text{وبالتالي: } q = \sqrt{16} = 4 \text{ أو } q = -\sqrt{16} = -4 \text{ (مرفوض)}$$

إذن: $q = 4$ لأنها حدود موجبة تماما.

2) كتابة عبارة الحد العام للمتتالية (u_n) بدلالة n :

$$\text{بما أن } (u_n) \text{ هندسية معرفة على } \mathbb{N} \text{ فإن حدّها الأول هو: } u_0 = \frac{u_1}{q} = \frac{20}{4} = 5$$

$$\text{وبالتالي: } u_n = u_0 \times q^n \text{ إذن: } u_n = 5 \times 4^n$$

استنتاج قيمة حدّها السابع:

$$\text{الحد السابع هو: } u_6 = 5 \times 4^6 = 5(4096) = 20480$$

3) أ) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث، $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 5 \left(\frac{1 - 4^{n+1}}{1 - 4} \right) = \frac{5}{-3} (1 - 4^{n+1})$$

$$\text{ومنه: } S = \frac{5}{3} (4^{n+1} - 1)$$

ب) استنتاج قيمة المجموع S' حيث، $S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6$

$$\text{حسب السؤال السابق أ) نجد: } S' = u_0 + u_1 + \dots + u_6 = \frac{5}{3} (4^{6+1} - 1) = \frac{5}{3} (4^7 - 1)$$

$$\text{ومنه: } S' = \frac{5}{3} (16384 - 1) = \frac{5}{3} (16383) = 27305$$

حل التمرين 20: (06 نقاط) بكالوريا 2017_01 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على المجموعة $\mathbb{N}$ بحدّها الأول $u_0 = -5$ و $u_3 + u_7 = 50$

1) تعيين الأساس r للمتتالية (u_n) :

نكتب u_3 و u_7 بدلالة u_0

$$\begin{aligned} \text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } \begin{cases} u_3 = u_0 + (3)r = -5 + 3r \\ u_7 = u_0 + (7)r = -5 + 7r \end{cases} \\ \text{بالتعويض في العلاقة } u_3 + u_7 = 50 \text{ نجد: } (-5 + 3r) + (-5 + 7r) = 50 \\ \text{ومنه: } 10r - 10 = 50 \\ \text{وعليه: } 10r = 60 \text{ إذن: } r = \frac{60}{10} = 6 \end{aligned}$$

(2) تبيان أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 6n - 5$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_n = -5 + 6n$$

(3) اثبات أن العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، مع تعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 2017 \text{ نجد: } -5 + 6n = 2017$$

$$\text{ومنه: } 6n = 2022$$

$$\text{وبالتالي: } n = \frac{2022}{6} = 337 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{337} = 2017 \text{)}$$

إذن: العدد 2017 حد من حدود المتتالية (u_n) ، رتبته: 338 لأن الحد الأول هو u_0 .

(4) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S حيث $S = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } S = u_0 + u_1 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-5 + (-5 + 6n)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = (n + 1) \left(\frac{-10 + 6n}{2} \right) = (n + 1)(-5 + 3n)$$

حل التمرين 21: (06 نقاط) بكالوريا 2017 د 02 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ

لدينا: (u_n) متتالية حسابية معرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول u_0 وأساسها r .

(1) حساب الحد u_4 علما أن، $u_3 + u_5 = 20$

$$\text{حسب خاصية الوسط الحسابي، لدينا: } u_3 + u_5 = 2u_4$$

$$\text{العلاقة } u_3 + u_5 = 20 \text{ تُصبح: } 2u_4 = 20 \text{ إذن: } u_4 = \frac{20}{2} = 10$$

(2) حساب الحد u_5 علما أن، $2u_4 - u_5 = 7$

$$2(10) - u_5 = 7 \text{ تُكافئ: } 2u_4 - u_5 = 7$$

$$\text{ومنه: } -u_5 = 7 - 20 \text{ وعليه: } -u_5 = -13 \text{ إذن: } u_5 = 13$$

(3) استنتاج قيمة r وحساب u_0

$$\text{بما أن } (u_n) \text{ متتالية حسابية، ولدينا: } u_4 = 10؛ u_5 = 13 \text{ إذن: } r = u_5 - u_4 = 13 - 10 = 3$$

حساب u_0

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_4 = u_0 + 4r \text{ وعليه: } 10 = u_0 + 4(3) \text{ إذن: } u_0 = 10 - 12 = -2$$

(4) التحقق أن: من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n = 3n - 2$

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنه: } u_n = -2 + 3n$$

(5) حساب بدلالة العدد الطبيعي n المجموع S_n حيث $S_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-2 + (3n - 2)}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S_n = (n + 1) \left(\frac{3n - 4}{2} \right) = \frac{(n+1)(3n-4)}{2} = \frac{3n^2 - n - 4}{2}$$

(6) إيجاد العدد الطبيعي n حيث، $S_n = 33$:

$$S_n = 33 \text{ معناه: } \frac{3n^2 - n - 4}{2} = 33$$

$$\text{ومنه: } 3n^2 - n - 4 = 2(33)$$

$$\text{وعليه: } 3n^2 - n - 70 = 0$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4(3)(-70) = 1 + 840 = 841 > 0 \text{ مميزها:}$$

للمعادلة حلين متميزين هما:

$$n' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) + \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 + 29}{6} = \frac{30}{6} = 5 \in \mathbb{N}$$

$$n'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-1) - \sqrt{841}}{2(3)} = \frac{1 - 29}{6} = \frac{-28}{6} = \frac{-14}{3} \notin \mathbb{N}$$

إذن: $\boxed{n = 5}$ ($S_5 = 33$).

حل التمرين 22: (06 نقاط) بكالوريا 2017_د 02 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ

تعيين الافتراح الصحيح مع التعليل:

(1) الحد السادس لمتتالية حسابية أساسها 3 - وحدّها الأول 1 هو: (ب) -14.

التبرير:

■ الطريقة 01: إذا كان: $\boxed{u_0 = 1}$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ: حدّها السادس هو u_5 وبالتالي: $\boxed{u_5 = u_0 + 5r = 1 + 5(-3) = -14}$

■ الطريقة 02: إذا كان: $\boxed{u_1 = 1}$ هو الحد الأول للمتتالية الحسابية التي أساسها $\boxed{r = -3}$

فإنّ: حدّها السادس هو u_6 وبالتالي: $\boxed{u_6 = u_1 + (6 - 1)r = 1 + 5(-3) = -14}$

(2) مجموع 100 حدّ الأولى لمتتالية هندسية حدّها الأول هو 1 وأساسها 3 هو: (ج) $\frac{3^{100} - 1}{2}$.

$$\text{لأن: } \left(\frac{1 - q^{\text{عدد الحدود}}}{1 - q} \right) = 1 \left(\frac{1 - 3^{100}}{1 - 3} \right) = \left(\frac{1 - 3^{100}}{-2} \right) = \frac{3^{100} - 1}{2}$$

(3) لدينا: $a = 2x + 2$, $b = 6x - 3$, $c = 4x$.

الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية عندما يكون: (أ) $x = \frac{4}{3}$

التبرير:

بمأنّ: الأعداد الحقيقية a , b , c بهذا الترتيب تُشكل حدودا متتابعة لمتتالية حسابية

فإنّ: حسب خاصية الوسط الحسابي $\boxed{a + c = 2b}$ ومنه: $(2x + 2) + (4x) = 2(6x - 3)$

$$\text{وعليه: } 6x + 2 = 12x - 6$$

$$\text{وبالتالي: } -6x = -8 \text{ إذن: } \boxed{x = \frac{-8}{-6} = \frac{4}{3}}$$

(4) المتتالية العددية (u_n) المعرّفة بـ: $u_0 = 1$ ومن أجل كل عدد طبيعي n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ هي متتالية: (ج)

لا حسابية ولا هندسية.

لأنّ: العلاقة $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 1$ ليست من الشكل $\boxed{u_{n+1} = u_n + r}$ وليست من الشكل $\boxed{u_{n+1} = qu_n}$.

حل التمرين 23: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

تعيين الاقتراح الصحيح، مع التبرير:

$$(1) (u_n) \text{ متتالية عددية معرفة على } \mathbb{N} \text{ بـ: } u_n = n^2 - 1$$

المتتالية (u_n) : أ) متزايدة تماما، لمعرفة اتجاه تغير متتالية ندرس إشارة الفرق $u_{n+1} - u_n$

$$\text{لدينا: } u_n = n^2 - 1 \text{، ومنه: } u_{n+1} = (n+1)^2 - 1 = n^2 + 1^2 + 2(n)(1) - 1 = n^2 + 2n$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = (n^2 + 2n) - (n^2 - 1) = 2n + 1 > 0$$

إذن: المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

$$(2) (v_n) \text{ متتالية هندسية حدّها الأول } v_1 = 3 \text{ وأساسها } q = 2$$

عبارة الحد العام للمتتالية (v_n) هي: ب) $v_n = 3 \times 2^{n-1}$ لأن: $v_n = v_1 \times q^{n-1} = 3 \times 2^{n-1}$

$$\text{المجموع } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n \text{ يُساوي: أ) } 3(2^n - 1)$$

$$\text{لأن: } S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 3 \left(\frac{1 - 2^{n+1}}{1 - 2} \right) = 3(2^{n+1} - 1)$$

(3) الاحتمالات.

حل التمرين 24: (06 نقاط) بكالوريا 2018 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

(u_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما، حدّها الأول u_0 وأساسها q حيث:

$$u_0 + u_1 = 30 \text{ و } u_0 \times u_2 = 576$$

(1) تبين أن $u_1 = 24$:

$$\text{حسب خاصية الوسط الهندسي، لدينا: } u_0 \times u_2 = u_1^2$$

$$\text{ومنه: } u_0 \times u_2 = 576$$

$$\text{نُصبح: } u_1^2 = 576$$

$$\text{وعليه: } u_1 = \sqrt{576} = 24 \text{ أو } u_1 = -\sqrt{576} = -24 \text{ (مرفوض)}$$

إذن: $u_1 = 24$ لأن حدود (u_n) موجبة تماما.

$$\text{استنتاج قيمة } u_0: \text{ لدينا: } u_0 + u_1 = 30 \text{ ومنه: } u_0 = 30 - u_1 = 30 - 24 = 6$$

$$(2) \text{ تبين أن } q = 4: \text{ لدينا: } q = \frac{u_1}{u_0} = \frac{24}{6} = 4$$

كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 \times q^n \text{ ومنه: } u_n = 6 \times 4^n$$

$$(3) \text{ اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n$$

$$\text{لدينا: } u_n = 6 \times 4^n \text{ ومنه: } u_{n+1} = 6 \times 4^{n+1} = 6 \times 4^n \times 4^1$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = (6 \times 4^{n+1}) - (6 \times 4^n) = 18 \times 4^n$$

استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) :

$$\text{بما أن } u_{n+1} - u_n = 18 \times 4^n > 0 \text{، فإن } (u_n) \text{ متزايدة تماما.}$$

$$(4) \text{ حساب } 4^4: 4^4 = 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 256$$

التحقّق أن العدد 1536 حد من حدود المتتالية (u_n) وتعيين رتبته:

$$\text{نضع: } u_n = 1536 \text{ نجد: } 6 \times 4^n = 1536$$

$$\text{ومنه: } 4^n = \frac{1536}{6}$$

$$4^n = 256 \text{ أي:}$$

$$\text{وعليه: } 4^n = 4^4 \text{ (لأن } 4^4 = 256 \text{)}$$

إذن: $n = 4$ ($u_4 = 1536$)، رتبته: 5 لأن الحد الأول هو u_0 .

5) حساب بدلالة n المجموع S_n : $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

$$\text{لدينا: } S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n = u_1 \left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right) = 24 \left(\frac{1 - 4^n}{1 - 4} \right) = \frac{24}{-3} (1 - 4^n)$$

$$\text{ومنه: } S_n = -8(1 - 4^n) = 8(4^n - 1)$$

حل التمرين 25: (06 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 01 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $u_n = \frac{2}{5}n - 1$

1) تبيان أن المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ يُطلب حساب حدّها الأول u_1 :

نُبين أن الفرق $u_{n+1} - u_n$ عدد ثابت $\frac{2}{5}$

$$\text{لدينا: } u_n = \frac{2}{5}n - 1 \text{، ومنه: } u_{n+1} = \frac{2}{5}(n+1) - 1 = \frac{2}{5}n + \frac{2}{5} - 1 = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5}$$

$$\text{وعليه: } u_{n+1} - u_n = \left(\frac{2}{5}n - \frac{3}{5} \right) - \left(\frac{2}{5}n - 1 \right) = \frac{2}{5}n - \frac{3}{5} - \frac{2}{5}n + 1 = -\frac{3}{5} + 1 = \frac{-3+5}{5}$$

$$\text{وبالتالي: } \boxed{u_{n+1} - u_n = \frac{2}{5}}$$

إذن: المتتالية (u_n) حسابية أساسها $\frac{2}{5}$ ، وحدّها الأول $u_1 = \frac{2}{5}(1) - 1 = \frac{2}{5} - 1 = \frac{2-5}{5} = \frac{-3}{5}$

2) تعيين رتبة الحد الذي قيمته 575:

$$\text{نضع: } u_n = 575 \text{ نجد: } \frac{2}{5}n - 1 = 575$$

$$\text{ومنه: } \frac{2}{5}n = 576$$

$$\text{وعليه: } 2n = 5(576)$$

$$\text{أي: } 2n = 2880 \text{ وبالتالي: } n = \frac{2880}{2} = 1440 \in \mathbb{N} \text{ (لأن } u_{1440} = 575 \text{)}$$

إذن: رتبة الحد الذي قيمته 575 هي 1440 لأن الحد الأول هو u_1 .

3) حساب قيمة المجموع S حيث: $S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440}$

$$\text{لدينا: } S = u_1 + u_2 + \dots + u_{1440} = (1440 - 1 + 1) \left(\frac{u_1 + u_{1440}}{2} \right) = (1440) \left(\frac{\frac{-3}{5} + 575}{2} \right)$$

$$\text{ومنه: } S = \frac{1440}{2} \left(\frac{-3}{5} + 575 \right) = 720 \left(\frac{-3+5(575)}{5} \right) = 720 \left(\frac{-3+2875}{5} \right) = 720 \left(\frac{2872}{5} \right)$$

$$\text{وعليه: } S = 720(574,4) = 413568$$

4) (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $v_n = 4^{5u_n+6}$

أ) تبيان أن المتتالية (v_n) هندسية يُطلب تعيين أساسها وحدّها الأول v_1 :

(نُبين أن حاصل القسمة $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ عدد ثابت)

$$\text{لدينا: } v_n = 4^{5u_n+6} \text{ ومنه: } v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6}$$

$$\text{وبما أن } (u_n) \text{ حسابية فإن } u_{n+1} = u_n + r \text{ أي: } \boxed{u_{n+1} = u_n + \frac{2}{5}}$$

$$v_{n+1} = 4^{5u_{n+1}+6} = 4^{5(u_n+\frac{2}{5})+6} = 4^{5u_n+2+6} = 4^{(5u_n+6)+2} = 4^{5u_n+6} \times 4^2 \text{ وعليه:}$$

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{4^{5u_n+6} \times 4^2}{4^{5u_n+6}} = 4^2 = 16 \text{ وبالتالي:}$$

إذن: (v_n) متتالية هندسية أساسها $q = 16$ ، وحدّها الأول

$$v_1 = 4^{5u_1+6} = 4^{5(\frac{-3}{5})+6} = 4^{-3+6} = 4^3 = 64 \text{ لأنها معرّفة على } \mathbb{N}^*$$

(ب) حساب بدلالة n المجموع، $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$:

$$S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n = v_1 \left(\frac{1-q^{n-1+1}}{1-q} \right) = 64 \left(\frac{1-16^n}{1-16} \right) = \frac{64}{-15} (1 - 16^n)$$

$$\text{إذن: } S_n = \frac{64}{15} (16^n - 1)$$

حل التمرين 26: (04 نقاط) بكالوريا 2019 // الموضوع 02 // الشعبة: آف؛ لغ أ.

لدينا: (u_n) المتتالية الحسابية التي حدّها الأول u_0 وأساسها r .

(1) علماً أنّ: $u_0 + u_1 + u_2 = 6$ ، تعيين u_1 :

حسب خاصية الوسط الحسابي لدينا: $u_0 + u_2 = 2u_1$ ،

$$\text{العلاقة } u_0 + u_1 + u_2 = 6 \text{ تُصبح: } u_1 + 2u_1 = 6 \text{ ومنه: } 3u_1 = 6 \text{ إذن: } u_1 = \frac{6}{3} = 2$$

(2) علماً أنّ: $2u_0 - 3u_1 = -10$ ، تعيين الحد الأول u_0 ، ثم استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :

$$2u_0 - 3(2) = -10 \text{ تُكافئ: } 2u_0 - 6 = -10$$

$$\text{ومنّه: } 2u_0 = -10 + 6 \text{ أي: } 2u_0 = -4 \text{ إذن: } u_0 = \frac{-4}{2} = -2$$

استنتاج قيمة r أساس المتتالية (u_n) :

$$\text{بمأنّ } (u_n) \text{ حسابية؛ ولدينا: } u_1 = 2, u_0 = -2 \text{ فإنّ } r = u_1 - u_0 = 2 - (-2) = 4$$

(3) كتابة عبارة الحد العام u_n بدلالة n :

$$\text{لدينا: } u_n = u_0 + nr \text{ ومنّه: } u_n = -2 + 4n$$

(4) تعيين قيمة n حتى يكون $u_n = 2018$:

$$\text{نضع: } u_n = 2018 \text{ نجد: } -2 + 4n = 2018$$

$$\text{ومنّه: } 4n = 2020 \text{ وبالتالي: } n = \frac{2020}{4} = 505 \in \mathbb{N} \text{ (} u_{505} = 2018 \text{)}$$

(ب) حساب الحد الخامس عشر للمتتالية (u_n) :

$$\text{بمأنّ الحد الأوّل هو } u_0 \text{ فإنّ الحد الخامس عشر هو: } u_{14} = -2 + 4(14) = 54$$

(5) حساب بدلالة n المجموع S_n حيث: $S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$:

$$\text{لدينا: } S_n = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n = (n - 0 + 1) \left(\frac{u_0 + u_n}{2} \right)$$

$$\text{ومنّه: } S_n = (n + 1) \left(\frac{-2 + (-2 + 4n)}{2} \right) = (n + 1) \left(\frac{-4 + 4n}{2} \right) = (n + 1)(2n - 2)$$

(6) تعيين العدد الطبيعي n حتى يكون، $S_n = 96$:

$$S_n = 96 \text{ معناه: } (n + 1)(2n - 2) = 96$$

$$\text{ومنّه: } 2n^2 - 2n + 2n - 2 = 96$$

$$\text{وعليه: } 2n^2 = 98$$

$$\text{أي: } n^2 = 49$$

$$\text{وبالتالي: } n = \sqrt{49} = 7 \text{ أو } n = -\sqrt{49} = -7 \text{ (مرفوض)}$$

$$\text{إذن: } \boxed{n = 7} \text{ (} S_7 = 96 \text{)}$$