اختبار الفصـــــل الثانـي
في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة ثانوي – شعبة علوم تجريبية — الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

المدة: 2 سا — يوم: 22 مارس 2022

ملاحظة: يمنع إستعمال اللون الأحمر والأخضر

التمرين الأول [04.5 نقطة]

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

❶ الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y' - \sin(3x) = 0$ هي الدوال y حيث:

أ/ $y = 3\cos(3x) + c$ ب/ $y = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$ ج/ $y = -3\cos(3x) + c$

❷ الدّوال الأصلية للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}(\ln x^2 + x)$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال F حيث:

أ/ $F(x) = (\ln x)^2 + x + c$ ب/ $F(x) = 2\ln x^2 + x + c$ ج/ $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + x + c$

❸ المتتالية (v_n) المعرفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{e^{1-n}}$، هي متتالية هندسية أساسها

أ/ $\frac{1}{e}$ ب/ $\sqrt{e}$ ج/ e

التمرين الثاني: [05.5 نقاط]

❶ نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ:

$$u_n = \frac{e}{n(n+1)}$$

أ/ احسب u_1 و u_2

ب/ ما تخمينك حول اتجاه تغير المتتالية (u_n)، تحقّق من ذلك حسابيا

❷

أ/ تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم أنّ:

$$u_n = \frac{e}{n} - \frac{e}{n+1}$$

ب/ عين عبارة S_n بدلالة n حيث:

$$S_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n$$

ج/ احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$

❸ من أجل كل عدد حقيقي x غير معدوم ومن أجل كل عدد طبيعي $n > 1$ لدينا:

$$v_n = \int_1^n \frac{e}{x(x+1)}\,dx$$

أ/ بيّن أنّه من أجل كل $n > 1$ لدينا:

$$v_n = e\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$$

ب/ عيّن بدلالة n المجموع S'_n حيث:

$$\backslash S'_n = v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_n$$

اقلب الصفحة

التمرين الثالث [10 نقاط]

I) نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$g(x) = 2x + 1 + e^{2x}$$

❶ ادرس تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$

❷ بيّن أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α في المجال $]-0.8; -0.7[$

❸ استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

II) f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$$f(x) = 1 - x + (x+1)e^{-2x}$$

ونسمي (C_f) تمثيلها البياني في مستوٍ منسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o; \vec{i}, \vec{j})$

❶

أ/ احسب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها

ب/ استنتج أنّ المنحنى (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x + 1$

ج/ ادرس وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ)

❷

أ/ بيّن أنه من أجل كل عدد حقيقي x:

$$f'(x) = -g(x)e^{-2x}$$

ب/ شكّل جدول تغيرات الدالة f

ج/ بيّن أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2 حيث: $-1.2 < x_1 < -1.1$ وَ $1.1 < x_2 < 1.2$

❸ مثّل بيانيا (C_f) ، نأخذ $f(\alpha) \approx 2.9$

III)

❶ باستعمال المكاملة بالتجزئة جد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$

❷ احسب $\mathcal{A}$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، المستقيم (Δ) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x = 1$ و $x = -1$

تأمل معي ... **87** يوم على موعد البكالوريا.... ماذا تنتظر!؟

يقول نابليون بونابرت:

"أحسن وسيلة للتغلب على الصعاب اختراقها"

إنتهى ✔

تصحيح مقترح لاختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

المستوى: ثالثة ثانوي – شعبة علوم تجريبية — الأستاذ: قويسم ابراهيم الخليل

التمرين الأول [4.5 نقاط]

في كل حالة من الحالات الثلاث الآتية، اقترحت ثلاث إجابات، إجابة واحدة فقط منها صحيحة، حدّدها مع التعليل

❶ الحل العام للمعادلة التفاضلية: $y' - \sin(3x) = 0$ هي الدوال y حيث:

أ/ $y = 3\cos(3x) + c$

ب/ $y = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c$

ج/ $y = -3\cos(3x) + c$

[0.5ن] + [01ن]

لدينا:

$$y' - \sin(3x) = 0 \Longrightarrow y' = \sin(3x)$$
$$\Longrightarrow \boxed{y = -\frac{1}{3}\cos(3x) + c}$$

❷ الدوال الأصلية للدالة $f: x \mapsto \frac{1}{x}(\ln x^2 + x)$ على المجال $]0;+\infty[$ هي الدوال F حيث:

أ/ $F(x) = (\ln x)^2 + x + c$

ب/ $F(x) = 2\ln x^2 + x + c$

ج/ $F(x) = \frac{(\ln x)^2}{2} + x + c$

[0.5ن] + [01ن]

لدينا:

$$f(x) = \frac{1}{x}(\ln x^2 + x) = \frac{1}{x}(2\ln x + x) = 2\frac{1}{x}\ln x + \frac{x}{x}$$
$$= 2\frac{1}{x}\ln x + 1$$

ومنه:

$$F(x) = 2\frac{(\ln x)^2}{2} + x + c = \boxed{(\ln x)^2 + x + c}$$

❸ المتتالية (v_n) المعرّفة من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ بـ: $v_n = \frac{1}{e^{1-n}}$، هي متتالية هندسية أساسها:

أ/ $\frac{1}{e}$

ب/ $\sqrt{e}$

ج/ e

[0.5ن] + [01ن]

$$v_n = \frac{1}{e^{1-n}} = e^{n-1} = e^{-1}e^n$$

إذن (v_n) هندسية أساسها $\boxed{e}$

التمرين الثاني: [5.5 نقاط]

❶

أ/ حساب u_1 و u_2:

$$u_1 = \frac{e}{1(1+1)} = \boxed{\frac{e}{2}} \quad ; \quad u_2 = \frac{e}{2(2+1)} = \boxed{\frac{e}{6}}$$

[01ن]

ب/ وضع تخمين حول اتجاه تغير المتتالية u_n

لدينا: $u_1 > u_2$ ومنه نخمن أنّ المتتالية (u_n) متناقصة [0.5ن]

ج/ التحقّق من ذلك حسابيا:

$$u_{n+1} - u_n = \frac{e}{(n+1)(n+2)} - \frac{e}{n(n+1)} = \frac{en - e(n+2)}{(n+1)(n+2)n}$$
$$= \frac{en - en - 2}{(n+1)(n+2)n} = \frac{-2}{(n+1)(n+2)n} < 0$$

إذن (u_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$ [01ن]

❷

أ/ التحقق أن: $u_n = \frac{e}{n} - \frac{e}{n+1}$

$$u_n = \frac{e}{n} - \frac{e}{n+1} = \frac{en + e - en}{n(n+1)} = \boxed{\frac{e}{n(n+1)}}$$ [01ن]

ب/ تعيين عبارة S_n :

$$\begin{aligned} S_n &= u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n \\ &= \underbrace{\frac{e}{1} - \frac{e}{1+1}}_{u_1} + \underbrace{\frac{e}{2} - \frac{e}{2+1}}_{u_2} + + \underbrace{\frac{e}{3} - \frac{e}{3+1}}_{u_3} + \cdots + \underbrace{\frac{e}{n} - \frac{e}{n+1}}_{u_n} \\ &= e - \frac{e}{2} + \frac{e}{2} - \frac{e}{3} + \frac{e}{3} - \frac{e}{4} + \cdots + \frac{e}{n} - \frac{e}{n+1} \\ &= e - \frac{e}{n+1} = \boxed{\frac{en}{n+1}} \end{aligned}$$ [0.5ن]

ج/ حساب $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$:

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{en}{n+1}\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{en}{n}\right) = \boxed{e}$$ [0.5ن]

❸

أ/ تبيين أنّه من أجل كل $n > 1$ لدينا: $v_n = e\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)$:

$$v_n = \int_1^n \frac{e}{x(x+1)}dx = e\int_1^n \frac{1}{x(x+1)}dx = e\int_1^n \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}dx = e[\ln x - \ln(x+1)]_1^n$$

$$= e\left[\ln\left(\frac{x}{x+1}\right)\right]_1^n = e\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = e\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln(2)\right] = \boxed{e\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right)}$$ [0.5ن]

ب/ تعيين بدلالة n المجموع S'_n :

$$\begin{aligned} S'_n &= v_2 + v_3 + v_4 + \cdots + v_n \\ &= e\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 2\right] + e\left[\ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2\right] + e\left[\ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln 2\right] + \cdots + e\left[\ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2\right] \\ &= e\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right) + \ln 2 + \ln\left(\frac{3}{4}\right) + \ln 2 + \ln\left(\frac{4}{5}\right) + \ln 2 + \cdots + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2\right] \\ &= e\left[\ln\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}\right) + \ln 2 + \ln 2 + \ln 2 + \cdots + \ln 2\right] \\ &= e\left[\ln\left(\frac{2}{n+1}\right) + (n-1)\ln 2\right] \\ &= e\left[\ln\left(\frac{2}{n+1}\right) + \ln 2^{n-1}\right] \\ &= e\ln\left(\frac{2\cdot 2^{n-1}}{n+1}\right) \\ &= \boxed{e\ln\left(\frac{2^n}{n+1}\right)} \end{aligned}$$ [0.5ن]

التمرين الثالث [10 نقاط]

(I

❶ دراسة تغيرات تغيرات الدالة g على $\mathbb{R}$:

- النهايات:

• $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$ • $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$ [0.5ن]

- دراسة $g'(x)$:

$$g'(x) = 2 + 2e^{2x} = 2(1 + e^{2x})$$ [0.5ن]

لدينا: $g'(x) > 0$ ومنه الدالة g متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

❷ تبيين أنّ المعادلة $g(x) = 0$ تقبلا حلا وحيدا α:

لدينا: الدالة g مستمرة ورتيبة على المجال $[-0.8; -0.7]$

ولدينا: $g(-0.7) \times g(-0.8) < 0$ لأنّ $g(-0.7) \approx 0.09$ و $g(-0.8) \approx -0.2$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $]-0.8; -0.7[$ [0.5ن]

❸ استنتاج حسب قيم x إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$: [0.5ن]

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

(II

❶

أ/ حساب نهايات الدالة f عند أطراف مجموعة تعريفها:

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty}\left(\underbrace{e^{-2x}}_{+\infty}\left(\underbrace{e^{2x}}_{0} - \underbrace{\frac{2x}{2}e^{2x}}_{0} + \underbrace{x+1}_{-\infty}\right)\right) = -\infty$ [0.5ن]
- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(1 - \underbrace{x}_{+\infty} - \frac{1}{2}\underbrace{(-2x)e^{-2x}}_{0} + \underbrace{e^{-2x}}_{0}\right) = -\infty$ [0.5ن]

ب/ استنتاج أنّ (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) :

لدينا:

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x) - (-x+1)] = \lim_{x\to+\infty}[(x+1)e^{-2x}] = \lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{1}{2}\underbrace{(-2x)e^{-2x}}_{0} + \underbrace{e^{-2x}}_{0}\right] = 0$$ [0.5ن]

إذن (C_f) يقبل مستقيم مقارب مائل (Δ) بجوار $+\infty$ معادلته $y = -x + 1$

ج/ دراسة وضعية (C_f) بالنسبة إلى (Δ):

$$f(x) - y_{(\Delta)} = 0 \Longrightarrow (x+1)e^{-2x} = 0 \Longrightarrow x + 1 = 0 \Longrightarrow x = -1$$

ومنه:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f(x) - y_{(\Delta)}$	$-$	0	$+$

[0.5ن]

- (C_f) تحت (Δ) لما $x \in]-\infty; -1[$ • (C_f) يقطع (Δ) لما $x = -1$ • (C_f) فوق (Δ) لما $x \in]-1; +\infty[$

❷

أ/ تبيين أنه: $f'(x) = -g(x)e^{-2x}$

$$\begin{aligned} f'(x) &= -1 + e^{-2x} - 2e^{-2x}(x+1) \\ &= -1 - e^{-2x} - 2xe^{-2x} \\ &= -(1 + e^{-2x} + 2xe^{-2x}) \\ &= -(1 + 2x + e^{2x})e^{-2x} \\ &= -g(x)e^{-2x} \end{aligned}$$ [01ن]

ب/ تشكيل جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $e^{-2x} > 0$، إذن إشارة $f'(x)$ عكس إشارة $g(x)$ [0.5ن]

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(\alpha)$	↘ $-\infty$

[0.5ن]

ج/ تبيين أنّ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين x_1 و x_2:

- لدينا: الدالة f مستمرة ومتزايدة تماما على المجال $]-1.2; -1.1[$

ولدينا: $f(-1.2) \times f(-1.1) < 0$ لأنّ: $f(-1.1) \approx 0.05$ و $f(-1.2) \approx -0.8$

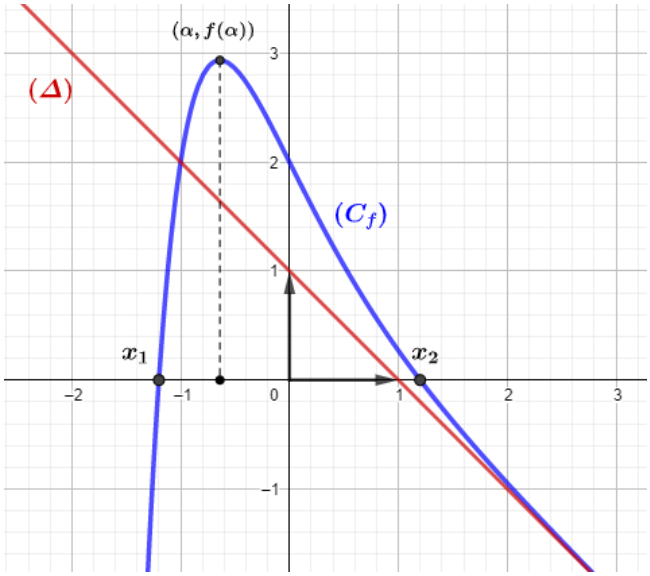
ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا x_1 في المجال $]-1.2; -1.1[$ [0.5ن]

- لدينا: الدالة f مستمرة متناقصة تماما على المجال $]1.1; 1.2[$

ولدينا: $f(1.1) \times f(1.2) < 0$ لأنّ: $f(1.1) \approx 0.13$ و $f(1.2) \approx -0.023$

[0.5ن] ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا x_2 في المجال $]1.1;1.2[$

❸ التمثيل البياني:



[01ن]

(III

❶ إيجاد دالة أصلية للدالة $x \longmapsto (x+1)e^{-2x}$ على $\mathbb{R}$:

$\int (x+1)e^{-2x}dx$ [0.5ن]

نضع: $\begin{vmatrix} u(x)=x+1 & u'(x)=1 \\ v'(x)=e^{-x} & v(x)=-\frac{1}{2}e^{-2x} \end{vmatrix}$

ومنه:

$$\begin{aligned}
\int (x+1)e^{-2x}dx &= \frac{-(x+1)e^{-2x}}{2} - \int -\frac{1}{2}e^{-2x}dx \\
&= \frac{-(x+1)e^{-2x}}{2} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx \\
&= \frac{-(x+1)e^{-2x}}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-2x}\right) + c \\
&= -\frac{(x+1)e^{-2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{-2x} + c \\
&= -\frac{2(x+1)e^{-2x}+e^{-2x}}{4} + c \\
&= \boxed{-\frac{(2x+3)e^{-2x}}{4} + c}
\end{aligned}$$

[0.5ن]

❷ حساب $\mathcal{A}$:

لمّا $x \in [-1;0]$ لدينا: (C_f) فوق (Δ) ومنه:

[0.5ن]

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= \int_{-1}^{0} \big(f(x)-(1-x)\big)dx \\
&= \int_{-1}^{0} \big(1-x+(x+1)e^{-2x}-(1-x)\big)dx \\
&= \int_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}dx \\
&= \left[-\frac{(2x+3)e^{-2x}}{4}\right]_{-1}^{0} \\
&= \frac{-3}{4} - \left(-\frac{e^2}{4}\right) = \boxed{\frac{e^4-3}{4}}\, u.a
\end{aligned}$$

[0.5ن]