



مارس 2022

المستوى: الثالثة علوم تجريبية

المدة : ساعتين.

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين 1

لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $]-1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = \frac{3x}{x+1}$

و ليكن  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوى منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  (الشكل في الوثيقة المرفقة)

(I)  $(u_n)$  متتالية عددية معرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n}{u_n + 1} \end{cases}$$

(1) مثل على محور الفواصل الحدود  $u_0$  ،  $u_1$  ،  $u_2$  و  $u_3$  (دون حسابها موضحا خطوط الانشاء).

(2) ضع تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  و تقاربها.

(3) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي  $n: u_n < 2$

(4) ادرس اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتج أنها متقاربة ، و عين نهايتها.

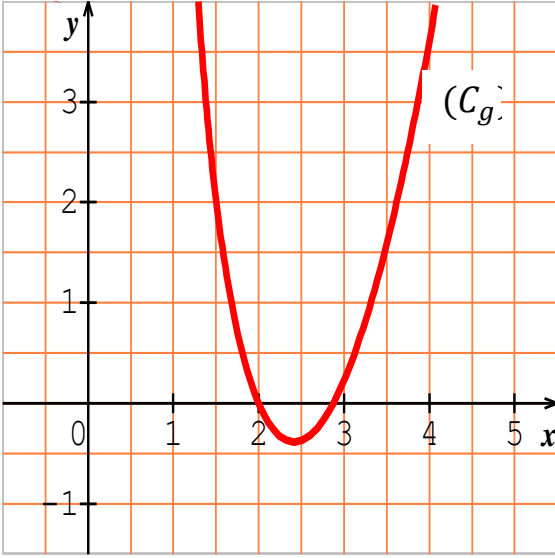
(II) نعتبر المتتالية  $(v_n)$  المعرفة على  $\mathbb{N}$  كما يلي:  $v_n = 1 - \frac{2}{u_n}$

(ا) برهن أن  $(v_n)$  متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

(ب) اكتب عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

(3) احسب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{u_0}{u_0-2} + \frac{u_1}{u_1-2} + \dots + \frac{u_n}{u_n-2}$

## التمرين 2



(I) لتكن الدالة  $g$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$g(x) = x^2 - 2x - 4 \ln(x-1)$$

و ليكن  $(C_g)$  تمثيلها البياني كما هو مبين في الشكل المقابل

(1) بقراءة بيانية: عين حلول المعادلة  $g(x) = 0$

(2) احسب  $g(2)$ ، ثم بين ان المعادلة  $g(x) = 0$

تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  حيث  $2.87 < \alpha < 2.88$

(3) استنتج اشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$ .

(II) لتكن الدالة  $f$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي:  $f(x) = x - 3 + \frac{4 \ln(x-1)}{x-1} + \frac{5}{x-1}$

و  $(C_f)$  تمثيلها البياني في مستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس  $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(1) احسب النهايات عند حدود مجموعة التعريف، فسر النتائج هندسيا.

(2) بين أن المستقيم  $(\Delta)$  ذي المعادلة  $y = x - 3$  مقارب مائل للمنحنى  $(C_f)$ .

(ب) ادرس وضعية المنحنى  $(C_f)$  بالنسبة للمستقيم  $(\Delta)$ .

(3) بين انه من اجل كل  $x$  من  $]1; +\infty[$  فإن:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

(ب) استنتج اتجاه تغير الدالة  $f$  ثم شكل جدول تغيراتها.

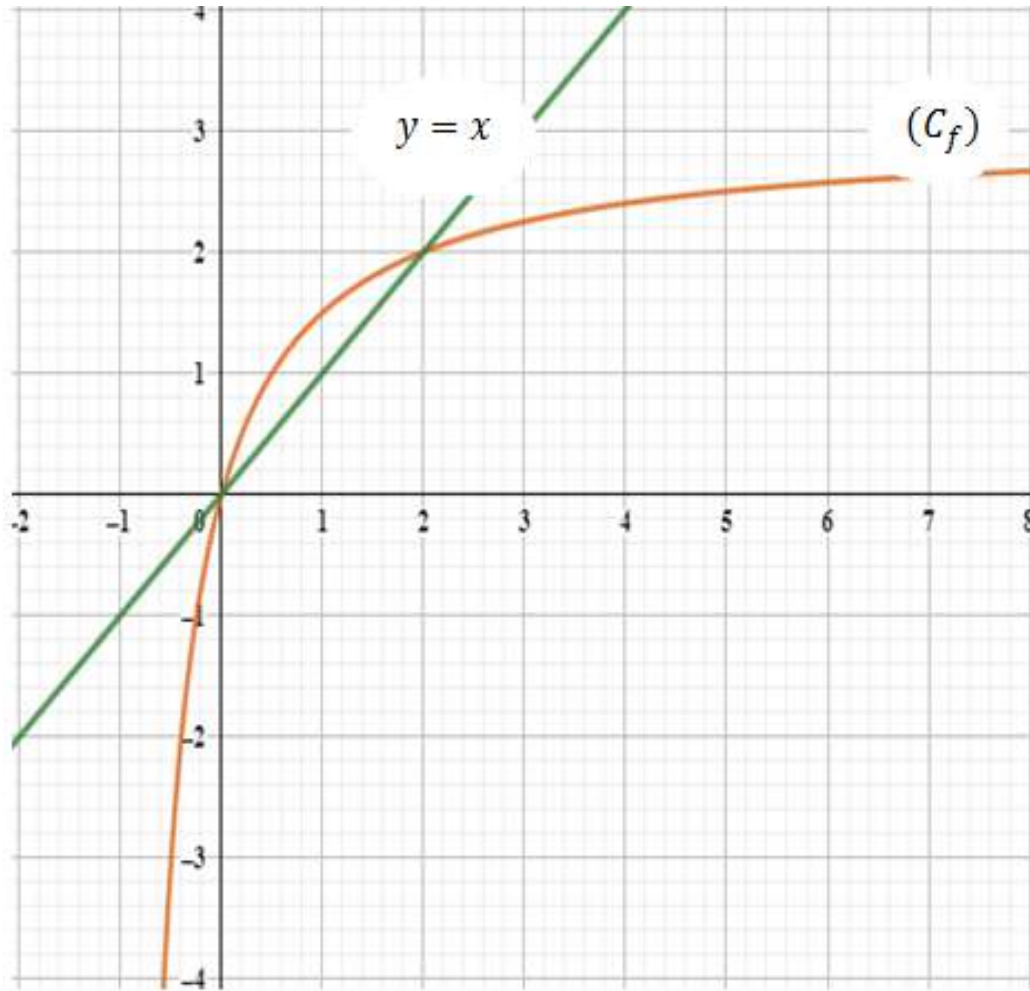
(4) ارسم  $(T)$  و  $(C_f)$ . (نأخذ  $f(\alpha)$ )

(5) لتكن الدالة  $h$  المعرفة على  $]1; +\infty[$  كما يلي:

$$h(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + 2[\ln(x-1)]^2 + 5\ln(x-1)$$

- بين ان الدالة  $h$  دالة اصلية للدالة  $f$ .

بالتوفيق.



- الوثيقة المرفقة -

## التصحيح النموذجي

العلامة	الحل	رقم التمرين
	<p>(1) تمثيل على محور الفواصل الحدود <math>u_0, u_1, u_2, u_3</math> و <math>u_0, u_3</math></p> <div style="text-align: center;"> </div> <p>(2) التخمين حول اتجاه تغير المتتالية <math>(u_n)</math> و تقاربها.  نحمن أن المتتالية <math>(u_n)</math> متزايدة و متقاربة نحو العدد 2 .</p> <p>(3) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي <math>n: u_n &lt; 2</math>  نسمي <math>P(n)</math> الخاصية <math>u_n &lt; 2</math></p> <p>(1) من أجل <math>n = 0</math> لدينا :  <math>u_0 = 1</math> و <math>1 &lt; 2</math> و منه : <math>u_0 &lt; 2</math> أي <math>(p_n)</math> صحيحة من أجل <math>n = 0</math> .</p> <p>(2) فرض صحة <math>(p_n)</math> و نبهن على صحة <math>(p_{n+1})</math> أي فرض أن <math>u_n &lt; 2</math> و نبهن أن <math>u_{n+1} &lt; 2</math>  لدينا : <math>u_n &lt; 2</math> و منه <math>u_n + 1 &lt; 3</math> أي <math>\frac{1}{u_n + 1} &gt; \frac{1}{3}</math> أي <math>\frac{-3}{u_n + 1} &lt; -1</math></p> <p>و منه : <math>3 - \frac{-3}{u_n + 1} &lt; 3 - 1</math> وبالتالي : <math>u_{n+1} &lt; 2</math> , إذن : <math>(p_{n+1})</math> صحيحة .  و منه حسب مبدأ الاستدلال بالتراجع فإن <math>u_n &lt; 2</math></p>	<p>التمرين 1</p>

(4) اتجاه تغير المتتالية  $(u_n)$  ، ثم استنتاج أنها متقاربة ، و نهايتها.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n}{u_n + 1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 2u_n}{u_n + 1} = \frac{-u_n(u_n - 2)}{u_n + 1}$$

لدينا من البرهان بالتراجع :  $u_n < 2$  أي  $u_n - 2 < 0$  و  $u_n > 0$  أي  $-u_n < 0$

و منه  $u_{n+1} - u_n > 0$  و منه المتتالية  $(u_n)$  متزايدة .  
- بما أن المتتالية  $(u_n)$  محدودة من الأعلى بالعدد 2 و متزايدة فإنها متقاربة.

$$\left| \begin{array}{l} \text{لدينا : } \ell = \frac{3\ell}{\ell+1} \text{ و منه : } \ell^2 + \ell = 3\ell \text{ أي } \ell^2 - 2\ell = 0 \end{array} \right.$$

$$\ell = 0 \text{ (مرفوض) أو } \ell = 2$$

و منه  $l=2$

(ا) نبرهن أن متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول .

$$\text{لدينا : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n} \text{ و منه : } v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2}{\frac{3u_n}{u_n + 1}} = 1 - \frac{2(u_n + 1)}{3u_n} = 1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{3u_n}$$

$$\text{و منه : } v_{n+1} = \frac{1}{3} - \frac{2}{3u_n} = \frac{1}{3} \left( 1 - \frac{2}{u_n} \right) = \frac{1}{3} v_n$$

$$q = \frac{1}{3} ; v_0 = 1$$

(ب) عبارة  $v_n$  بدلالة  $n$  ، ثم استنتج عبارة  $u_n$  بدلالة  $n$  .

$$v_n = - \left( \frac{1}{3} \right)^n$$

$$u_n = \frac{2}{1 - v_n} = \frac{2}{1 + \left( \frac{1}{3} \right)^n} \quad \text{و}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 2$$

(3) حساب بدلالة  $n$  المجموع  $S_n$  حيث:  $S_n = \frac{u_0}{u_0 - 2} + \frac{u_1}{u_1 - 2} + \dots + \frac{u_n}{u_n - 2}$

$$S_n = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}(3)^n$$

(I)

(1) بقراءة بيانية للمنحني نجد المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلين متميزين

(2) لدينا:  $g(2) = 0$

$g(2) = 0$ :

\* بما أن  $g$  مستمرة و متزايدة تماما على المجال  $[2.87; 2.88]$  و  $<$

$g(2.87) \cdot g(2.88)$

وحسب مبرهنة القيم المتوسطة فإن المعادلة  $g(x) = 0$  تقبل حلا وحيدا  $\alpha$  في

المجال  $[2.87; 2.88]$

(3) إشارة  $g(x)$  حسب قيم  $x$  ملخصة في الجدول التالي:

$x$	1	2	$\alpha$	$+\infty$
$g(x)$		+ 0	- 0	+

(II)

(1)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$  ومنه المستقيم الذي معادلته  $x = 1$  مقارب لـ:  $(C_f)$

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

2- (أ) بما أن  $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - (x - 3)] = 0$  فإن المستقيم الذي معادلته  $y = x - 3$  هو

مستقيم مقارب

مائل للمنحني  $(C_f)$  بجوار  $(+\infty)$

ب) لدراسة وضعية  $(C_f)$  بالنسبة إلى المستقيم المقارب المائل ندرس إشارة الفرق

$f(x) - y$  و الملخصة في الجدول التالي

$x$	1	$1 + e^{-\frac{5}{4}}$	$+\infty$
$f(x) - y$		- 0	+
الوضعية		$(C_f)$ يقع تحت $(C_f)$ يقطع	$(C_f)$ يقع فوق $(\Delta)$
		$(\Delta)$	$(\Delta)$

3-أ) مهما كان  $x \in ]1; +\infty[$  لدينا:  $f'(x) = \frac{g(x)}{(x-1)^2}$

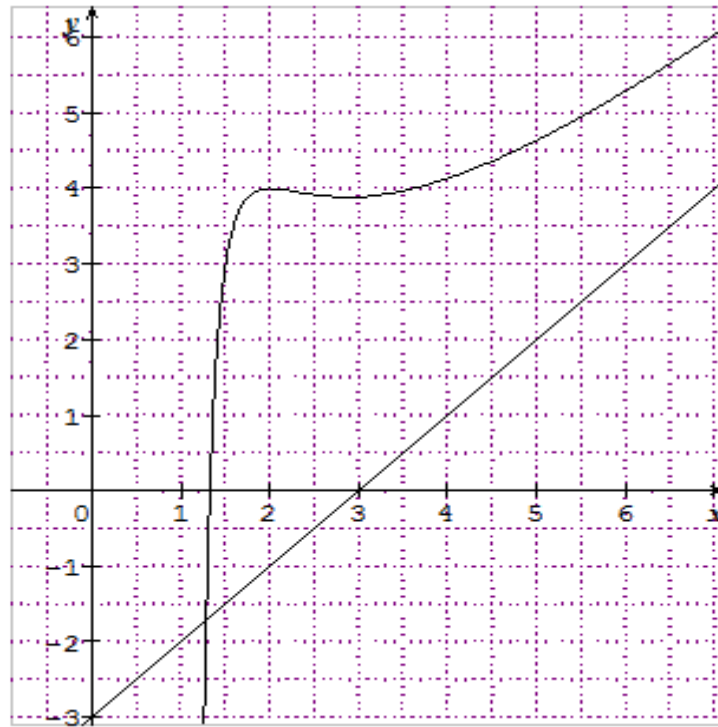
ب) إشارة  $f'(x)$  من إشارة  $g(x)$ .

أي أن:  $f$  متزيدة تماما على كل من المجالين  $]1; 2]$  و  $[\alpha; +\infty[$  ومتناقصة تماما على  $]2; \alpha]$   
جدول التغيرات

$x$	1	2	$\alpha$	$+\infty$
$f'(x)$		+	0 - 0	+
$f(x)$				

$-\infty \nearrow 4 \searrow f(\alpha) \nearrow +\infty$

(4) رسم  $(T)$  و  $(C_f)$ .



(5) نبين ان الدالة  $h$  دالة اصلية للدالة  $f$ .

$$h'(x) = f(x)$$