مديرية التربية لولاية ميلة

ثانوية بن طبال سليمان – ميلة 2024/2023

القسم: 3 رياضي . **الاختبار الثاني في مادة الرياضيات** المدة: ساعتين

التمرين الأول :

1) أ - ادرس تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 13 .

ب – بين أن العدد $5\times 2024^{1445}+10\times 1962^{1954}+2025^{1446}$ مضاعف للعدد 13 .

ج – ماهو باقي قسمة العدد $2024^{2026^{2027}}$ على 13 ؟

2) نعتبر في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $5x-2y=13$.

أ - بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب – بين أنه إذا كانت الثنائية (x,y) حلا للمعادلة (E) فإن $x\equiv 1[2]$ ثم حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة (E) .

3) ليكن d القاسم المشترك الأكبر للعددين x و y حلول المعادلة (E) .

أ – ماهي القيم الممكنة لـ d ؟

ب – عين الثنائيات (x,y) حلول المعادلة (E) بحيث : $d=13$.

4) عين مجموعة قيم العدد الطبيعي n التي تحقق : $\begin{cases} n+3^n+2\equiv 2025[4] \\ n\equiv 1445[3] \end{cases}$

التمرين الثاني:

- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بـ $u_0=\frac{1}{2}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\frac{9u_n+2}{u_n+8}$.

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le 2$.

2) أ - بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $2-u_{n+1}\le \frac{7}{8}(2-u_n)$.

ب – استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le 2-u_n\le \frac{3}{2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$.

ج – نضع : $S_n=u_0+u_1+u_2+...+u_n$.

- بين أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n\ge 2n-10+\frac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$.

3) نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\frac{u_n-2}{u_n+1}$.

أ – أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية معينا أساسها وحدها الأول . ثم اكتب عبارة v_n بدلالة n .

ب – احسب بدلالة n المجموع : $S_n'=\left(v_0-\frac{3}{20^0}\right)+10\left(v_1-\frac{3}{20^1}\right)+...+10^n\left(v_n-\frac{3}{20^n}\right)$.

التمرين الثالث:

I) جــدول التغيرات المقابل هو للدالــة g المعرفـــة على $\Re$ بـــ : $g(x)=1+(1-x)e^{1-x}$.

1) حـــدد إشارة $g(x)$ على $\Re$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	+	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{e-1}{e}$	$\nearrow$	1

II) f الدالـــة المعرفـــة على $\Re$ بـــ : $f(x)=x+1+xe^{1-x}$.

ليكن (C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$. $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$

1) احســـب $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ ثـم بين أن $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2) أ - بين أنـــه من أجـل كل $x\in\Re$: $f'(x)=g(x)$.

ب – استنتــج اتجاه تغير الدالـــة f ثم شكل جـدول تغيراتـــها .

3) بين أن المستقيم (Δ) الذي معادلتـــه $y=x+1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) عند $+\infty$ ثم ادرس وضعيـة (C_f) بالنسبـة إلى (Δ) .

4) أ - بين أن (C_f) يقبل مماسا وحيدا (T) موازيا للمستقيم (Δ) ثـم اكتـب معادلـة لـــه .

ب – بين أن (C_f) يقبل نقطـــة إنعطاف ω يطلـــب تعييـن إحداثييـــها .

5) أ – احســـب $f(0)$ ثـم أنشيء (Δ) ؛ (T) و (C_f) . (نأخـذ $f(-0,25)=0$)

ب - عين قيـــم الوسيـــط الحقيقي m التي من أجلها المعادلـــة $e^x\left(f\left(e^m\right)-1\right)=ex$ تقبـــل حليـن موجـبين تمامـــا .

6) أ - باستعمال التكامل بالتجزئـة ؛ جـــد دالـــة أصليـــة للدالـــة $x\mapsto xe^{1-x}$ والتي تنعـدم من أجـل 0 .

ب - ليكــن λ عــددا حقيقـيا موجـبا تماما .

- احسـب بدلالـــة λ المساحـــة $S(\lambda)$ للحيز المستوي المحــدد بـــ (C_f) و (Δ) والمستقيمات التي معادلاتها $x=0$ ؛ $x=\lambda$ ؛ $y=0$. احســب $\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)$.

7) برهن بالتراجـع أنــه من أجـل كل عـــدد طبيعي $n\geq 2$: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

حيث : f' ؛ f'' ؛ $f^{(3)}$ ؛ $f^{(4)}$ ...... $f^{(n)}$ المشتقات المتتابعـة للدالـــة f .

س د: 24/25

الإجابة النموذجية لاختبار الثلاثي الثاني في الرياضيات   القسم: 3 رياضي .

التمرين الأول   10ن

أ ① لدينا: $3^0\equiv1[13]$; $3^1\equiv3[13]$; $3^2\equiv9[13]$; $3^3\equiv1[13]$

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$	
$3^n\equiv$	1	3	9	[13]

$k\in\mathbb{N}$

ب/ تبيان أن: $5\times2024^{1445}+10\times1962^{1954}+2025^{1446}$ مضاعف لـ 13:

لدينا: $2024\equiv9[13]$ ومنه: $2024^{1445}\equiv3^{3(963)+1}[13]$

ومنه $2024^{1445}\equiv3[13]$

• ولدينا $1962\equiv12[13]$ ومنه $1962\equiv-1[13]$

ومنه $1962^{1954}\equiv1[13]$

• ولدينا $2025\equiv10[13]$ ومنه $2025\equiv-3[13]$

ومنه $2025^{1446}\equiv3^{3\times482}[13]$ ومنه: $2025^{1446}\equiv1[13]$

ومنه: $5\times2024^{1445}+10\times1962^{1954}+2025^{1446}\equiv26[13]$

ومنه $5\times2024^{1445}+10\times1962^{1954}+2025^{1446}\equiv0[13]$

ومنه العدد $5\times2024^{1445}+10\times1962^{1954}+2025^{1446}$ مضاعف لـ 13

ج/ لدينا: $2026\equiv1[3]$ ومنه $2026^{2027}\equiv1[3]$

ولدينا: $2024\equiv9[13]$ ومنه $2024^{2026^{2027}}\equiv3^{3k'+2}[13]$

ومنه: $2024^{2026^{2027}}\equiv9[13]$

B/2 لدينا: $PGCD(5,2)=1$ و $1/13$ ومنه المعادلة E تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ لدينا: $5x-2y=13$ ومنه: $5x=2y+13$

ومنه $5x\equiv13[2]$ ومنه $5x\equiv15[2]$ ومنه $x\equiv1[2]$

• حل المعادلة (E):

لدينا: $x\equiv1[2]$ ومنه $x=2k+1$ مع $k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في (E) نجد: $y=5k-4$

$S=\{(2k+1;5k-4)\}$; $k\in\mathbb{Z}$

B/3 لدينا: $d|x$ و $d|y$ ومنه $d|5x-2y$ ومنه $d|13$

ومنه $d=1$ أو $d=13$.

ب/ حسب خوارزمية اقليدس لدينا:

$2k+1=2(k-6)+13$ و $5k-4=2(2k+1)+k-6$

$k-6=13q+r$ $0\le r<13$

ولدينا: $PGCD(x,y)=PGCD(13,r)=13$

ومنه $r=0$ ومنه $k-6=13q$ ومنه $k=13q+6$

بالتعويض نجد: $(x,y)=\{(26q+13;65q+30)\}$

لدينا $\begin{cases}n+3^n+2\equiv2025[4]\\ n\equiv1445[3]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n+3^n\equiv3[4]\\ n\equiv2[3]\end{cases}$

ومنه: $\begin{cases}n+9\equiv3[4]\\ n\equiv2[3]\end{cases}$ ومنه $\begin{cases}n-2\equiv0[4]\\ n-2\equiv0[3]\end{cases}$

ومنه n-2 مضاعف لكل من 4 و 3 وبما أن 4 و 3 أوليان فيما بينهما فإن n-2 مضاعف لـ 3×4 ومنه:

ومنه $n-2\equiv0[12]$ ومنه $n=12p+2$, $p\in\mathbb{N}$

التمرين الثاني:

لدينا: $u_0=\frac12$ و $u_{n+1}=\frac{9u_n+2}{u_n+8}=9-\frac{70}{u_n+8}$

① البرهان بالتراجع أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $0\le u_n\le2$ ... $P(n)$

من أجل $n=0$ لدينا: $0\le u_0=\frac12\le2$ محققة.

نفرض صحة $P(n)$ ونبرهن صحة $P(n+1)$

لدينا: $0\le u_n\le2$ ومنه $\frac1{10}\le\frac1{u_n+8}\le\frac18$

ومنه $-\frac{70}{8}\le-\frac{70}{u_n+8}\le-7$ ومنه $0\le\frac14\le9-\frac{70}{u_n+8}\le2$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le2$.

2/أ/ تبيان أن: $2-u_{n+1}\le\frac78(2-u_n)$

$2-u_{n+1}=2-\frac{9u_n+2}{u_n+8}=\frac{-7u_n+14}{u_n+8}=\frac{7(2-u_n)}{u_n+8}$

لدينا: $0\le u_n\le2$ ومنه $\frac1{10}\le\frac1{u_n+8}\le\frac18$ ومنه:

$\frac7{u_n+8}\le\frac78$ ومنه: $\frac{7(2-u_n)}{u_n+8}\le\frac78(2-u_n)$

ومنه $2-u_{n+1}\le\frac78(2-u_n)$ $2-u_n\ge0$

ب/ استنتاج أن: $0\le2-u_n\le\frac32\left(\frac78\right)^n$

مما سبق لدينا: $2-u_{n+1}\le\frac78(2-u_n)$

ومنه $0\le2-u_n\le\frac78(2-u_{n-1})$

و $0\le2-u_{n-1}\le\frac78(2-u_{n-2})$

⋮

$0\le2-u_1\le\frac78(2-u_0)$

بالضرب طرفا لطرف نجد: $0\le2-u_n\le\frac32\left(\frac78\right)^n$

ج) لدينا: $S_n=u_0+u_1+\dots+u_n$

لدينا: $0\le2-u_0\le\frac32\left(\frac78\right)^0$

$0\le2-u_1\le\frac32\left(\frac78\right)^1$

⋮

$0\le2-u_n\le\frac32\left(\frac78\right)^n$

بالجمع نجد: $2+2+\dots+2-S_n\le\frac32\cdot\frac{1-\left(\frac78\right)^{n+1}}{1-\frac78}$

ومنه: $2n+2-S_n \leq \frac{3}{2}\times 8\left(1-\left(\frac{7}{8}\right)^{n+1}\right)$

$$-S_n \leq -2n-2+12-\frac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$$

ومنه: $S_n \geq 2n-10+\frac{3\times 7^{n+1}}{2\times 8^n}$

3/ $V_n=\frac{U_n-2}{U_n+1}$

أ/ بيان أن (V_n) هندسية:

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-2}{U_{n+1}+1}=\frac{\frac{9U_n+2}{U_n+8}-2}{\frac{9U_n+2}{U_n+8}+1}=\frac{7U_n-14}{10U_n+10}=\frac{7}{10}V_n$$

ومنه (V_n) هندسية أساسها $\frac{7}{10}$ وحدها الأول $V_0=-1$

ومنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$:

$$V_n=-\left(\frac{7}{10}\right)^n$$

ب/ $S'_n=\left(V_0-\frac{3}{2\cdot 10^0}\right)+10\left(V_1-\frac{3}{20^1}\right)+\dots+10^n\left(V_n-\frac{3}{20^n}\right)$

لدينا $10^n\left(V_n-\frac{3}{20^n}\right)=10^n\left(-\left(\frac{7}{10}\right)^n-\frac{3}{20^n}\right)=-7^n-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$

بوضع $w_n=-3\left(\frac{1}{2}\right)^n$، $t_n=-7^n$

نجد:

$$S'_n=t_0+t_1+\dots+t_n+w_0+w_1+\dots+w_n$$

$$=-\frac{1-7^{n+1}}{1-7}-3\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1-7^{n+1}}{6}-6\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$$

التمرين الثالث:

I) إشارة $g(x)$:

x	$-\infty$ $+\infty$
$g(x)$	$+$

II) $f(x)=x+1+xe^{1-x}$

1) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x+1+\frac{x}{e^x}e\right]=+\infty$

---

2) أ/ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)=g(x)$

ب/ من أجل كل $x\in\mathbb{R}$ إشارة $f'(x)$ نفس إشارة $g(x)$ ومنه f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3/ أ) لدينا: $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-(x+1)]=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{1-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}e=0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

دراسة الوضع النسبي: $f(x)-(x+1)=xe^{1-x}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x)-(x+1)$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f) تحت (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $A(0,1)$	(C_f) فوق (Δ)

4/ أ/ نضع $f'(x)=1$ ومنه $1+(1-x)e^{1-x}=1$

ومنه: $(1-x)e^{1-x}=0$ ومنه $1-x=0$ أي $x=1$

ومنه (C_f) يقبل مماسا (T) موازيا لـ(Δ) في النقطة ذات الفاصلة 1 معادلته: $(T): y=x+2$

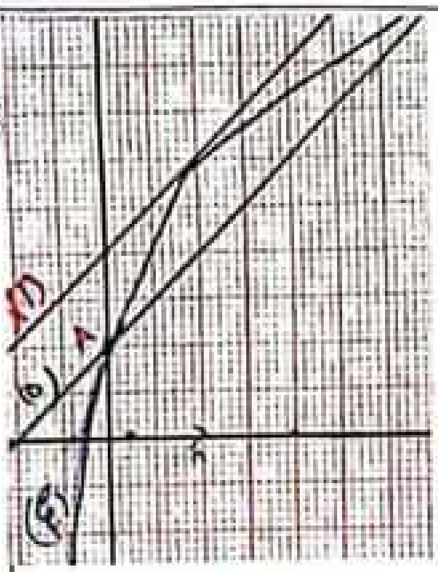
ب/ بيان أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتها:

لدينا من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f''(x)=-(2-x)e^{1-x}$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

ومنه (C_f) يقبل نقطة انعطاف احداثيتها $(2,3+2e^{-1})$

5/ أ/ الإنشاء



ب/ تعيين قيم m التي من أجلها تقبل المعادلة حلان موجبان تماما

لدينا $e^x(f(e^m)-1)=ex$

ومنه $f(e^m)-1=e\cdot xe^{-x}$

$f(e^m)=1+xe^{1-x}$

ومنه $f(x)=x+f(e^m)$

حلول المعادلة هي فواصل نقط تقاطع (C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y=x+f(e^m)$ (الموازي لـ (Δ) و (T))

من أجل $1<f(e^m)<2$ المعادلة تقبل حلان موجبان

ومنه $e^m\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ أي: $m\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

---

6) أ) حساب $\int_0^x te^{1-t}dt$:

نضع $u(t)=t$ ومنه $u'(t)=1$

$v'(t)=e^{1-t}$، $v(t)=-e^{1-t}$

$$\int_0^x te^{1-t}dt=\left[-te^{1-t}\right]_0^x-\int_0^x -e^{1-t}dt$$

$$=(-x-1)e^{1-x}+e$$

ب/ حساب $S(\lambda)$

$$S(\lambda)=\int_0^\lambda f(x)-(x+1)dx=\int_0^\lambda xe^{1-x}dx=$$

$$=(-\lambda-1)e^{1-\lambda}+e$$

$\lim\limits_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\left[-\frac{\lambda}{e^\lambda}e-e^{1-\lambda}+e\right]=e$

---

7) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$$

لدينا من أجل $n=2$: $f''(x)=-(2-x)e^{1-x}$ محققة. ①

نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n ونبرهن صحتها من أجل $n+1$.

لدينا: $f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$

ومنه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$:

$$f^{(n+1)}(x)=-(-1)^{n-1}e^{1-x}-(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$$

$$=-(-1)^{n-1}(1+n-x)e^{-x+1}$$

$$=(-1)^n(n+1-x)e^{-x+1}$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $n+1$ ... ②

ومنه نستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n\geq 2$ أن:

$$f^{(n)}(x)=(-1)^{n-1}(n-x)e^{-x+1}$$