

الموضوع الأول

التمرين الأول (06 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2\ln(x)$

(1) - ادرس تغيرات الدالة g على $]0, +\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة g .

(2) - احسب $g(1)$ ثم حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$.

$$x > 1 \quad \Leftrightarrow \quad g\left(\frac{1}{x}\right) < 0$$

$$0 < x < 1 \quad \Leftrightarrow \quad g\left(\frac{1}{x}\right) > 0$$

ب- استنتج أن :

الجزء الثاني :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; \quad x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

نعتبر الدالة f المعرفة على R^* بما يلي :

ليكن (C) التمثيل البياني للدالة f في معلم متعامد متجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

(1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين .

(2) ادرس قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين . ما هو التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟

(3) - احسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(4) - بين أن : $f'(x) = x \cdot g\left(\frac{1}{x}\right)$ مهما يكن $x \in]0; +\infty[$

ب- ضع جدول تغيرات الدالة f .

(5) بين أن المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]0, +\infty[$ وأن $1 < \alpha < 2$.

(6) - تحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي $y = x$.

ب- بين انه لما $x \in]0, 1[$ فإن $f(x) > x$

ج- استنتج الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T) .

(7) أنشئ المنحنى (C) .

التمرين الثاني (06 نقاط)

الفضاء النسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

نعتبر المستقيمين (Δ) و (Δ') المعرفين بالتمثيلين الوسيطيين الآتيين :

$$(\Delta') : \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$(\Delta) : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

1. بين أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوي .

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

- عين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')
- احسب الطول AB .

3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيم (Δ) و يوازي المستقيم (Δ') .

4. احسب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) . ما ذا تلاحظ ؟

التمرين الثالث (08 نقاط)

في المستوى المركب النسوب إلى معلم متعامد و المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$

$$z_A = 1 - i \quad \text{و} \quad z_B = 3 + i \quad \text{و} \quad z_C = -3 \quad \text{و} \quad z_D = 2$$

نعتبر التطبيق f الذي يرفق كل نقطة M ذات اللاحقة Z بالنقطة M' ذات اللاحقة Z' حيث :

$$Z' = Z^2 - 4Z$$

1. حدد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي .

2. - بين أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا و فقط إذا . كان : $Z^2 - 3Z + 3 = 0$

ب- حل في المجموعة \mathbb{C} المعادلة : $Z^2 - 3Z + 3 = 0$

3. - عبر عن : $z' + 4$ بدلالة $z - 2$.

ب- استنتج أن : $|z' + 4| = |z - 2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z' + 4)$ بدلالة $\arg(z - 2)$.

ج- بين أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D و نصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة

النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها و نصف قطرها .

تصليح إختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = -1 + x + 2 \ln(x)$
أ- دراسة تغيرات الدالة g على $]0, +\infty[$

ب) جدول تغيرات الدالة g

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$	+	○	+
$g(x)$	$-\infty$	\nearrow	$+\infty$

$$g'(x) = 1 + \frac{2}{x} = \frac{x+2}{x}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = -\infty \end{cases}$$

ج) حساب $g(1)$: $g(1) = -1 + 1 + 2 \ln(1) = 0$

• إشارة $g(x)$ على المجال $]0, +\infty[$:

لأ : $g(x) < 0 \iff 0 < x < 1$

لأ : $g(x) > 0 \iff x > 1$

لأ : $g(1) = 0 \iff x = 1$

ب- استنتاج : لأ : نقوم بتغيير المتغير : $x = \frac{1}{X}$: $0 < \frac{1}{X} < 1 \iff 1 < X$: $g(\frac{1}{X}) < 0$

نقوم بتغيير المتغير : $x = \frac{1}{X}$: $\frac{1}{X} > 1 \iff 1 > X > 0$: $g(\frac{1}{X}) > 0$

الجزء الثاني :

$$\begin{cases} f(x) = x - x^2 \ln x & ; x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) بين أن f دالة مستمرة في النقطة 0 على اليمين . علما أن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x \ln x) = 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x(1 - x \ln x)) = 0(1 - 0) = 0$$

(2) دراسة قابلية اشتقاق الدالة f في النقطة 0 على اليمين .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - x^2 \ln x) - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x - x^2 \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x \ln x)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 - x \ln x) = 1$$

ومنه الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في النقطة 0 .

• التأويل الهندسي للنتيجة المحصل عنها ؟ نفول أن المنحنى يقبل نصف ماس على اليمين في النقطة 0 ميله 1

(3) حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - x^2 \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x(1 - x \ln x)) = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty ; \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x \ln x) = -\infty \end{cases}$$

(4) أ- تبيان أن : $f'(x) = x.g(\frac{1}{x})$ مهما يكن $x \in]0, +\infty[$

$$\begin{cases} f'(x) = (x)' - (x^2 \ln x)' = 1 - [(2x) \times \ln x + (x^2) \times (\frac{1}{x})] \\ f'(x) = 1 - [(2x) \times \ln x + x] = 1 - x - 2x \ln x \\ f'(x) = 1 - x + 2x \ln x = x(\frac{1}{x} - 1 - 2 \ln x) = x(\frac{1}{x} - 1 + 2 \ln \frac{1}{x}) \\ f'(x) = x.g(\frac{1}{x}) \end{cases}$$

ب- جدول تغيرات الدالة f : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(\frac{1}{x})$ على المجال $]0, +\infty[$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	○	-
$f(x)$	0	\nearrow	$-\infty$

(5) تبيان أن المعادلة : $f(x) = 0$ تفضل حلا وحيدا α في المجال $]0, +\infty[$ وأن $1 < \alpha < 2$.

• الدالة f معرفة ومستمرة على المجال $]0, +\infty[$ فهي مستمرة على المجال $]1; 2[$

• الدالة f رتيبة (متزايدة تماما) على المجال $]1; 2[$

• وأن : $f(1) \times f(2) < 0$ مع : $f(1) = 1 > 0$ و $f(2) = -0,77 < 0$

ومنه حسب نظرية القيم المتوسطة فإن المعادلة : $f(x) = 0$ تفضل حلا وحيدا α في المجال $]1; 2[$

(6) أ- التحقق أن معادلة نصف المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0 هي : $y = x$.

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

$$\text{معادلة المماس : } y = f'(0)(x - 0) + f(0) = 1 \cdot (x - 0) + 0$$

$$y = x$$

ب- تبيان انه لا $x \in]0, 1[$ فإن $f(x) > x$

نعلم أنه لا : $1 > x > 0 \iff \ln(x) < 0 \iff x^2 \cdot \ln(x) < 0$

$1 > x > 0 \iff x^2 \cdot \ln(x) > 0$

$1 > x > 0 \iff x - x^2 \cdot \ln(x) > x$

ومنه $1 > x > 0 \iff f(x) > x$

ج- الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (T)

لدينا سابق $1 > x > 0 \iff f(x) > x$ أي : $f(x) - x > 0$

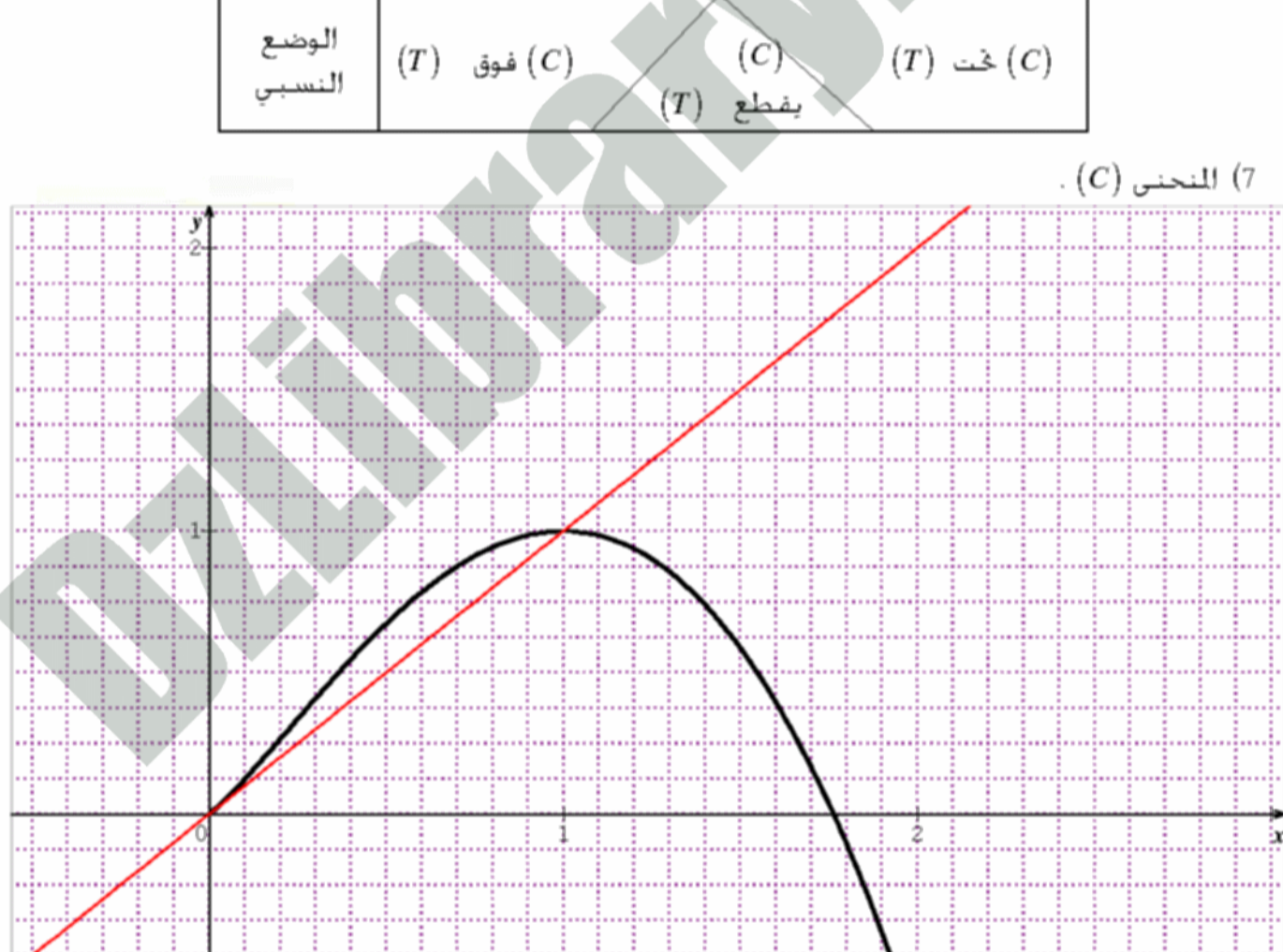
ومن جهة : $x > 1 \iff \ln(x) > 0 \iff x^2 \cdot \ln(x) > 0$

$x > 1 \iff -x^2 \cdot \ln(x) < 0$

$x > 1 \iff f(x) - x < 0$ ومنه نستنتج أن المنحنى (C) فوق المماس (T)

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$	+	○	-
الوضع النسبي	فوق (C) فوق (T)	(C) يقطع (T)	(C) تحت (T)

(7) المنحنى (C) .



التمرين الثاني

$$(\Delta') : \begin{cases} x = 6 + \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 5 + \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad (\Delta) : \begin{cases} x = 3 + \lambda \\ y = 2 + \frac{1}{2}\lambda \\ z = -2 - 2\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

1. تبيان أن المستقيمين (Δ) و (Δ') ليسا من نفس المستوى .

$$\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ و } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$\begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-13}{3} \end{cases} \text{ خذ : } \begin{cases} 6 + \alpha = 3 + \lambda \\ 5 + \alpha = -2 - 2\lambda \end{cases}$$

النقطة من (Δ_1) من أجل $\lambda = \frac{-4}{3}$ هي $(\frac{5}{3}; \frac{4}{3}; \frac{2}{3})$ و النقطة من (Δ_2) من أجل $\alpha = \frac{-13}{3}$ هي $(\frac{5}{3}; \frac{29}{3}; \frac{2}{3})$

إذن المستقيمان (Δ_1) و (Δ_2) ليسا من نفس المستوى .

2. A نقطة كيفية من (Δ) و B نقطة كيفية من (Δ') .

• تعيين إحداثيات النقطتين A و B بحيث يكون المستقيم (AB) عمودياً على كل من (Δ) و (Δ')

$$\vec{AB} = \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 + \alpha - \lambda \\ -1 - 2\alpha - \lambda \\ 7 + \alpha + 2\lambda \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{AB} = 0 \implies (3 + \alpha - \lambda)(1) + (-1 - 2\alpha - \lambda)(-2) + (7 + \alpha + 2\lambda)(-2) = 0$$

$$\vec{u}_2 \cdot \vec{AB} = 0 \implies (3 + \alpha - \lambda)(1) + (-1 - 2\alpha - \lambda)(-2) + (7 + \alpha + 2\lambda)(1) = 0$$

$$A(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}) ; B(\frac{14}{3}; \frac{11}{3}; \frac{11}{3}) \iff \begin{cases} \lambda = \frac{-4}{3} \\ \alpha = \frac{-4}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \vec{u}_1 \cdot \vec{AB} = 0 \implies \alpha + 2\lambda + 4 = 0 \\ \vec{u}_2 \cdot \vec{AB} = 0 \implies 2\alpha + \lambda + 4 = 0 \end{cases}$$

• حساب الطول AB : $AB = \sqrt{(\frac{14}{3} - \frac{5}{3})^2 + (\frac{11}{3} - \frac{2}{3})^2 + (\frac{11}{3} - \frac{2}{3})^2} = 3\sqrt{3}$.

3. عين معادلة للمستوي (P) الذي يشمل المستقيمين (Δ) و (Δ') .

أي المستوي الذي شعاعه الناظمي يكون موازياً لـ $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ ويشمل النقطة $A(\frac{5}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$ مثلاً

$$(P) : x + y + z - 3 = 0 \quad / \quad (P) : 3(x - \frac{5}{3}) + 3(x - \frac{2}{3}) + 3(x - \frac{2}{3}) = 0 \quad \text{أي : } \vec{AM} \cdot \vec{AB} = 0$$

4. حساب المسافة بين نقطة كيفية من (Δ') و المستوي (P) .

$$d(N; (P)) = \frac{|(6 + \alpha) + (1 - 2\alpha) + (5 + \alpha) - 3|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$$

نلاحظ أنها تبقى ثابتة و مساوي لـ الطول AB

التمرين الثالث

1. تحديد A' و B' صورتي النقطتين A و B بالتطبيق f على التوالي . $z' = z^2 - 4z$

1. $z_A = 1 - i \implies z_{A'} = (1 - i)^2 - 4(1 - i) = -2i - 4 + 4i = -4 + 2i$

2. $z_B = 3 + i \implies z_{B'} = 9 + 6i - 12 - 4i = -4 + 2i$

2. أ- تبيان أن $OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $z^2 - 3z + 3 = 0$

$OMCM'$ متوازي الأضلاع إذا وفقط إذا كان : $\vec{OM} = \vec{M}'C$ أو الأقطار متناصفه

أي : $z' - 0 = -z - 3$ ومنه $z' = -z - 3$. وبالتالي : $z^2 - 3z + 3 = 0$

ب- حل في المجموعة C المعادلة : $z^2 - 3z + 3 = 0$

$$z^2 - 3z + 3 = 0 \quad \text{المميز } \Delta = 9 - 12 = -3 = 3i^2 \implies z_1 = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{و} \quad z_2 = \frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3. أ- عبر عن $z' + 4$ بدلالة $z - 2$. $z' + 4 = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2$

ب- استنتاج أن : $|z' + 4| = |z - 2|^2$ ثم عبر عن $\arg(z' + 4)$ بدلالة $\arg(z - 2)$.

$$(z' + 4) = z^2 - 4z + 4 = (z - 2)^2 \implies \begin{cases} |z' + 4| = |z - 2|^2 \\ \arg(z' + 4) = 2 \arg(z - 2) + 2k\pi \end{cases}$$

ج- تبيان أنه إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 2 فإن النقطة M' صورة النقطة بالتطبيق f تنتمي إلى دائرة ينبغي تحديد مركزها ونصف قطرها .

إذا كانت النقطة M تنتمي إلى الدائرة التي مركزها D ونصف قطرها 2 هذا يعني : $|z_D - z| = 2$

أي : $|z' - 2| = 2$. بتربيع الطرفين : $|z' - 2|^2 = 2^2 = 4$. أي : $|z' - 4| = 4$

ومنه فإن النقطة M' تنتمي إلى الدائرة التي مركزها النقطة $H(4, 0)$ ونصف قطرها 4 .