

اختبار الثلاثي الثاني(07 نقاط) التمرين الأول :

(u_n) متتالية عددية معرفة بـ $u_1 = 2$ ومن أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} = \frac{(n+1)u_n + n - 1}{2n}$.

(1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n \geq 1$.

(2) برهن أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = n \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1$ واحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

(3) بين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+1} - u_n = \frac{(1-n)(u_n - 1)}{2n}$ ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ، ماذا تستنتج ؟

(4) (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ بـ : $v_n = \frac{u_n - 1}{n}$.

(أ) برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول.
(ب) عبر عن v_n بدلالة n .

(5) احسب المجموع : $S_n = v_1 + v_2 + \dots + v_n$.

(6) احسب المجموع : $S'_n = \ln(u_1 - 1) + \ln(u_2 - 1) + \dots + \ln(u_n - 1)$.

(06 نقاط) التمرين الثاني :

يحتوي صندوق على 10 قريصات لا نفرق بينها باللمس ، منها أربع قريصات بيضاء تحمل الرقم 0 وثلاث قريصات حمراء تحمل الرقم 7 و قريصتان بيضاوان تحملان الرقم 2 وقريصة حمراء تحمل الرقم 5 .

نسحب عشوائيا وفي آن واحد 4 قريصات من هذا الصندوق .

نعتبر الحوادث الآتية :

A "جميع القريصات تحمل أرقاما مختلفة مثنى مثنى"

B "نستطيع تشكيل العدد أرقاما 2000"

C "جميع القريصات بيضاء"

D "جميع القريصات من نفس اللون ."

E "على الأقل توجد قريصة رقمها يختلف عن باقي أرقام القريصات الأخرى".

(1) أ) بين أن $P(B) = \frac{4}{105}$.

ب) احسب : $P(A)$ ، $P(C)$ ، $P(D)$ و $P(E)$.

ج) نفرض أن الحادثة C محققة ، احسب احتمال الحادثة B .

(2) نعتبر القيم النقدية الآتية الموافقة لسحب 4 كريات بالطريقة السابقة حيث :

- تشكيل العدد 5000 يوافقه 75 دينارا .

- تشكيل العدد 7000 يوافقه 50 دينارا .

- تشكيل العدد 2000 يوافقه 20 دينارا .

- تشكيل العدد 0000 يوافقه 25 دينارا بقيمة سالبة .

- بقية الحالات توافقها 5 دنانير بقيمة سالبة .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يساوي القيمة النقدية الموافقة للسحبة .

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X واحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

(07 نقاط) التمرين الثالث :

(1) أ) حل في مجموعة الأعداد المركبة \mathbb{C} المعادلة ذات المجهول z التالية : $z^2 - 2z + 4 = 0$.

حيث z_1 الحل الذي جزؤه التخيلي موجب .

ب) اكتب z_1 و z_2 على الشكل الأسّي .

ج) استنتج حلول المعادلة : $(i\bar{z} + 2 - i)^2 - 2(i\bar{z} + 2 - i) + 4 = 0$.

د) عين طويلة وعمدة العددين المركبين z_1^2 و z_2^2 ثم استنتج الشكل الجبري لـ z_1^2 و z_2^2 .

(2) المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

A ، B ، A' و B' أربع نقط من المستوي لواحقتها : $z_A = 1 + i\sqrt{3}$ ، $z_B = 1 - i\sqrt{3}$ ،

$z_{A'} = -2 + 2i\sqrt{3}$ و $z_{B'} = -2 - 2i\sqrt{3}$ على الترتيب .

أ) احسب $\overrightarrow{z_{AB}}$ و $\overrightarrow{z_{A'B'}}$ لاحقتي الشعاعين \overrightarrow{AB} و $\overrightarrow{A'B'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ب) احسب $\overrightarrow{z_{AA'}}$ و $\overrightarrow{z_{BB'}}$ لاحقتي الشعاعين $\overrightarrow{AA'}$ و $\overrightarrow{BB'}$ على الترتيب ، ماذا تستنتج؟

ج) ما طبيعة الرباعي $AA'BB'$ ؟

د) اكتب : $\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_B}$ على الشكل المثلثي واستنتج طبيعة المثلث $AA'B'$.

انتهى الموضوع

عرفي حال اختبار التفاضلي الثاني

ع 3

المسئولين

لدينا:
$$U_{n+1} = \frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{(n+1) \left[n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1 \right] + n - 1}{2n}$$

$$= \frac{n(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1}{2n}$$

$$= \frac{(n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1}}{2} + 1$$

$$= (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

ومن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع

فإن $P(n)$ صحيحة أي أن:

$$U_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1 \quad n \in \mathbb{N}^*$$

حساب $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(n \left(\frac{1}{2} \right)^n \left(\frac{1}{2} \right)^{-1} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2n \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \frac{n}{2^n} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{n}{e^{n \ln 2}} + 1 \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{1}{\ln 2} \times \frac{n}{e^{n \ln 2}} + 1 \right)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{\ln 2} \times \frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} + 1 \right) = 1$$

لأن $\frac{n \ln 2}{e^{n \ln 2}} = \frac{1}{e^{n \ln 2}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

لأن $\frac{e^{n \ln 2}}{n \ln 2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ (التزايد المقارن)

(1) نضع $P(n): U_n \geq 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$: $U_1 = 2 > 1$ ومنه $P(1)$ صحيحة

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ أي أن: $U_n \geq 1$

ونبرهن صحة $P(n+1)$ أي أن:

من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$: $U_{n+1} \geq 1$

لدينا:

$$(n+1)U_n \geq n+1$$

$$(n+1)U_n + n - 1 \geq n+1 + n - 1$$

$$(n+1)U_n + n - 1 \geq 2n$$

$$\frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} \geq \frac{2n}{2n}$$

$$U_{n+1} \geq 1$$

$P(n+1)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

لكن حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن $P(n)$

صحيحة أي أن: $U_n \geq 1$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

(2) نضع $P(n): U_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1$ حيث $n \in \mathbb{N}^*$

من أجل $n=1$: $U_1 = 1 + 1 = 2$

ومنه $P(1)$ صحيحة.

نفرض أن $P(n)$ صحيحة من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_n = n \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} + 1$$

ونبرهن صحة الخاصية $P(n+1)$ أي:

$$n \in \mathbb{N}^* \text{ من أجل كل } U_{n+1} = (n+1) \left(\frac{1}{2} \right)^n + 1$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{(n+1)U_n + n - 1 - 2n}{2n} \times \frac{n}{U_n - 1} \\
 &= \frac{(n+1)U_n - n - 1}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1} \\
 &= \frac{(n+1)U_n - (n+1)}{2n(n+1)} \times \frac{n}{U_n - 1} \\
 &= \frac{U_n - 1}{2(U_n - 1)} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

فمنه (V_n) متتالية هندسية أولها $V_1 = \frac{U_2 - 1}{1} = 1$ وحدها الأول $q = \frac{1}{2}$
 بـ التعبير عن V_n بدلالة n :
 $V_n = V_1 \times q^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\begin{aligned}
 S_n &= V_1 + V_2 + \dots + V_n \quad (5) \\
 &= V_1 \left(\frac{1 - q^n}{1 - q} \right) = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \\
 &= 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 S'_n &= L_n(U_1 - 1) + L_n(U_2 - 2) + \dots + L_n(U_n - 1) \quad (6) \\
 &= L_n(1V_1 + 1 - 1) + L_n(2V_2 + 1 - 1) + \dots + \\
 &L_n(nV_n + 1 - 1) \\
 &= L_n(1V_1) + L_n(2V_2) + \dots + L_n(nV_n) \\
 &= L_n(1) + L_n(V_1) + L_n(2) + L_n(V_2) + \dots + \\
 &L_n(n) + L_n(V_n) \\
 &= L_n(1) + L_n(2) + \dots + L_n(n) \\
 &+ L_n(V_1) + L_n(V_2) + \dots + L_n(V_n) \\
 &= L_n(1 \times 2 \times 3 \times \dots \times n) + L_n(V_1 \times V_2 \times \dots \times V_n) \\
 &= L_n(n!) + L_n\left(\left(\frac{1}{2}\right)^0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^1 \times \dots \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 U_{n+1} - U_n &= \frac{(n+1)U_n + n - 1}{2n} - U_n \quad (3) \\
 &= \frac{nU_n + U_n + n - 1 - 2nU_n}{2n} \\
 &= \frac{U_n - nU_n + n - 1}{2n} \\
 &= \frac{(1-n)U_n - (1-n)}{2n} \\
 &= \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}
 \end{aligned}$$

- استنتاج اتجاه تغير المتتالية (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{(1-n)(U_n - 1)}{2n}$$

$2n > 0$ في أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ، إذن إشارة الفرق هي إشارة البسط .

لدينا حسب السؤال (1) : $U_n \geq 1$ ومنه $U_n - 1 \geq 0$ و $1 - n \leq 0$ من أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$

$$U_{n+1} - U_n \leq 0$$

لأن

في أجل كل $n \in \mathbb{N}^*$ ومنه (U_n) متناقصة تماما على \mathbb{N}^* .

- الاستنتاج :

بما أن $U_n \geq 1$ (محدودة من الأسفل) ومتناقصة تماما على \mathbb{N}^* فهي متقاربة

(متقاربة نحو 1)

$$\frac{V_{n+1}}{V_n} = \frac{\frac{U_{n+1} - 1}{n+1}}{\frac{U_n - 1}{n}} \quad (4)$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{U_{n+1} - 1}{n+1} \times \frac{n}{U_n - 1} \\
 &= \frac{(n+1)U_n + n - 1 - 1}{2n} \times \frac{n}{U_n - 1}
 \end{aligned}$$

$$P(X=50) = \frac{C_4^3 \times C_3^1}{210} = \frac{12}{210}$$

$$P(X=75) = \frac{C_4^3 \times C_2^1}{210} = \frac{4}{210}$$

$$P(X=-5) = 1 - \left(\frac{1}{210} + \frac{8}{210} + \frac{12}{210} + \frac{4}{210} \right) = 1 - \frac{25}{210} = \frac{185}{210}$$

$X=x_i$	-5	-25	20	50	75
$P(X=x_i)$	$\frac{185}{210}$	$\frac{1}{210}$	$\frac{8}{210}$	$\frac{12}{210}$	$\frac{4}{210}$

حساب التمام الرياياتي:

$$E(X) = (-5) \times \frac{185}{210} - 25 \times \frac{1}{210} + 20 \times \frac{8}{210} + 50 \times \frac{12}{210} + 75 \times \frac{4}{210} = \frac{11}{21}$$

التمرين الثالث:

$$Z^2 - 2Z + 4 = 0 \quad * \text{أ} \quad (1)$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4(1)(4) = 4 - 16 = -12 = 12i^2$$

$$\sqrt{\Delta} = 2\sqrt{3}i$$

$$Z_1 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + \sqrt{3}i$$

$$Z_2 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - \sqrt{3}i$$

$$Z_1 = 2e^{\frac{\pi}{3}i} \quad S = \{1 - \sqrt{3}i, 1 + \sqrt{3}i\} \quad * \text{ب}$$

$$Z_2 = 2e^{-\frac{\pi}{3}i}$$

$$i\bar{Z} + 2 - i = X \quad * \text{ج}$$

$$X^2 - 2X - 4 = 0: \text{شرح المعادلات من الشكل}$$

$$= \ln(n!) + \ln\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2+\dots+(n-1)}\right) = \ln(n!) + \ln\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

التمرين الثاني:

(1) عدد الحالات = الطول الممكنة C_{10}^4

$$P(B) = \frac{C_2^1 \times C_4^3}{210} = \frac{4}{105} \quad * \text{أ}$$

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_2^1 \times C_1^1}{210} = \frac{56}{210} = \frac{8}{105} \quad * \text{ب}$$

$$P(C) = \frac{C_6^4}{210} = \frac{15}{210} = \frac{1}{14}$$

$$P(D) = \frac{C_6^4 + C_4^4}{210} = \frac{15+1}{210} = \frac{16}{210} = \frac{8}{105}$$

حساب P(E):

لأن الحادث \bar{E} "لا توجد أي فردية"

فهما مختلف عن باقي أرقام القريدسات

الأخرى

$$P(\bar{E}) = \frac{C_4^4}{210} = \frac{1}{210}$$

$$P(E) = 1 - \frac{1}{210} = \frac{209}{210} \quad * \text{د}$$

$$P_C(B) = \frac{P(C \cap B)}{P(C)} = \frac{P(B)}{P(C)} = \frac{8}{15} \quad * \text{هـ}$$

$$X = \{-5; -25; +20; +50; +75\} \quad (2)$$

$$P(X=-25) = \frac{C_4^4}{C_{10}^4} = \frac{1}{210}$$

$$P(X=20) = \frac{C_4^3 \times C_2^1}{210} = \frac{8}{210}$$

$$\vec{Z_{AA'}} = z_{A'} - z_A = -3 + \sqrt{3}i$$

$$\vec{Z_{BB'}} = z_{B'} - z_B = -3 - \sqrt{3}i$$

الشعاعان $\vec{AA'}$ و $\vec{BB'}$ غير متساويان خطياً
 جـ الرباعي $AA'B'B'$ شبه منحرف.

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} = \frac{-3 + \sqrt{3}i}{-3 - \sqrt{3}i} \times \frac{-3 + 3\sqrt{3}i}{-3 + 3\sqrt{3}i}$$

$$= \frac{9 - 9\sqrt{3}i - 3\sqrt{3}i - 9}{36} = \frac{-12\sqrt{3}i}{36} = -\frac{\sqrt{3}i}{3}$$

$$\left| \frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} \right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} = \frac{\sqrt{3}}{3} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right)$$

* استخراج طبيعة المثلث $AA'B'$: منته

$$\left| \frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A} \right| = \frac{AA'}{AB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$AA' = \frac{\sqrt{3}}{3} AB'$$

$$\arg\left(\frac{z_{A'} - z_A}{z_{B'} - z_A}\right) = (\vec{AB'}, \vec{AA'}) = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$

منته $AA'B'$ مثلث قائم الزاوية في A.

منته : $x = 1 + \sqrt{3}i$

$$i\bar{z} + 2 - i = 1 + \sqrt{3}i$$

$$\bar{z} = \frac{1 + \sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1 + \sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1 + (1 + \sqrt{3})i}{i} \left(\frac{-i}{-i} \right) = i + 1 + \sqrt{3}$$

$$z = 1 + \sqrt{3} - i$$

منته :

أو : $x = 1 - \sqrt{3}i$

$$i\bar{z} + 2 - i = 1 - \sqrt{3}i$$

$$\bar{z} = \frac{1 - \sqrt{3}i - 2 + i}{i} = \frac{-1 + (1 - \sqrt{3})i}{i}$$

$$\bar{z} = \frac{-1 + (1 - \sqrt{3})i}{i} \left(\frac{-i}{-i} \right) = i + 1 - \sqrt{3}$$

$$z = 1 - \sqrt{3} - i$$

منته :

$$S = \{ 1 - \sqrt{3} - i, 1 + \sqrt{3} - i \}$$

لدينا : $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ منته : $z_1^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$

لذا $|z_1| = 4$ و $\arg(z_1^2) = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

و $z_2 = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ منته : $z_2^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

لدينا : $|z_2| = 4$ و $\arg(z_2^2) = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$

$$z_1^2 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}} = 4 \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_1^2 = 4 \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_1^2 = -2 + 2\sqrt{3}i$$

$$z_2^2 = 4e^{-i\frac{2\pi}{3}} = 4 \left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \right)$$

$$z_2^2 = 4 \left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$z_2^2 = -2 - 2\sqrt{3}i$$

$$\vec{Z_{AB}} = z_B - z_A = 1 - i\sqrt{3} - 1 - i\sqrt{3} = -2\sqrt{3}i$$

$$\vec{Z_{A'B'}} = z_{B'} - z_{A'} = -2 - 2i\sqrt{3} + 2 - 2i\sqrt{3} = -4i\sqrt{3}$$

لاحظ أن $\vec{Z_{A'B'}} = 2\vec{Z_{AB}}$
 لذا الشعاعان \vec{AB} و $\vec{A'B'}$ متساويان خطياً.