المستوى: الثالث ثانوي علوم	**السنة الدراسة: 2024/2023**
القسم: 3ع1 / 3ع2	**المدة: ساعتان**

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (06 نقاط)

(U_n) متتالية عددية معرفة كما يلي: $U_0 = -1$ و من أجل كل عدد طبيعي n:

$$2U_{n+1} = U_n + 6$$

1) أ) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n < 6$.

ب) أدرس اتجاه تغير (U_n) و تقاربها

2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n: $V_n = U_n - 6$.

أ) بين أن(V_n)متتالية هندسية يطلب تعيين أسساها و حدها الأول V_0 .

ب) أكتب V_n بدلالة n ثم أحسب $\lim_{n \to +\infty} U_n$.

3) أحسب بدلالة n ما يلي:

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$
$$P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$$

التمرين الثاني: (06 نقاط)

يحتوي صندوق على 3 كريات بيضاء و n كرية سوداء، n عدد طبيعي غير معدوم.

نسحب في آن واحد كريتين من الصندوق

الكريات لا يمكن التمييز بينها عند اللمس

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المحصل عليها.

1) عين قيم المتغير العشوائي X.

2) عرف بدلالة n قانون احتمال X.

3) أحسب بدلالة n الأمل الرياضياتي لـ X.

4) أحسب بدلالة n التباين لـ X.

5) أحسب n حتي يكون: $P(X = 0) = P(X = 2)$

التمرين الثالث: (08 نقاط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-2\,;8[$ بـ:

$$f(x) = \ln(x+2) + \ln(-x+8) - \ln 16$$

و ليكن (C_f) منحنى الدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد و المتجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$،

الوحدة (2 cm)

1) أحسب $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to -2}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 8}} f(x)$ ثم فسر النتيجتين بيانيا.

2) تحقق أنه من أجل كل x من $]-2\,;8[$: $f'(\quad) = \frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$

3) أدرس إشارة $f'(x)$ على $]-2\,;8[$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

4) عين نقط تقاطع المنحنى (C_f) مع محوري الإحداثيات.

5) بين أنه من أجل كل x من المجال $]-2\,;8[$:

$$\begin{cases}(6-x) \in\ ]-2;8[\\ f(6-x) = f(x)\end{cases}$$

ثم فسر النتيجة بيانيا.

6) أرسم (C_f).

7) لتكن الدالة العددية F المعرفة على المجال $]-2;8[$ بـ:

$$F(x) = (x+2)\ln(x+2) + (x-8)\ln(-x+8) - 2x - x\ln 16$$

بين أن F دالة أصلية لـ f على المجال $]-2;8[$.

8) أحسب بـ cm^2 مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات التي معادلاتها:

$$x = 4 \quad ; \quad x = 0 \quad ; \quad y = 0$$

بالتوفيق

تصحيح اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول: (06ن)

$$\begin{cases} U_0 = -1 \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}U_n + 3 \end{cases}$$ 1

1) أ) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $U_n < 6$.

ب) اتجاه تغير (U_n):

من أجل كل n من $\mathbb{N}$

0,5 $$U_{n+1} - U_n = -\frac{1}{2}U_n + 3$$

0,25 $$U_{n+1} = -\frac{1}{2}(U_n - 6) > 0$$

لأن: $U_n < 6$

0,25 إذن $_n$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

التقارب:

بما أن $_n$ متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة في الأعلى فإنها متقاربة 0,5

2) أ) نبين أن $_n$ هندسية: $V_n = U_n - 6$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} = \frac{1}{2}V_n$ 0,5

إذن: V_n متتالية هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$ و حدها الأول $V_0 = -7$

ب) $_n$ بدلالة n: $V_n = V_0 \times q^n$

0,5 $$V_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$: $U_n = V_n + 6$

$$U_n = -7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$$

بما أن $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن: $\lim\limits_{n \to +\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$

0,5 $$\boxed{\text{إذن: } \lim_{n \to +\infty} U_n = 6}$$

3) حساب S_n و P_n:

$$S_n = U_0 + U_1 + \cdots + U_n$$

$$S_n = (V_0 + V_1 + \cdots + V_n) + 6(n+1)$$

0,5 $$S_n = V_0\left(\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}\right) + 6n + 6$$

$$S_n = -7\left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right] + 6n + 6$$

0,5 $$\boxed{S_n = 7\left(\frac{1}{2}\right)^n + 6n - 8}$$

$$P_n = V_0 \times V_1 \times \ldots \times V_n$$

$$P_n = \left[-7\left(\frac{1}{2}\right)^0\right] \times \left[-7\left(\frac{1}{2}\right)^1\right] \times \ldots \times \left[-7\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]$$

0,25 $$P_n = (-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{0+1+\cdots+n}$$

0,25 $$P_n = (-7)^{n+1} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

التمرين الثاني: (06ن)

1 (1 $X(\Omega) = \{0,1,2\}$

2) قانون احتمال X:

0,5 $$P(X=0) = \frac{C_n^2}{C_{n+3}^2} = \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$$

0,5 $$P(X=1) = \frac{C_3^1 \times C_n^1}{C_{n+3}^2} = \frac{6n}{(n+3)(n+2)}$$

0,5 $$P(X=2) = \frac{C_3^2}{C_{n+3}^2} = \frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

X_i	0	1	2
P_i	$\frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6n}{(n+3)(n+2)}$	$\frac{6}{(n+3)(n+2)}$

3) الأمل الرياضياتي لـ X: 0,5

$$E(X)=\sum_{i=1}^{3}X_iP_i=\frac{6}{n+3}$$ 1

4) التباين لـ X:

$$V(X)=E(X^2)-[E(X)]^2$$

$$V(X)=\frac{6n}{(n+3)(n+2)}+\frac{24}{(n+3)(n+2)}-\frac{36}{(n+3)^2}$$

$$\boxed{V(X)=\frac{6n(n+1)}{(n+3)^2(n+2)}}$$ 1

5) حساب n حيث: $P(X=0)=P(X=2)$

$$[P(X=0)=P(X=2)] \Leftrightarrow \frac{n(n-1)}{(n+3)(n+2)}=\frac{6}{(n+3)(n+2)}$$

$$\Leftrightarrow n(n-1)=6$$

$$\Leftrightarrow n^2-n-6=0$$

$$\Leftrightarrow n \in \{-2,3\}$$

لكن $n\in\mathbb{N}$ إذن: $n=3$ 1

التمرين الثالث:

1) $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ >}} f(x)=-\infty$; $\lim\limits_{\substack{x\to 8\\ <}} f(x)=-\infty$ 0,75 0,75

المستقيمان اللذان معادلتيهما: $x=-2$ و $x=8$

هما مستقيمان مقاربان لـ (C_f) 0,5 0,5

2) إثبات أنه من أجل كل x من $]-2;8[$:

$$f'(x)=\frac{-2x+6}{(x+2)(-x+8)}$$ 1

3) إشارة $f'(x)$: $-2<x<8$

ومنه: $\begin{cases} x+2>0 \\ -x+8>0 \end{cases}$ 0,5

و عليه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $-2x+6$

x	-2	3	$+8$
$-2x+6$	$+$	$-$	
$f'(x)$	$+$	$-$	

جدول التغيرات: 0,5

x	-2	3	8
$f'(x)$	$+$		$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$f(3)$	↘ $-\infty$

0,75 $f(3)=2\ln 5-4\ln 2\approx 0,45$

نقط تقاطع (C_f) مع المحور و الاحداثيات:

$f(0)=0$ إذن : $C_f\cap(yy')=\{o(0,0)\}$

0,25 $f(x)=0 \Leftrightarrow [x\in\{0,6\}]$

إذن: $(C_f)\cap(xx')=\{o(0,0);A(6,0)\}$

0, 5

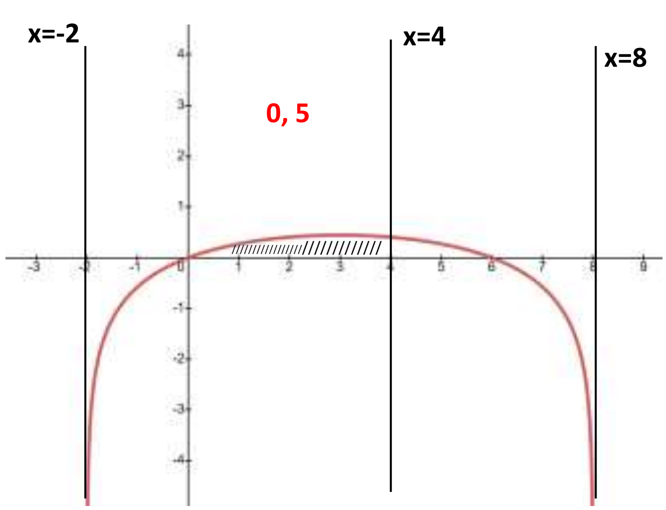
5) من أجل كل x من $]-2,8[$:

$$\begin{cases}(6-x)\in]-2,8[\\ f(6-x)=f(x)\end{cases}$$ 0, 25

إذن المستقيم ذو المعادلة $x=3$ هو محور تناظر

0, 25

للمنحنى f



7) من أجل كل x من $]-2,8[$:

$F'(x) = f(x)$ **0, 5**

إذن:

F دالة أصلية للدالة f على $]-2,8[$:

8) $A = (\int_0^4 f(x)dx \times (4\ cm^2)$

$A = [F(x)]_0^4 \times (4\ cm^2)$ **0, 5**

$A = 4(6\ln 6 - 2\ln 2 - 8)cm^2$