على المترشح اختيار أحد الموضوعين التاليين :

الموضوع الأول

التمرين الأول :(5.5 نقطة)

1) أ- عين تبعا لقيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 7 .

ب- حدد الأعداد الطبيعية n بحيث يكون : $\left(2020^{1962} \times n + 4 \times 1441^{1954}\right) \equiv 0[7]$

2) نعتبر العدد الطبيعي N_p المكتوب في النظام العشري على الشكل : $N_p = \underbrace{\overline{111\ldots1}}_{p \text{ مرة}}$

أ- بين أن : $N_p \equiv p[3]$.

ب- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 3 .

ج- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون العدد $(3^n - 1)$ قابلا للقسمة على 2.

د- بين أن العدد N_p يقبل القسمة على 7 إذا وفقط إذا كان العدد $(3^p - 1)$ يقبل القسمة على 7

هـ- استنتج باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 .

3) أ- حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة : $3x - 7y = 4$.

ب- استنتج الأعداد الصحيحة a التي تحقق الجملة : $\begin{cases} a \equiv 1[3] \\ 2a \equiv 3[7] \end{cases}$.

ج- عين باقي قسمة N_{2020} على 21

4) نعتبر العدد الطبيعي M المكتوب في النظام ذي الاساس 4 على الشكل : $M = \overline{abb2a0}$

أ- عين قيم a و b علما أن : $M - 4 \equiv 0[7]$.

ب- استنتج قيم M مكتوبة في النظام العشري .

التمرين الثاني :(4.5 نقطة)

يحتوي وعاء U على5 كريات حمراء و3 كريات صفراء وكريتين خضراوين . الكريات متماثلة لانفرق بينها باللمس .نسحب عشوائيا ثلاث كريات من الوعاءU في آن واحد . A ، B، C ثلاثة أحداث حيث :

A"الحصول على ثلاث كريات حمراء " ، B " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون "

C " الحصول على ثلاث كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

1) أحسب $p(A); p(B); p(C)$ احتمال الأحداث A، B، C على الترتيب .

2) X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة .

- عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي .

3) نضيف $(n-5)$ كرية حمراء إلى الوعاء U حيث $n \geq 5$ ، ثم نسحب عشوائيا كريتين على التوالي دون إرجاع . نعتبر الحدثين D وE حيث : D"الحصول على كريتين حمراوين "E " الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"

أ- أثبت أن : $p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$.

ب- أحسب بدلالة n العدد $p(E)$ احتمال الحدث E .

ج- عين قيم العدد الطبيعي n بحيث: $p(E) \geq \frac{1}{2}$.

التمرين الثالث : (10 نقاط)

نعتبر من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ، الدالة f_n المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ :

$$f_n(x) = x^n \, ln(x+1)$$

(C_n) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.

I. لتكن h_n الدالة المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بـ :

$$h_n(x) = \frac{x}{x+1} + nln(x+1)$$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة h_n .

2) أحسب $h_n(0)$ ثم استنتج إشارة $h_n(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

3) نفرض أن $n = 1$

أ- برر قابلية الإشتقاق للدالة $f_1(x)$ ثم أكتب عبارة $f_1{}'(x)$ بدلالة $h_1(x)$.

ب- استنتج اتجاه تغير f_1 على المجال $]-1,+\infty[$.

4) ليكن n عدد طبيعي حيث $n \geq 2$.

أ- أحسب نهايتي f_n عند $+\infty$ و -1

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f_n وشكل جدول تغيراتها (ميز الحالتين n زوجي و n فردي).

5) **أ-** أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين A وB يطلب تعيينهما .

ج- أنشئ في نفس المعلم السابق (C_1) و (C_2) .

II. نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كمايلي : $u_n = \int_0^1 x^n \, ln(x+1)dx$

1) **أ-** عين الأعداد الحقيقية $a\,;b\,;c$ بحيث من أجل كل x من المجال $[0\,,1]$ فإن : $\frac{x^2}{x+1} = ax+b+\frac{c}{x+1}$

ب- استنتج قيمة $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}dx$ ثم أثبت أن : $u_1 = \frac{1}{4}$.

2) أ- أثبت أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما ثم برر تقاربها .

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $0 \leq u_n \leq \frac{ln2}{n+1}$

ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

3) نضع من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,,1]$:

$$s_n = 1 - x + \cdots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k$$

أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n حيث $n \geq 2$ ومن أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0\,,1]$:

$$s_n = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1}x^{n+1}}{x+1}$$

ب- استنتج أن :

$$\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} = ln2 - (-1)^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}dx$$

ج- أثبت باستعمال التكامل بالتجزئة أن : $u_n = \frac{ln2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[ln2 - \left(1 - \frac{1}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول : (5.5 نقطة)

I. **1)** أ- أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n بواقي القسمة الإقليدية للعدد 5^n على 7 .

ب- استنتج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7 .

2) عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون : $4\left(5^{n-2}+5^{n-3}+\cdots+1\right)\equiv 3[7]$.

3) أ- تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n يكون : $2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2=2n^2+6n+6$

ب- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(2C_{n+1}^2+A_{n+3}^2)$ مضاعفا للعدد 7.

4) نضع $n=9$.نعتبر x و y عددين صحيحين ولتكن المعادلة : $C_{10}^2x-A_{12}^2y=15\ldots(E)$

أ- أثبت أن المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$.

ب- بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن $y\equiv 0[5]$، ثم حل المعادلة (E).

5) أ- إذا كان x و y عددين طبيعيين ،فماهي القيم الممكنة لـ $pgcd(x;y)=d$.

ب- عين الثنا ئيات $(x;y)$ حلول المعادلة (E) بحيث يكون العددين x و y أوليان فيمابينهما .

II. نعتبر المعادلة $(E')\ldots\ldots 343x-648y=76$ حيث x و y عددين طبيعيين .

1) تحقق أن الثنائية $(4,2)$ حل للمعادلة (E') ثم عين حلولها في $\mathbb{N}^2$.

2) λ عدد طبيعي يكتب $\overline{\beta 1\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\alpha 1\alpha\alpha\beta}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5 .
جد العددين α و β ثم أكتب λ في نظام التعداد ذي الأساس 6 .

التمرين الثاني : (6.5 نقطة)

❖ لتكن المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول $u_0=\frac{1}{\alpha}$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt[\alpha]{u_n}$
حيث α عدد طبيعي أكبر تماما من 1 .

1) أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي α أكبر تماما من 1: $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}>\frac{1}{\alpha}$.

2) برهن باستعمال البرهان التراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\frac{1}{\alpha}\leq u_n<1$

3) أحسب u_1 ثم برهن بالتراجع أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

4) علل لماذا المتتالية (u_n)متقاربة ؟

❖ نعتبر المتتالية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=ln(u_n)$.

1) أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تعيين أساسها وحدها الأول .

2) استنتج عبارة u_n بدلالة n ثم حدد $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

3) ليكن الجداء $p_n=\sqrt[n]{\frac{1}{u_1}}\times\sqrt[n]{\frac{1}{u_2}}\times\ldots\ldots\times\sqrt[n]{\frac{1}{u_n}}$

أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعيn : $p_n=\alpha^{\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{(\alpha-1)n}\right)}$

4) أحسب الجداء التالي : $T_n=e^{v_0^2}\times e^{v_1^2}\times\ldots\ldots\times e^{v_n^2}$

☜ فيمايلي نضع $\alpha = 2$

5) تحقق أن : $T_n = e^{-\frac{ln^2(2)(4^{-n}-4)}{3}}$. استنتج أن (T_n) متقاربة يطلب تعيين نهايتها .

6) أحسب بدلالة n المجموع :

$$s_n = \log(e^{v_1}) + \log\left(\frac{e^{v_2}}{2}\right) + \log\left(\frac{e^{v_3}}{3}\right) + \cdots + \log\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right)$$

<u>التمرين الثالث :</u>(8 نقاط)

m عدد حقيقي غير معدوم. f_m الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ :

$$f_m(x) = 2x + 3 - (x+1)e^{mx}$$

(C_m) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

I. نضع $m = 1$

1) أحسب $f_1'(x)$ و $f_1''(x)$ ثم أدرس تغيرات الدالة $f_1{}'$ وشكل جدول تغيراتها .

2) أحسب $f_1'(0)$ ثم استنتج إشارة $f_1'(x)$.

3) أدرس تغيرات الدالة f_1وشكل جدول تغيراتها .

4) **أ-** بين أن المنحني (C_1) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ)عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلة له .

ب- ادرس وضعية (C_1) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5) **أ-** بين أن المعادلة $f_1(x) = 0$ تقبل حلين α و β حيث $0.92 < \alpha < 0.93$ و $-1.56 < \beta < -1.55$

ب- جد معادلة المماس (T) للمنحني (C_1) عند النقطة ذات الفاصلة 0 .

ج- أنشئ (T)، (Δ)، (C_1) .

6) **أ-** باستعمال المكاملة بالتجزئة ، احسب بدلالة α المساحة $S(\alpha)$ للحيز المستوي المحدد بالمنحني (C_1) والمستقيمات التي معادلاتها : $x = 0 \quad ; \quad x = \alpha \quad ; \quad y = 2x + 3$.

ب- بين أن : $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$ ثم عين حصرا للعدد $S(\alpha)$.

II. نفرض أن m كيفي .

1) بين أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيين إحداثيي كل منهما .

2) بين أن المستقيم (Δ)مقارب مائل لجميع المنحنيات (C_m) عند $-\infty$ ثم ادرس وضعية (C_m) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

3) n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2 .

نضع $f_m^{(n)}$ الدالة المشتقة من الرتبة n للدالة f_m .

برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n أكبر من أو يساوي 2 :

$$f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx + m + n)$$

<u>انتهى الموضوع الثاني</u>

<u>تمنياتي لكم النجاح في البكالوريا</u>

2024/2023 تصحيح اختبار الفصل الثاني 3 ر

الموضوع 1

التمرين 01: (5,5 نقطة)

1) أ- بواقي قسمة 3^n على 7

$3^0\equiv1[7]$ ، $3^1\equiv3[7]$ ، $3^2\equiv2[7]$ ، $3^3\equiv6[7]$ ، $3^4\equiv4[7]$

$3^5\equiv5[7]$ ، $3^6\equiv1[7]$

ومنه بواقي قسمة 3^n على 7 دورية ودورها 6 (0,5)

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي K لدينا

n	6K	6K+1	6K+2	6K+3	6K+4	6K+5
بواقي قسمة 3^n على 7	1	3	2	6	4	5

ب- تحديد n حتى يكون

$(2020^{1962}\times n+4\times1441^{1954})\equiv0[7]$ -①

لدينا $2020\equiv4[7]$ ومنه $2020\equiv-3[7]$

أي $2020^{1962}\equiv(-3)^{1962}[7]$

ومنه $2020^{1962}\equiv3^{1962}[7]$

ولدينا $1962=6\times327$

ومنه $3^{1962}\equiv1[7]$ (0,5)

إذن $\boxed{2020^{1962}\equiv1[7]}$

ولدينا $1441\equiv6[7]$ ومنه $1441\equiv-1[7]$

أي $1441^{1954}\equiv(-1)^{1954}[7]$

ومنه $\boxed{1441^{1954}\equiv1[7]}$

① تكافئ $n+4\equiv[7]$

أي $n\equiv-4[7]$ وبالتالي $n\equiv3[7]$

محققة $\boxed{n=6k+1}$

2) $N_p=\underbrace{111\cdots1}_{p\text{ مرة}}$

أ) إثبات أن $N_p\equiv p[3]$

لدينا $N_p=10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10+10^0$

و $10\equiv1[3]$ ومنه

$10^{p-1}\equiv1[3]$ و $10^{p-2}\equiv1[3]$ و ... و $10\equiv1[3]$ (0,5)

إذن $N_p\equiv\underbrace{1+1+\cdots+1}_{p\text{ مرة}}[3]$

ومنه $N_p\equiv p[3]$

ب) استنتاج باقي قسمة N_{2020} على 3

لدينا $N_{2020}\equiv2020[3]$ و $2020\equiv1[3]$

ومنه $N_{2020}\equiv1[3]$ إذن باقي قسمة N_{2020} على 3 هو 1 (0,25)

ج- إثبات أن $3^n-1\equiv0[2]$

لدينا $3\equiv1[2]$ ومنه $3^n\equiv1[2]$ أي أن

$3^n-1\equiv0[2]$ (0,25)

د) إثبات أن

$N_p\equiv0[7]$ إذا وفقط إذا $(3^p-1)\equiv0[7]$

لدينا $N_p\equiv0[7]$ معناه $10^{p-1}+10^{p-2}+\cdots+10^0\equiv0[7]$

وعلما أن $10\equiv3[7]$ فإن

$3^{p-1}+3^{p-2}+\cdots+3+1\equiv0[7]$ (0,75)

لدينا $3^{p-1}+3^{p-2}+\cdots+1=1\cdot\frac{3^p-1}{3-1}=\frac{3^p-1}{2}$

(مجموع حدود متتالية هندسية أساسها 3 وحدها الأول 1)

ومنه $2N_p\equiv(3^p-1)[7]$

نفرض أن $N_p\equiv0[7]$ ومنه $N_p=7\alpha$

أي $3^p-1=14\alpha$ معناه $\frac{3^p-1}{2}=7\alpha$

إذن العدد (3^p-1) يقبل القسمة على 7

نفرض أن $3^p-1\equiv0[7]$ وبما أن (3^p-1) يقبل القسمة على 2 فإن (3^p-1) يقبل القسمة على 14 أي $3^p-1=14\beta$

ومنه $\frac{3^p-1}{2}=7\beta$ أي $N_p\equiv0[7]$

ومنه المطلوب

هـ) استنتاج باقي قسمة N_{2020} على 7

لدينا $N_{2020}\equiv\frac{3^{2020}-1}{2}[7]$ أي $2N_{2020}\equiv(3^{2020}-1)[7]$ (0,5)

ولدينا $3^{2020} = 3^{6\times336+4}$

ومنه $3^{2020} \equiv 4[7]$ معناه

$2N_{2020} \equiv (4-1)[7]$

اذن $2N_{2020} \equiv 3[7]$

أي $8N_{2020} \equiv 12[7]$

وبالتالي $N_{2020} \equiv 5[7]$ $\left(8\equiv1[7] \text{ و } 12\equiv5[7]\right)$

اذن باقي قسمة العدد N_{2020} على 7 هو 5

3) أ) حل في $\mathbb{Z}^2$ المعادلة $3x-7y=4$

لدينا $3x-7y=4$ معناه $3x\equiv4[7]$

ومنه $15x \equiv 20[7]$

0,5 وبما أن $15\equiv1[7]$ و $20\equiv6[7]$

فإن $x\equiv6[7]$ أي يوجد عدد صحيح K

حيث $x=7K+6$ وبالتعويض نجد

$y=3K+2$

اذن حلول المعادلة هي

$(x,y)=(7K+6,\ 3K+2)\ /K\in\mathbb{Z}$

ب) استنتاج الأعداد الصحيحة a التي

تحقق $\begin{cases} a\equiv1[3] \\ 2a\equiv3[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} a\equiv1[3] \\ 8a\equiv12[7] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} a\equiv1[3] \\ a\equiv5[7] \end{cases}$ 0,5 اذن $\begin{cases} a=3U+1 \\ b=7V+5 \end{cases}$

ومنه

$3U+1=7V+5$

$3U-7V=4$

ومنه $U=7K+6$ و $V=3K+2$

اذن

$a=3(7K+6)+1$

$\boxed{a=21K+19}\ /K\in\mathbb{Z}$

ج) تعيين باقي قسمة N_{2020} على 21

0,25 لدينا $\begin{cases} N_{2020}\equiv1[3] \\ N_{2020}\equiv5[7] \end{cases}$ أي $\begin{cases} N_{2020}\equiv1[3] \\ 2N_{2020}\equiv10[7] \end{cases}$

ومنه $\begin{cases} N_{2020}\equiv1[3] \\ 2N_{2020}\equiv3[7] \end{cases}$ معناه

$N_{2020}=21K+19$

اذن باقي قسمة N_{2020} على 21 هو 19

4) $M=\overline{abb2a0}^{(4)}$

أ) نعين a و b علما أن $M-4\equiv0[7]$

$M = a.4^5+b.4^4+b.4^3+2.4^2+a.4$

و $0<a<4$ و $0\le b<4$ 0,75

لدينا $4\equiv-3[7]$ ومنه

$M-4\equiv a(-3)^5+b(-3)^4+b(-3)^3+2(-3)^2+a(-3)-4[7]$

$M-4\equiv -a.3^5+b.3^4-b.3^3+2.3^2-3.a-4[7]$

$3^5\equiv5[7]$, $3^4\equiv4[7]$, $3^3\equiv6[7]$

$3^2\equiv2[7]$, $3^1\equiv3[7]$

اذن

$M-4\equiv-5a+4b-6b+4-3a-4[7]$

$M-4\equiv-8a-2b[7]$

$M-4\equiv0[7]$ معناه

$-8a-2b\equiv0[7]$

$-a-2b\equiv0[7]$

ومنه $a+2b\equiv0[7]$

وبما أن $0<a<4$ فإن

$a\in\{1,2,3\}$

• $\boxed{a=1}$ لما $1+2b\equiv0[7]$ أي $2b\equiv-1[7]$

ومنه اذن $2b\equiv6[7]$ أي $b\equiv3[7]$

وبما أن $0\le b<4$ فإن $\boxed{b=3}$

• $a=2$ لما $2+2b\equiv0[7]$ أي $2b\equiv5[7]$

معناه $8b\equiv20[7]$

اذن $b\equiv6[7]$ وبما أن $0\le b<4$

لا توجد قيمة لـ b

• $a=3$ لما $3+2b\equiv0[7]$ أي $2b\equiv4[7]$

ومنه $b \equiv 2[7]$ وأن $0 \leq b < 4$

فإن $\boxed{b=2}$

4) استنتاج M مكتوبة في النظام العشري:

$a=1$ و $b=3$

$M = \overline{133210}^{4} = 2020$ 0,25

$a=3$ و $b=2$

$M = \overline{322230}^{4} = 3756$

التمرين 02: (4,5 نقطة)

$U = 5R + 3J + 2V$

سحب 3 كرات في آن واحد

1) A "الحصول على 3 كريات حمراء"

$P(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{10}{120} = \frac{1}{12}$ 0,5

B "الحصول على 3 كريات من نفس اللون"

$P(B) = \frac{C_3^3 + C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$ 0,5

C "الحصول على 3 كريات مختلفة اللون مثنى مثنى"

$P(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{30}{120} = \frac{1}{4}$ 0,5

2) X متغير عشوائي يرفق بكل سحبة عدد ألوان الكريات المسحوبة

• تعريف قانون الاحتمال لـ X

لدينا مجموعة قيم X هي $\{1, 2, 3\}$ 0,25

$P(X=1) = P(B) = \frac{11}{120}$ 0,25

$P(X=2) = \frac{C_5^2 \times (C_3^1 + C_2^1) + C_3^2(C_5^1 + C_2^1) + C_2^2(C_5^1 + C_3^1)}{C_{10}^3}$

$= \frac{50+21+8}{120} = \frac{79}{120}$ 0,25

$P(X=3) = \frac{30}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$ 0,25

ومنه:

x_i	1	2	3
$P(X=x_i)$	$11/120$	$79/120$	$30/120$

0,25

حساب الأمل الرياضياتي

$E(X) = 1 \cdot \frac{11}{120} + 2 \cdot \frac{79}{120} + 3 \cdot \frac{30}{120} = \frac{259}{120}$ 0,25

3) n حمراء + 3 صفراء + 2 خضراء = $n+5$ كرة

$(n \geq 5)$

سحب كريتين على التوالي دون إرجاع

D: "الحصول على كريتين حمراوين"

أ) إثبات أن $P(D) = \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+4)}$

لدينا عدد الحالات الممكنة هو:

$A_{n+5}^2 = \frac{(n+5)!}{(n+5-2)!} = \frac{(n+5)!}{(n+3)!} = \frac{(n+5)(n+4)(n+3)!}{(n+3)!}$

$= (n+5)(n+4)$ 0,5

$P(D) = \frac{A_n^2}{(n+5)(n+4)} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$ وهو المطلوب

ب) حساب بدلالة n: $P(E)$

E" الحصول على كريتين مختلفتين في اللون"

$P(E) = \frac{2A_n^1 \times A_3^1 + 2A_n^1 \times A_2^1 + 2 \cdot A_2^1 \times A_3^1}{(n+5)(n+4)}$

$= \frac{6n + 4n + 12}{(n+5)(n+4)} = \frac{10n+12}{n^2+9n+20}$ 0,5

ج) تعيين قيم العدد الطبيعي n بحيث:

$P(E) \geq \frac{1}{2}$

$P(E) \geq \frac{1}{2}$ معناه $\frac{10n+12}{n^2+9n+20} \geq \frac{1}{2}$

أي

$\frac{10n+12}{n^2+9n+20} - \frac{1}{2} \geq 0$ 0,5

ومنه

$\frac{-n^2+11n+4}{2(n^2+9n+20)} \geq 0$

لدينا n عدد طبيعي و $n \geq 5$ ومنه

ومنه $n^2+9n+20 > 0$ إذا كان $-n^2+11n+4 \geq 0$

$n \in \left[\frac{11-\sqrt{137}}{2}, \frac{11+\sqrt{137}}{2}\right]$

بما أن $n \geq 5$ و طبيعي فإن $n \in \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11\}$

التمرين 03: (10 نقاط)

$f_n(x) = x^n \ln(x+1)$ / $n\in\mathbb{N}^*$

$D_{f_n} =]-1,+\infty[$

I. $n\in\mathbb{N}^*$

$h_n(x) = \frac{x}{x+1} + n\ln(x+1)$ / $D_h =]-1,+\infty[$

1) دراسة اتجاه تغير h_n

- h_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ و دالتها المشتقة:

$h_n'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} + \frac{n}{x+1}$ 0,25

من أجل $x\in]-1,+\infty[$ لدينا:

$\frac{1}{(x+1)^2}>0$ و $\frac{1}{x+1}>0$ 0,25 ومنه $h_n'(x)>0$

أي h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$ 0,25

2) . $h_n(0)=0$ 0,25

- إشارة $h_n(x)$

بما أن h_n متزايدة تماما على $]-1,+\infty[$ و $h_n(0)=0$ فإن إشارة $h_n(x)$ كالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
$h_n(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

0,25

3) نفرض أن $n=1$ أي: $f_1(x) = x\ln(x+1)$

أ) . الدالة f_1 قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ لأنها جداء دالتين قابلتين للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ 0,25

. عبارة $f_1'(x)$ بدلالة $h_n(x)$

من أجل كل x من $]-1,+\infty[$ لدينا:

$f_1'(x) = \ln(x+1) + \frac{x}{x+1} = h_1(x)$ 0,25

ب) إشارة $f_1'(x)$ من إشارة $h_1(x)$

وبالتالي f_1 متناقصة تماما على $]-1,0]$ ومتزايدة تماما على $[0,+\infty[$ 0,25

4) $n\geq 2$.

أ) حساب نهايات f_n

$$\lim_{x\to -1} f_n(x) = \begin{cases} -\infty & : n \text{ زوجيا} \\ +\infty & : n \text{ فرديا}\end{cases}$$ 0,5

$$\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \;/\; \begin{cases}\lim_{x\to+\infty} x^n = +\infty \\ \lim_{x\to+\infty} \ln(x+1) = +\infty\end{cases}$$ 0,25

ب) اتجاه تغير الدالة f_n

f_n قابلة للاشتقاق على $]-1,+\infty[$ ودالتها المشتقة:

$$f_n'(x) = nx^{n-1}\ln(x+1) + \frac{x^n}{x+1}$$
$$= x^{n-1}\left(n\ln(x+1) + \frac{x}{x+1}\right)$$
$$= x^{n-1}\cdot h_n(x)$$ 0,25

. في حالة n زوجي فإن $(n-1)$ فردي وبالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$	
$h_n(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	

0,25

ومنه f_n متزايدة على $]-1,+\infty[$ 0,25

. وفي حالة n فردي فإن $(n-1)$ زوجي وبالتالي:

x	-1		0		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$	
$h_n(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

0,25

ومنه f_n متناقصة تماما على $]-1,0]$ و متزايدة تماما على $[0,+\infty[$ 0,25

- جدول التغيرات

. n فردي 0,25

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	
$f_n(x)$	$\|\|$ $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

. n زوجي 0,25

x	-1		0		$+\infty$
$f_n'(x)$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
$f_n(x)$	$\|\|$ $-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5) أ) 1. اثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم فإن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين A و B يطلب تعيينهما

لنكن n و n' عددان طبيعيان غير معدومين ولتكن $M(x,y)$ نقطة من المستوي،

لدينا $M \in (C_n) \cap (C_{n'})$ معناه

$$\begin{cases} x \in]-1,+\infty[\\ \text{و} \\ M \in (C_n) \\ \text{و} \\ M \in (C_{n'}) \end{cases}$$

0,5

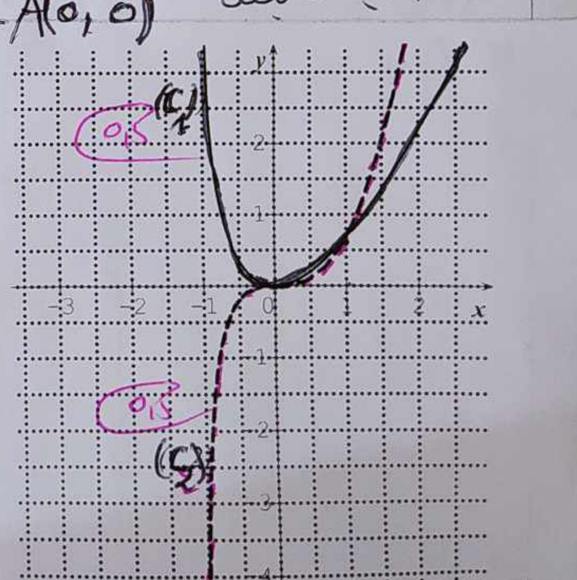
أي $x^n \ln(x+1) = x^{n'} \ln(x+1)$

ومنه $\ln(x+1)\left(x^n - x^{n'}\right) = 0$

وبالتالي $\ln(x+1) = 0$ أو $x^n - x^{n'} = 0$

ومنه $x = 0$ أو $x = 1$

إذن جميع المنحنيات (C_n) تشمل نقطتين ثابتتين $A(0,0)$ و $B(1,\ln 2)$



II. (U_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $U_n = \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

1) أ) تعيين a, b, c بحيث من أجل كل x من $[0,1]$

0,25

$$\frac{x^2}{x+1} = ax + b + \frac{c}{x+1}$$

باستعمال المطابقة نجد $a = 1,\ b = -1,\ c = 1$

ب) استنتاج قيمة $\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{x+1}\,dx = \int_0^1 \left(x - 1 + \frac{1}{x+1}\right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{2}x^2 - x + \ln|x+1|\right]_0^1$$ 0,5

$$= \frac{1}{2} - 1 + \ln 2 - 0$$

$$= -\frac{1}{2} + \ln 2$$

. إثبات أن $U_1 = \frac{1}{4}$

$$U_1 = \int_0^1 x \ln(x+1)\,dx$$

نضع $U(x) = \ln(x+1)$ ومنه $U'(x) = \frac{1}{x+1}$

و $V'(x) = x$ ومنه $V(x) = \frac{1}{2}x^2$

وبالتالي 0,5

$$U_1 = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x+1}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) - 0 - \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2} + \ln 2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(2) + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{4}$$

وهو المطلوب

2) أ) إثبات أن (U_n) متناقصة وتبرير تقاربها

لدينا $U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^{n+1} \ln(x+1)\,dx - \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx$

$$= \int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1)\,dx$$ 0,5

لدينا من أجل $x \in [0,1]$: $x - 1 \leq 0$ و $x^n \geq 0$

و $\ln(x+1) \geq 0$ ومنه

$x^n (x-1) \ln(x+1) \leq 0$ وبالتالي

$$\int_0^1 x^n (x-1) \ln(x+1)\,dx \leq 0$$

ومنه (U_n) متناقصة.

• لدينا من أجل كل x من $[0,1]$:

$x^n \geq 0$ و $\ln(x+1) \geq 0$

معناه $x^n \ln(x+1) \geq 0$ 0,25

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي ~~غير معدوم~~ n

أي $\int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \geq 0$ $\qquad U_n \geq 0$

ومنه (U_n) محدودة من الأسفل وكما أنها متناقصة فإنها متقاربة

ب) لنبين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن:

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

• لدينا من أجل كل x من $[0,1]$:

$0 \leq x^n \leq 1$ و $0 \leq \ln(x+1) \leq \ln 2$

ومنه 0,5 $0 \leq x^n \ln(x+1) \leq (\ln 2)\, x^n$

وبالتالي:

$0 \leq \int_0^1 x^n \ln(x+1)\,dx \leq \ln 2 \int_0^1 x^n\,dx$

$0 \leq U_n \leq \ln 2 \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^1$

$0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$

وهو المطلوب

• استنتاج $\lim_{n\to+\infty} U_n$

لدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln 2}{n+1} = 0$ وبما أن $0 \leq U_n \leq \frac{\ln 2}{n+1}$ فإن 0,25

$\lim_{n\to+\infty} U_n = 0$

3) $n \geq 2$ و $x \in [0,1]$

$S_n = 1 - x + \dots + (-1)^n x^n = \sum_{k=0}^{k=n} (-1)^k x^k$

أ) لدينا

$S_n = \frac{1}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{x+1}$

$S_n = 1 \cdot \frac{1-(-x)^{n+1}}{1-(-x)}$ 0,5

$= \frac{1-(-1)^{n+1} x^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{x+x}$

ب) استنتاج أن $\sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$

لدينا من جهة

$\int_0^1 S_n\,dx = \int_0^1 \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k\,dx = \sum_{k=0}^{n} \int_0^1 (-1)^k x^k\,dx$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \cdot \left[\frac{1}{k+1} x^{k+1}\right]_0^1$

$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}(1-0)$ 0,5

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$

ومن جهة أخرى لدينا

$\int_0^1 S_n\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x+1}\,dx - \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1} x^{n+1}}{x+1}\,dx$

$= \left[\ln(x+1)\right]_0^1 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$

$= \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$

ومنه

$\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} = \ln 2 - (-1)^{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$

ج) لنبين أن:

$U_n = \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - \left(1 - \ln 2 + \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}\right)\right]$

نضع $U(x) = \ln$ ومنه $U'(x) = \frac{1}{x+1}$

$V'(x) = x^n$ ومنه $V(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1}$ 0,25

$U_n = \frac{1}{n+1}\left[x^{n+1} \ln(x+1)\right]_0^1 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+1}\,dx$ ومنه

$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{1}{n+1} \cdot (-1)^{n+1}\left[\ln 2 - \sum_{k=0}^{k=n} \frac{(-1)^k}{k+1}\right]$

6

$= \frac{\ln 2}{n+1} - \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}\left[\ln 2 - (1 \quad \dots\right.$ وهو المطلوب

الموضوع 4

التمرين 01: (5,5 نقطة)

I. 1) بواقي قسمة 5^n على 7

$5^0\equiv 1[7]$ ، $5^1\equiv 5[7]$ ، $5^2\equiv 4[7]$ ، $5^3\equiv 6[7]$ ، $5^4\equiv 2[7]$

$5^5\equiv 3[7]$ ، $5^6\equiv 1[7]$

ومنه بواقي قسمة 5^n على 7 دورية ودورها 6

وبالتالي من أجل كل عدد طبيعي k

(0,5)

n	6k	6k+1	6k+2	6k+3	6k+4	6k+5
بواقي قسمة 5^n على 7	1	5	4	6	2	3

ب) استنتاج باقي قسمة العدد $1440^{2019^{2020}}$ على 7

لدينا $1440\equiv 5[7]$ ومنه $1440^{2019^{2020}}\equiv 5^{2019^{2020}}[7]$

(0,25)

ومنه $2019\equiv 3[6]$ ومنه $2019^{2020}\equiv 3^{2020}[6]$

نعلم أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $3^n\equiv 3[6]$ ومنه $3^{2020}\equiv 3[6]$

أي $2019^{2020}=6k+3$ وبالتالي $5^{2019^{2020}}\equiv 6[7]$

إذن باقي القسمة هو 6.

2) تعيين العدد الطبيعي n حتى:

$4(5^{n-2}+5^{n-3}+\dots+1)\equiv 3[7]$ ...(1)

لدينا $5^{n-2}+5^{n-3}+\dots+1=1\cdot\frac{5^{n-1}-1}{5-1}=\frac{1}{4}(5^{n-1}-1)$

ومنه (1) تكافئ $5^{n-1}-1\equiv 3[7]$ (0,5)

أي $5^{n-1}\equiv 4[7]$ وبالتالي $n-1=6k+2$ أي $\boxed{n=6k+3}$ ، $k\in\mathbb{N}$

3) أ) التحقق من أن

$2C^2_{n+1}+A^2_{n+3}=2n^2+6n+6$

$C^2_{n+1}=\frac{(n+1)!}{2!(n-1)!}=\frac{n(n+1)}{2}$ (0,5)

$A^2_{n+3}=\frac{(n+3)!}{(n+3-2)!}=\frac{(n+3)!}{(n+1)!}=(n+3)(n+2)$

$2C^2_{n+1}+A^2_{n+3}=n(n+1)+(n+3)(n+2)$

$=n^2+n+n^2+2n+3n+6$

$=2n^2+6n+6$ و.ه.م

ب) تعيين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد $(2C^2_{n+1}+A^2_{n+3})$ مضاعفا لـ 7

$2C^2_{n+1}+A^2_{n+3}\equiv 0[7]$ معناه $2n^2+6n+6\equiv 0[7]$

(0,5)

$n\equiv$	0	1	2	3	4	5	6	[7]
$6n\equiv$	0	6	5	4	3	2	1	[7]
$2n^2\equiv$	0	2	1	4	4	1	2	[7]
$2n^2+6n+6\equiv$	6	0	5	0	6	2	2	[7]

ومنه $2n^2+6n+6\equiv 0[7]$ إذا كان $n=7a+1$ أو $n=7a+3$ مع $a\in\mathbb{N}$

4) نضع $n=9$

$C^2_{10}x-A^2_{12}y=15$ ...(E)

معناه $45x-132y=15$

أ) إثبات أن (E) تقبل حلا على الأقل في $\mathbb{Z}^2$

لدينا $PGCD(45,132)=3$ و $3/15$

ومنه المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل (0,25)

ب) (x,y) حل للمعادلة (E) معناه

$45x-132y=15$
$15x-44y=5$

ومنه $44y=15x-5$

$44y=5(3x-1)$ (0,25)

إذن $44y\equiv 0[5]$ وبالتالي

$4y\equiv 0[5]$ ومنه $16y\equiv 0[5]$ أي $\boxed{y\equiv 0[5]}$

حل المعادلة (E): بما أن $y\equiv 0[5]$ ومنه نأخذ $y_0=5$ ومنه $x_0=15$

لدينا
$$\begin{cases}15x-44y=5\\ 15(15)-44(5)=5\end{cases}$$
(0,5)

بالطرح نجد $15(x-15)=44(y-5)$

$15|44(y-5)$ و 15 و 44 أوليان فيما بينهما فإن حسب غوص $15|y-5$ وبالتالي $\boxed{y=15k+5}$

بالتعويض في (E) نجد $x=44k+15$

ومنه $(x,y)=(44k+15,15k+5)$

5) أ. x و y عددان طبيعيان

نعين القيم الممكنة لـ $PGCD(x,y)$

نضع $d=PGCD(x,y)$

$\begin{cases} d\mid x \\ d\mid y \end{cases}$ ومنه $d\mid 15x-44y$ (0,25)

أي $d\mid 5$ وبالتالي $d\in\{1,5\}$

ب) نعين الثنائيات (x,y) حلول (E) حيث يكون x و y أوليان فيما بينهما. ندرس من أجل $d=5$ أي

$x\equiv 0[5]$ ومنه $44k+15\equiv 0[5]$

وبالتالي $4k\equiv 0[5]$

$k\equiv 0[5]$ ومنه $\alpha\in\mathbb{N} / k=5\alpha$ (0,25)

إذن $d=5$ لما $k=5\alpha$

وبالتالي $d=1$ لما $k\neq 5\alpha$

إذن $(x,y)=(44k+15,15k+5)$ لما $k\neq 5\alpha$

II. $(E'):\ 343x-648y=76$

1) التحقق من أن $(4,2)$ حل للمعادلة (E')

لدينا $343\times4-648\times2$

$=76$

ومنه $(4,2)$ حل لـ (E') (0,25)

. نعين الحلول في $\mathbb{N}^2$

$$\begin{cases} 343x-648y=76 \\ 343(4)-648(2)=76 \end{cases}$$

بالطرح $343(x-4)=648(y-2)$

$343\mid 648(y-2)$ و $PGCD(343,648)=1$ ومنه (0,25)

$343\mid y-2$ إذن $y=343k+2$

بالتعويض في (E') نجد $x=648k+4$

إذن $(x,y)=(648k+4,343k+2)$ / $k\in\mathbb{N}$

2) $\lambda=\overline{\alpha1\alpha\alpha\beta}^{5}$ و $\lambda=\overline{\beta1\alpha\beta}^{7}$

$0<\alpha\le4$ و $0<\beta\le4$

$\overline{\beta1\alpha\beta}=\beta.7^3+7^2+\alpha.7+\beta$

$\overline{\alpha1\alpha\alpha\beta}=\alpha.5^4+5^3+\alpha.5^2+\alpha.5+\beta$

ومنه

$625\alpha+125+25\alpha+5\alpha+\cancel{\beta}=343\beta+49+7\alpha+\beta$

ومنه $648\alpha-343\beta=-76$

$343\beta-648\alpha=76$ (0,5)

إذن $\alpha=343k+2$ و $\beta=648k+4$

لكن $0<\alpha\le4$ و $0<\beta\le4$

نجد $\alpha=2$ و $\beta=4$

. كتابة λ في نظام التعداد ذي الأساس 6

$\lambda=\overline{4124}^{7}$

$=7^3\times4+7^2+7\times2+4=1439$

$1439 = 6\times239+5$, $239=6\times39+5$, $39=6\times6+3$, $6=6\times1+0$, $1=6\times0+1$ (0,25)

ومنه $\lambda=\overline{10355}^{6}$

التمرين الثاني (6,5 نقاط)

$$\begin{cases} U_0=\frac{1}{\alpha} \\ U_{n+1}=\sqrt[\alpha]{U_n} \end{cases} \quad / \quad \alpha\neq1,\ \alpha\in\mathbb{N}^*$$

1) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي α

$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}>\frac{1}{\alpha}$ (0,5)

لدينا $\alpha>1$ ومنه $0<\frac{1}{\alpha}<1$

ومنه $\frac{1}{\alpha}>\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$ وبالتالي

$$\left(\frac{1}{\alpha}\right)^{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$$

أي $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$ وهو المطلوب

2) اثبات أن $\frac{1}{\alpha} \le U_n < 1$

من أجل $n=0$ لدينا $U_0 = \frac{1}{\alpha}$

و $\frac{1}{\alpha} \le \frac{1}{\alpha} < 1$

أي $\frac{1}{\alpha} \le U_0 < 1$ اذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

(0,75)

. نفرض أن $\frac{1}{\alpha} \le U_n < 1$ ونبرهن أن

$$\frac{1}{\alpha} \le U_{n+1} < 1$$

لدينا $\frac{1}{\alpha} \le U_n < 1$ ومنه

$$\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} \le \sqrt[\alpha]{U_n} < 1$$

$$\frac{1}{\alpha} \le \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} \le U_{n+1} < 1$$

ومنه $\frac{1}{\alpha} \le U_{n+1} < 1$

اذن من أجل كل عدد طبيعي n:

$$\frac{1}{\alpha} < U_n < 1$$

3) حساب U_1

$U_1 = \sqrt[\alpha]{U_0} = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}$ (0,25)

. اثبات أن (U_n) متزايدة تماما بالتراجع أي نثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} > U_n$.

من أجل $n=0$ لدينا (0,75)

$U_1 = \sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}}$ و $U_0 = \frac{1}{\alpha}$

ولدينا $\sqrt[\alpha]{\frac{1}{\alpha}} > \frac{1}{\alpha}$ أي $U_1 > U_0$

إذن الخاصية محققة من أجل $n=0$

. نفرض أن $U_{n+1} > U_n$ ونبرهن أن

$$U_{n+2} > U_{n+1}$$

لدينا: $U_{n+1} > U_n$ ومنه $\sqrt[\alpha]{U_{n+1}} > \sqrt[\alpha]{U_n}$

أي: $U_{n+2} > U_{n+1}$ ومنه المطلوب

اذن من أجل كل عدد طبيعي n: $U_{n+1} > U_n$

أي (U_n) متزايدة تماما

4- لدينا $U_n < 1$ معناه (U_n) محدودة من الأعلى وبما أنها متزايدة تماما فإنها متقاربة (0,25)

* $V_n = \ln(U_n)$

1) اثبات أن (V_n) هندسية

$$V_{n+1} = \ln(U_{n+1}) = \ln\left(\sqrt[\alpha]{U_n}\right) = \ln(U_n)^{\frac{1}{\alpha}} = \frac{1}{\alpha}\ln U_n = \frac{1}{\alpha} V_n$$

(1)

ومنه (V_n) هندسية أساسها $\frac{1}{\alpha}$ وحدها الأول $V_0 = \ln U_0 = \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

2) عبارة U_n: لدينا $V_n = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)$

و $U_n = e^{V_n}$ ومنه $U_n = e^{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n \ln\left(\frac{1}{\alpha}\right)}$ (0,25)

. $\lim_{n\to+\infty} U_n$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = 1$$

(0,25)

لأن $0 < \frac{1}{\alpha} < 1$ أي $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^n = 0$

3) $P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1}} \times \sqrt[n]{\frac{1}{U_2}} \times \dots \times \sqrt[n]{\frac{1}{U_n}}$

اثبات أن: $P_n = \alpha^{\left(\frac{\alpha^{-n}-1}{(\alpha-1)n}\right)}$

(0,5)

$$P_n = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1} \times \frac{1}{U_2} \times \dots \times \frac{1}{U_n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{U_1 \times U_2 \times \dots \times U_n}}$$

صحيح $\alpha = 2$

$$T_n = e^{-\frac{\ln^2(2)(4^{-n}-4)}{3}}$$

5) التحقق من 1، لدينا

$$T_n = e^{4\ln^2(\frac{1}{2})\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^{2n+2}}{2^2-1}}$$

$$= e^{4\ln^2(2)\cdot\frac{1-2^{-2n-2}}{3}}$$

$$= e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n-1}-1}{3}\cdot 4}$$

0.1

$$= e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n}-4}{3}}$$

ومعطيات

أستنتج أن (T_n) متقاربة

$$\lim_{n\to+\infty} T_n = \lim_{n\to+\infty} e^{-\ln^2(2)\cdot\frac{4^{-n}-4}{3}} = e^{\frac{4\ln^2 2}{3}}$$

0.1

لأن $\lim_{n\to+\infty} 4^{-n} = 0$

ومنه (T_n) متقاربة

6) حساب المجموع ...

$$S_n = \log(e^{v_1}) + \log\left(\frac{e^{v_2}}{2}\right) + \cdots + \log\left(\frac{e^{v_n}}{n}\right)$$

$$= \log\left(e^{v_1} \times \frac{e^{v_2}}{2} \times \cdots \times \frac{e^{v_n}}{n}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e^{v_1} \times e^{v_2} \times \cdots e^{v_n}}{1 \times 2 \times \cdots \times n}\right)$$

0.1

$$= \log\left(\frac{e^{v_1+v_2+\cdots+v_n}}{n!}\right)$$

$$= \log\left(\frac{e^{v_1\cdot\frac{1-q^n}{1-q}}}{n!}\right) \qquad \left| \begin{array}{l} v_1 = \frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2}) \\ q = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$= \log\left(\frac{e^{(\frac{1}{2}\ln(\frac{1}{2})\cdot\frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}})}}{n!}\right) = \log\left(\frac{e^{(1-(\frac{1}{2})^n)\ln(\frac{1}{2})}}{n!}\right)$$

$$= \sqrt[n]{\frac{1}{e^{(\frac{1}{\alpha})^1\ln(\frac{1}{\alpha})} \times e^{(\frac{1}{\alpha})^2\ln(\frac{1}{\alpha})} \times \cdots \times e^{(\frac{1}{\alpha})^n\ln(\frac{1}{\alpha})}}}$$

$$= \sqrt[n]{e^{-\ln(\frac{1}{\alpha})\left((\frac{1}{\alpha})^1+(\frac{1}{\alpha})^2+\cdots+(\frac{1}{\alpha})^n\right)}}$$

$$= \sqrt[n]{e^{-\ln(\frac{1}{\alpha})\left(\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^n}{1-\frac{1}{\alpha}}\right)}}$$

$$= \sqrt[n]{e^{-\ln(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}}}$$

$$= \sqrt[n]{e^{(\ln\alpha)\cdot\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}}}$$

$$= \sqrt[n]{e^{\ln\alpha^{\left(\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}\right)}}} = \sqrt[n]{\alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}}}$$

$$= \alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{\alpha-1}\cdot\frac{1}{n}} = \alpha^{\frac{1-\alpha^{-n}}{(\alpha-1)\cdot n}}$$

4) حساب الجداء

$$T_n = e^{v_0^2} \times e^{v_1^2} \times \cdots \times e^{v_n^2}$$

$$= e^{v_0^2+v_1^2+\cdots+v_n^2}$$

$$= e^{v_0^2\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2(n+1)}}{1-(\frac{1}{\alpha})^2}}$$

0.1

$$= e^{\ln^2(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2n+2}}{\alpha^2-1}\alpha^2}$$

$$= e^{\alpha^2\ln^2(\frac{1}{\alpha})\cdot\frac{1-(\frac{1}{\alpha})^{2n+2}}{\alpha^2-1}}$$

التمرين 3

$f_m(x) = 2x+3-(x+1)e^{mx}$ ، $m\in\mathbb{N}^*$

I) نضع $m=1$

1) $f_1(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$

$f_1'(x)=2-(x+2)e^{x}$ 0,25

$f_1''(x)=-(x+3)e^{x}$ 0,25

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f_1''(x)$	+	0	−

0,25

ومنه f_1' متزايدة تماما على $]-\infty,-3]$ ومتناقصة تماما على $[-3,+\infty[$ 0,25

x	$-\infty$	-3	$+\infty$
$f_1''(x)$	+	0	−
$f_1'(x)$	2 ↗	$2+e^{-3}$	↘ $-\infty$

0,25

$\lim_{x\to-\infty} f_1'(x)=2$ 0,25

$\lim_{x\to+\infty} f_1'(x)=-\infty$ 0,25

2) $f_1'(0)=0$ ومنه 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	−

0,25

3) تغيرات f_1:

$\lim_{x\to-\infty} f_1(x)=-\infty$ 0,25 ، $\lim_{x\to-\infty}(2x+3)=-\infty$ ، $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$

$\lim_{x\to+\infty} f_1(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{2x+3}{x+1}-e^{x}\right]=-\infty$ 0,25

لأن $\lim_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x+3}{x+1}=2$ و $\lim_{x\to+\infty}-e^{x}=-\infty$

من إشارة $f_1'(x)$ نستنتج أن f_1 متزايدة تماما على $]-\infty,0]$ و متناقصة تماما على $[0,+\infty[$ 0,25

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f_1'(x)$	+	0	−
$f_1(x)$	$-\infty$ ↗	2	↘ $-\infty$

0,25

4) أ. لدينا $f_1(x)=2x+3-(x+1)e^{x}$

و $\lim_{x\to-\infty}(x+1)e^{x}=0$ 0,25

ومنه (C_f) تقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) معادلته $y=2x+3$ بجوار $-\infty$.

ب) $f_1(x)-y=-(x+1)e^{x}$

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f_1(x)-y$	+	0	−
الوضع النسبي	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في $(-1,1)$	(C_f) تحت (Δ)

0,25

5) لدينا f_1 مستمرة و متناقصة تماما على المجال $]0,92;0,93[$ و $f_1(0,92)\simeq 0,02$ و $f_1(0,93)\simeq -0,03$ أي $f(0,92)\times f(0,93)<0$ 0,5

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α محصورا بين $0,92$ و $0,93$.

ولدينا f_1 مستمرة و متزايدة تماما على المجال $]-1,56;-1,55[$ و $f(-1,55)\simeq 0,02$ و $f_1(-1,56)\simeq -0,002$ 0,5

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f_1(x)=0$ تقبل حلا وحيدا β محصورا بين $-1,55$ و $-1,56$

6) انشاء (C_1) و (Δ).

1) إثبات أن جميع المنحنيات (C_m) تشمل نقطتين ثابتتين يطلب تعيينهما

m و m' عددان حقيقيان.

لتكن $M(x,y)$ نقطة من المشترك

$M \in (C_m)\cap(C_{m'})$ معناه $\begin{cases} y = f_m(x) \\ y = f_{m'}(x)\end{cases}$

0,5

ومنه

$$2x+3-(x+1)e^{mx} = 2x+3-(x+1)e^{m'x}$$

$$(x+1)e^{m'x} - (x+1)e^{mx} = 0$$

$$(x+1)(e^{m'x} - e^{mx}) = 0$$

ومنه $x+1=0$ أو $e^{m'x} = e^{mx}$

أي $x=-1$ أو $x=0$

ومنه جميع المنحنيات (C_m) تتقاطع في نقطتين ثابتتين هما $(-1,1)$ و $(0,2)$

2) $\lim_{x\to-\infty} f_m(x) - y = \lim_{x\to-\infty} -(x+1)e^{mx} = 0$

ومنه (Δ) مستقيم مقارب لجميع المنحنيات (C_m)

0,25

- الوضع النسبي

x	$-\infty$ -1 $+\infty$
$f_m(x)-y$	+ 0 −
الوضع النسبي	(C_m) فوق (Δ) (C_m) يقطع (Δ) في $(-1,1)$ (C_m) تحت (Δ)

0,25

3) n عدد طبيعي أكبر من أو يساوي 2

إثبات أن $f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$

من أجل $n=2$ لدينا

$$f_m^{(2)}(x) = f''_m(x)$$

$$f'_m(x) = 2-(1\cdot e^{mx} + me^{mx}(x+1))$$

$$=2-e^{mx}(mx+m+1)$$

$$f''_m(x) = -me^{mx}(mx+m+1) - me^{mx}$$

$$= -me^{mx}(mx+m+2)$$

0,75

ولدينا من أجل $m=2$

$$-m^{2-1}e^{mx}(mx+m+2) = -me^{mx}(mx+m+2)$$

ومنه الخاصية صحيحة من أجل $2=n$

نفرض أن $f_m^{(n)}(x) = -m^{n-1}e^{mx}(mx+m+n)$ ونبرهن أن

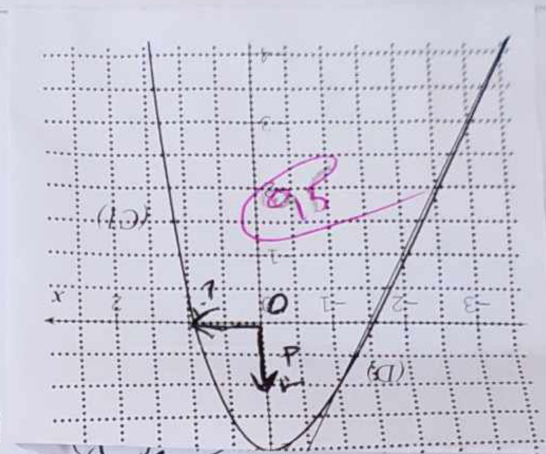
$$f_m^{(n+1)}(x) = -m^{n}e^{mx}(mx+m+n+1)$$

لدينا $f_m^{(n+1)}(x) = (f_m^{(n)}(x))'$ ومنه

$$f_m^{(n+1)}(x) = -m^{n-1}\cdot m e^{mx}(mx+m+n) - m^{n-1} m e^{mx}$$

$$= -m^n e^{mx}(mx+m+n+1)$$

وهو المطلوب



0,5

$$S(\alpha) = \int_0^\alpha (x+1)e^x\,dx$$

نضع $u(x)=x+1$ ومنه $u'(x)=1$

$v'(x)=e^x$ ومنه $v(x)=e^x$

ومنه

$$S(\alpha) = [(x+1)e^x]_0^\alpha - \int_0^\alpha e^x\,dx$$

0,5

$$=(\alpha+1)e^\alpha - 1 - e^\alpha + 1$$

$$S(\alpha) = \alpha e^\alpha \quad (u.a)$$

ب) إثبات أن $S(\alpha) = \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$

لدينا $f_1(\alpha)=0$ معناه $2\alpha+3-(\alpha+1)e^\alpha=0$

أي $e^\alpha = \frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$

0,25

ومنه $S(\alpha) = \alpha\cdot\frac{2\alpha+3}{\alpha+1}$ أي $S(\alpha)=\frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1}$ وهو المطلوب

- حصر $S(\alpha)$.

لدينا $0,92<\alpha<0,93$

$$0,92+1<\alpha+1<0,93+1$$

0,25

$$1,92<(\alpha+1)<1,93$$

ولدينا $\frac{1}{1,93}<\frac{1}{\alpha+1}<\frac{1}{1,92}$ ...(1)

$2(0,92)^2+3(0,92) < 2\alpha^2+3\alpha < 2(0,93)^2+3(0,93)$ ...(2)

من (1)، (2) نجد:

$$\frac{2(0,92)^2+3(0,92)}{1,93} < \frac{2\alpha^2+3\alpha}{\alpha+1} < \frac{2(0,93)^2+3(0,93)}{1,92}$$

$$2,31 < S(\alpha) < 2,35$$

II. نفرض m كيفي