

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (6 نقاط) :

يحتوي صندوق  $U$  على 10 كرات: 3 منها بيضاء و 7 سوداء و يحتوي صندوق  $V$  على 10 كرات: 7 منها بيضاء و 3 سوداء (الكرات لا تفرق بينها باللمس) .

**I** ن سحب عشوائيا كرة من الصندوق  $U$ : اذا كانت بيضاء نعيدها الى نفس الصندوق و ن سحب منه عشوائيا 3 كرات في أن واحد. أما اذا كانت سوداء فنضعها في الصندوق  $V$  و ن سحب منه عشوائيا 3 كرات على التوالي و بدون ارجاع. نعتبر الحادثتين:

$A$ : الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق  $U$ .

$B$ : الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق  $V$ .

**1** أحسب كل من:  $P(A)$  و  $P(B)$ .

**2** استنتج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء .

**3** اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو احتمال أن تكون من الصندوق  $U$ .

**II** ن فرغ محتوى الصندوقين  $U$  و  $V$  في كيس غير شفاف و نضيف له  $n$  كرة حمراء ( $n \geq 2$ ). ن سحب عشوائيا من الكيس كرتان على التوالي مع الإرجاع. نسمي  $X$  المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

**1** برر أن قيم المتغير العشوائي  $X$  هي:  $\{n-2 ; n-1 ; n\}$ .

**2** عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي  $X$  .

**3** نضع  $n=2$  ، احسب الأمل الرياضي، التباين و الإنحراف للمتغير العشوائي  $X$ .

التمرين الثاني (5 نقاط) :

نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على  $\square$  كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases}$$

نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :  $v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$  و  $w_n = 5^n \times u_n$ .

**1** بين أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$ ، ثم اكتب  $v_n$  بدلالة  $n$ .

**2** أ) بين أن المتتالية  $(w_n)$  حسابية أساسها 5.

ب) اكتب  $w_n$  بدلالة  $n$ ، ثم استنتج  $u_n$  بدلالة  $n$ .

**3** نضع من أجل كل عدد طبيعي  $n$  :

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n \quad \text{و} \quad S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+2020} \quad ، \quad S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$$

✓ أحسب  $S_n$  ،  $S'_n$  و  $P_n$  بدلالة  $n$ .

**التمرين الثالث (9 نقاط)**

**I** نعتبر في مجموعة الأعداد المركبة  $\square$  كثير الحدود  $P(z)$  حيث:  $P(z) = z^3 + (1 - i\sqrt{3})z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i$ .

**1** عين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$  حيث من أجل كل عدد مركب  $z$ :  $P(z) = (z - 1 - i\sqrt{3})(z^2 + az + b)$ .

**2** حل في مجموعة الأعداد المركبة  $\square$  المعادلة:  $P(z) = 0$ .

**II** نعتبر في المستوي المركب المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O; \vec{u}, \vec{v})$  النقط:  $A, B, C, D$  التي لواحقها

على الترتيب هي:  $z_A = -1 + i, z_B = \bar{z}_A, z_C = 1 + i\sqrt{3}, z_D = -z_A$  و

**1** أكتب العددين المركبان:  $z_A, z_C$  على الشكل الأسّي، استنتج الشكل الأسّي لكل من  $z_B, \frac{z_A}{z_C}$ .

**2** أكتب  $\frac{z_A}{z_B}$  على الشكل الجبري ثم على الشكل الأسّي، استنتج طبيعة المثلث  $OAB$ .

**3** اكتب العدد المركب  $\frac{z_C}{z_A}$  على الشكل الجبري ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ:  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ .

**4** عين قيم العدد الطبيعي  $n$  بحيث يكون العدد:  $\left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$  تخيلي صرف.

**5** عين  $(E_1)$  و  $(E_2)$  مجموعتي النقط  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  حيث:

$$(E_1): |z + 1 - i| = |iz - 1 - i|$$

$$(E_2): \text{Arg}(z - 1 - \sqrt{3}i) = \text{Arg}(\bar{z} - 1 + \sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \square)$$

**6** نعتبر التحويل النقطي  $T$  الذي يرفق بكل نقطة  $M$  من المستوي ذات اللاحقة  $z$  النقطة  $M'$  ذات اللاحقة  $z'$  و الذي يحول النقطة  $A$  إلى  $B$  و يحول  $B$  إلى  $D$ .

**a.** بين أن العبارة المركبة للتحويل  $T$  هي:  $z' = iz$ .

**b.** عين طبيعة التحويل  $T$  و حدد عناصره المميزة.

**c.** عين  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$  صورة النقطة  $D$  بالتحويل  $T$ .

**d.** ماذا تستنتج بالنسبة إلى النقط  $A, B, C, D, E$ .

أستاذكم تمنى لكم كل التوفيق و  
النجاح - بن صافية -

## الإجابة المقترحة للإختبار الفصل الثاني:

### التمرين الأول: ☺:

**I** A: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء من الصندوق U.

B: الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء و من الصندوق V.

**1** حساب كل من:  $P(A)$  و  $P(B)$ :

$$P(B) = \frac{7}{10} \times \frac{A_7^3}{A_{11}^3} = \frac{49}{330} \quad \text{و} \quad P(A) = \frac{3}{10} \times \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

**2** استنتاج احتمال أن تكون الكرات الثلاثة المسحوبة بيضاء:

(نسميها الحادثة C): قد تكون بيضاء ومن الصندوق U او بيضاء و من الصندوق V.

$$P(C) = P(A) + P(B) = \frac{1}{30} + \frac{49}{330} = \frac{60}{330} = \frac{2}{11}$$

**4** اذا علمت أن الكرات الثلاث المسحوبة بيضاء، ما هو

احتمال أن تكون من الصندوق U:

$$P_C(U) = \frac{P(C \cap U)}{P(C)} = \frac{P(A)}{P(C)} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{11}} = \frac{1 \times 11}{30 \times 2} = \frac{11}{60}$$

**II** نسمي X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكرات الحمراء المتبقية في الكيس.

**1** برر أن قيم المتغير العشوائي X هي:  $\{n-2; n-1; n\}$ .

اذا سحبنا كرتان ليستا حمراواتان، يبقى في الكيس n كرة حمراء.

اذا سحبنا كرتان احدهما حمراء، يبقى في الكيس n-1 كرة حمراء.

اذا سحبنا كرتان حمراواتان، يبقى في الكيس n-2 كرة حمراء.

**2** قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X:

$$P(X = n) = \frac{20^2}{(n+20)^2} = \frac{400}{n^2 + 40n + 400}$$

$$P(X = n-1) = \frac{2(n^1 \times 20^1)}{(n+20)^2} = \frac{40n}{n^2 + 40n + 400}$$

$$P(X = n-2) = \frac{n^2}{(n+20)^2} = \frac{n^2}{n^2 + 40n + 400}$$

X	n	n-1	n-2
$P(X = x_i)$	$\frac{400}{n^2 + 40n + 400}$	$\frac{40n}{n^2 + 40n + 400}$	$\frac{n^2}{n^2 + 40n + 400}$

**3** نضع n = 2

X	2	1	0
$P(X = x_i)$	$\frac{400}{484}$	$\frac{80}{484}$	$\frac{4}{484}$

$$E(X) = \frac{2 \times 400 + 1 \times 80 + 0 \times 4}{484} = 1.8 \quad \checkmark \text{ الأمل الرياضي}$$

$$V(X) = \frac{2^2 \times 400 + 1^2 \times 80 + 0^2 \times 4}{484} - (1.8)^2 = 0.23 \quad \checkmark \text{ التباين}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{0.23} = 0.48 \quad \checkmark \text{ الانحراف}$$

التمرين الثاني: نعتبر المتتالية العددية  $(u_n)$  المعرفة على

$$\begin{cases} u_0 = 0 ; u_1 = 1 \\ u_{n+2} = \frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n \end{cases} \quad \text{كمايلي:}$$

$$\text{نضع: } w_n = 5^n \times u_n \quad \text{و} \quad v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

**1** اثبات أن المتتالية  $(v_n)$  هندسية أساسها  $\frac{1}{5}$ :

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+2} - \frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n} = \frac{\frac{2}{5}u_{n+1} - \frac{1}{25}u_n - \frac{1}{5}u_{n+1}}{u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n}$$

$$= \frac{\frac{1}{5}(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)}{(u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n)} = \frac{1}{5}$$

$$v_0 = u_1 - \frac{1}{5}u_0 = 1 \quad \text{لدينا: } v_n \text{ بدلالة } n$$

$$\text{منه: } v_n = v_0 \times q^n = \left(\frac{1}{5}\right)^n$$

**2** (أ) تبيان أن المتتالية  $(w_n)$  حسابية أساسها 5:

$$w_{n+1} - w_n = 5^{n+1} \times u_{n+1} - 5^n \times u_n = 5^n (5u_{n+1} - u_n)$$

$$\text{لدينا: } u_{n+1} = v_n + \frac{1}{5}u_n = \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{5}u_n \quad \text{منه: } v_n = u_{n+1} - \frac{1}{5}u_n$$

$$w_{n+1} - w_n = 5^n \left( 5 \left( \left(\frac{1}{5}\right)^n + \frac{1}{5}u_n \right) - u_n \right) \quad \text{اذن:}$$

$$= 5^n \left( 5 \times \frac{1}{5^n} + u_n - u_n \right) = 5$$

$$w_n = w_0 + nr = 0 + n \times 5 = 5n \quad \text{ب) كتابة } w_n \text{ بدلالة } n$$

استنتاج  $u_n$  بدلالة n:

$$u_n = \frac{w_n}{5^n} = \frac{5n}{5^n} \quad \text{منه: } w_n = 5^n \times u_n$$

**3** حساب  $S_n$  و  $S'_n$  و  $P_n$  بدلالة n:

$$\frac{z_A}{z_C} = \frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{1^2 + \sqrt{3}^2} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right) + i\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)$$

استنتاج القيمة المضبوطة لـ:  $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$  و  $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{3}}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}\right)$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) = \frac{\left(\frac{\sqrt{3}-1}{4}\right)}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{4\sqrt{2}}\right)$$

(4) عين قيم العدد الطبيعي n:

$$\cdot \text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{منه:} \quad \left(\frac{z_A}{z_B}\right)^n$$

$$n\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow n = \left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) \times \left(\frac{2}{-\pi}\right)$$

$$n = -1 - 2k, \quad k \in \mathbb{Z}^*$$

(5) تعيين  $(E_1)$  و  $(E_2)$ :

$$\text{لدينا: } (E_1): |z+1-i| = |iz-1-i| \quad \text{منه:}$$

$$(E_1): |z - (-1+i)| = |i(z+i-1)| \quad \text{تكافئ: } AM = DM$$

$$(E_1): |z - z_A| = |z - z_D|$$

منه:  $(E_1)$  هي محور القطعة المستقيمة  $[AD]$ .

لدينا:

$$(E_2): \text{Arg}(z-1-\sqrt{3}i) = \text{Arg}(\bar{z}-1+\sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = -\text{Arg}(\bar{z}-1+\sqrt{3}i) + \pi + 2k\pi$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = -\text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) + 2k\pi + \pi + 2k\pi$$

$$(E_2): 2\text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = \pi + 4k\pi$$

$$(E_2): \text{Arg}(z-(1+\sqrt{3}i)) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$(E_2): (\overline{U}; \overline{MC}) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

منه:  $(E_2)$  هي نصف المستقيم  $(CM)$  الموازي لمحور الترتيب ما

عد النقطة  $C$ .

(6)

(أ) تبيان أن العبارة المركبة للتحويل  $T$  هي:  $z' = iz$ :

$T$  يكتب على الشكل:  $z' = az + b$  و يحول النقطة  $A$  إلى  $B$

$$\text{اذن: } \begin{cases} z_B = az_A + b \\ z_D = az_B + b \end{cases}$$

$$b = z_B - az_A = 0 \quad \text{و} \quad a = \frac{z_B - z_D}{z_A - z_B} = i$$

(ب) طبيعة التحويل  $T$  و عناصره المميزة:

$$\theta = \text{Arg}(a) = \frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad |a| = 1 \quad \text{منه} \quad T \text{ دوران زاويته}$$

$$\text{و مركزه } \Omega \text{ حيث: } z_\Omega = \frac{b}{1-a} = 0$$

$$S_n = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1} = v_0 \left( \frac{1-q^{n-1+0+1}}{1-q} \right)$$

$$= 1 \left( \frac{1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{5}} \right) = \frac{5}{4} \left( 1 - \left(\frac{1}{5}\right)^n \right)$$

$$S'_n = w_n + w_{n+1} + \dots + w_{n+2020}$$

$$= \frac{n+2020-n+1}{2} (w_n + w_{n+2020})$$

$$= \frac{2021}{2} (5n + 5(n+2020)) = 2021(5n+1010)$$

$$P_n = v_0 \times v_1 \times \dots \times v_n$$

$$= 1 \times \left(\frac{1}{5}\right) \times \left(\frac{1}{5}\right)^2 \times \left(\frac{1}{5}\right)^3 \times \dots \times \left(\frac{1}{5}\right)^n \quad \text{و:}$$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{0+1+2+\dots+n} = \left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{n-0+1}{2}(0+n)} = \left(\frac{1}{5}\right)^{n\left(\frac{n+1}{2}\right)}$$

التمرين الثالث

$$P(z) = z^3 + (1-i\sqrt{3})z^2 - 2\sqrt{3}iz - 2 - 2\sqrt{3}i \quad \text{(I)}$$

(1) تعيين الأعداد الحقيقية  $a$  و  $b$ :

$$P(z) = (z-1-i\sqrt{3})(z^2+az+b)$$

نجد:  $a=2$  و  $b=2$

(2) حل في مجموعة الأعداد المركبة  $P(z)=0$  المعادلة:

$$z_2 = -1-i \quad \text{و} \quad z_1 = -1+i, \quad z_0 = 1+i\sqrt{3}$$

$$\cdot z_D = -z_A \quad \text{و} \quad z_C = 1+i\sqrt{3}, \quad z_B = \bar{z}_A, \quad z_A = -1+i \quad \text{(II)}$$

(1) أكتب العدان المركبان  $z_A, z_C$  على الشكل الأسى، استنتج

الشكل الأسى لكل من  $z_A, z_B, z_C$ :

$$z_B = \sqrt{2}e^{i\left(\frac{-3\pi}{4}\right)}$$

$$z_C = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$z_A = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$$

$$\cdot \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{5\pi}{12}\right)} \quad \text{و}$$

(2) كتابة  $\frac{z_A}{z_B}$  على الشكل الجبري و الأسى، ثم استنتاج طبيعة

المثلث  $OAB$ :

$$\frac{z_A}{z_B} = e^{i\left(\frac{-\pi}{2}\right)} \quad \text{منه:} \quad \frac{z_A}{z_B} = \frac{(-1+i) \times (-1+i)}{(-1-i)(-1+i)} = \frac{1-2i}{1+1} = -i$$

$$\text{Arg}\left(\frac{z_A}{z_B}\right) = -\frac{\pi}{2} \quad \text{و} \quad OA = OB \quad \text{منه:} \quad \left|\frac{z_A}{z_B}\right| = 1$$

منه:  $(\overline{OB}; \overline{OA}) = -\frac{\pi}{2}$  منه المثلث قائم و متساوي الساقين.

(3) اكتب العدد المركب  $\frac{z_C}{z_A}$  على الشكل الجبري:

ت) تعيين  $z_E$  لاحقة النقطة  $E$  صورة النقطة  $D$ :

$$z_E = i(1-i) = i + 1 \text{ منه } z_E = iz_D$$

ث) نستنتج أن النقط  $A$  ،  $B$  ،  $D$  و  $E$  تنتمي الى نفس

الدائرة ذات المركز  $O$  و نصف القطر  $R = \sqrt{2}$ .