المستوى الثالثة ثانوي شعبة رياضيات
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات 2سا

التمرين الأول : (4.5 نقاط)

1) نعتبر متتالية التكاملات (I_n) حيث $I_n = \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx$ مع $n \in \mathbb{N}^*$

أ- اثبت أن المتتالية (I_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى بالعدد 1

ب- ماذا يمكن أن نستنتج ؟

2) أ- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن : $I_n = 1 - J_n$ حيث : $J_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

ج- استنتج: $\lim_{n\to+\infty} J_n$ ثم $\lim_{n\to+\infty} I_n$

التمرين الثاني : (5.5 نقاط)

1) نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y حيث: $63x + 5y = 159 \ldots\ldots (E)$

أ- تحقق أن العددين 5 و63 أوليان فيما بينهما ثم بين أن المعادلة(E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب- عين الحل الخاص $(x_0; y_0)$ للمعادلة (E) الذي يحقق $x_0 + y_0 = -3$ ثم استنتج حلول المعادلة (E)

جـ- عين كل الثنائيات $(x; y)$ حلول المعادلة (E) التي تحقق: $|13x + y - 33| < 4$

2) A عدد طبيعي يكتب $\overline{5\alpha0\alpha}$ في نظام التعداد ذي الأساس 7 ويكتب $\overline{\beta10\beta0}$ في نظام التعداد ذي الأساس 5.

أ- جد العددين الطبيعيين α و β ثم أكتب العدد $(A + 8)$ في النظام العشري ثم النظام الثنائي

ب-أدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 3^n على 5

جـ- عين قيم العدد الطبيعي n التي تحقق: $\begin{cases} 3^{4n} + 3^n - A \equiv 0[5] \\ n \equiv 0[3] \end{cases}$ و $35 < n < 65$

التمرين الثالث: (10 نقاط)

لتكن f دالة معرفة على $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = x - 2 - lnx$

(C_f) منحناها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x)$

ب- أدرس اتجاه تغير الدالة f على مجال تعريفها ثم شكل جدول تغيراتها

جـ- بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين a وb حيث $e^{-2} < a < e^{-1}$ و $3 < b < 4$

د- أنشئ (C_f)

2) بين أن كل المستقيمات الموازية للمستقيم (D) ذو المعادلة $y = x$ تقطع (C_f) في نقطة وحيدة

3) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $f(x) = m^2x$ حلا وحيدا

4) لتكن النقطتان M و N من المنحنى (C_f) فاصلتاهما على الترتيب x و $\frac{1}{x}$

أ- عين بدلالة x احداثيات النقطة I منتصف القطعة $[MN]$

ب- استنتج أن النقطة I تنتمي إلى مستقيم يوازي (D)

5) لتكن الدالة Φ المعرفة على المجال $[3;4]$ بـ: $\Phi(x) = x - f(x)$

أ- بين أنه من أجل $3 \leq x \leq b$ فإن: $\Phi(x) \geq x$ و $3 \leq \Phi(x) \leq b$

ب- أحسب التكامل $I = \int_3^b (\Phi(x) - x)dx$ ثم فسر النتيجة هندسيا

جـ- بين أنه من أجل كل $x \in [3;b]$ فإن: $|I| \leq (b-3)^2$

التصحيح النموذجي

التمرين الأول :

.1

أ- من أجل كل $n\epsilon\mathbb{N}^*$ لدينا

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^{n+1}}-\frac{1}{1+x^n}\right)dx$$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n-x^{n+1}}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\right)dx$$

$$I_{n+1}-I_n=\int_0^1\left(\frac{x^n(1-x)}{(1+x^{n+1})(1+x^n)}\right)dx$$

لدينا من أجل كل $x\epsilon[0,1]$ $x^n\geq 0;$ و $1-x\geq 0$ و $1+x^{n+1}$ و $1+x^n>0$ اذن $I_{n+1}-I_n\geq 0$

و منه المتتالية (I_n) متزايدة.

و لدينا من أجل كل $x\epsilon[0,1]$ أي $0\leq x\leq 1$ و منه $0\leq x^n\leq 1$ و منه $1\leq 1+x^n\leq 2$ و منه $\frac{1}{2}\leq\frac{1}{1+x^n}\leq 1$

اذن $\frac{1}{2}\leq\int_0^1\left(\frac{1}{1+x^n}\right)dx\leq 1$

اذن $\frac{1}{2}\leq I_n\leq 1$

و منه (I_n) محدودة من الأعلى بالعدد 1.

ب- بماأن المتتالية (I_n) متزايدة و محدودة من الأعلى بالعدد 1 فهي متقاربة.

.2

أ- لدينا من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n

$$J_n=\int_0^1(\frac{x^n}{1+x^n})dx$$

و منه $-J_n=-\int_0^1(\frac{x^n}{1+x^n})dx$ أي $-J_n=\int_0^1(\frac{-x^n}{1+x^n})dx$

و منه $1-J_n=\int_0^1(1-(\frac{x^n}{1+x^n}))dx$

و منه $1-J_n=\int_0^1(\frac{1}{1+x^n})dx=I_n$

و هو المطلوب $(I_n = 1 - J_n)$

ب- من أجل كل $x\epsilon[0,1]$ و $n\epsilon\mathbb{N}^*$

$x^n + 1 \geq 1$ و منه $0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq 1$(*) ...

و $x^n \geq 0$

اذن نضرب المتباينة (*) في x^n

$$0 \leq \frac{1}{1+x^n} \leq x^n$$

بما أن الدالتان $x \to x^n$ و $x \to (\frac{x^n}{x^n+1})$ مستمرتان على المجال $[0,1]$ فان

$0 \leq \int_0^1 \left(\frac{x^n}{x^n+1}\right) dx \leq \int_0^1 x^n dx$

و منه $0 \leq J_n \leq [\frac{1}{n+1} x^{n+1}]_0^1$ و منه $0 \leq J_n \leq \frac{1}{n+1}$

و هو المطلوب

ج- لدينا $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$

ومنه حسب مبرهنة الحصر

فان $\lim_{n\to+\infty} J_n = 0$ و لدينا $I_n = 1 - J_n$

اذن $\lim_{n\to+\infty} I_n = 1$

التمرين الثاني :

1. نعتبر المعادلة (E) ذات المجهولين الصحيحين x و y :

$(E) \dots 63x + 5y = 159$

أ- بماأن 5 أولي و 63 ليس مضاعف 5 فان 5 و 63 أوليان فيما بينهما

اذن $pgcd(63,5) = 1$

و منه $pgcd(63,5)|159$ ومنه المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$

ب- تعيين الحل الخاص (x_0, y_0) للمعادلة (E) الذي يحقق ... $(*)$ $x_0 + y_0 = -3$

(x_0, y_0)حل للمعادلة (E) معناه يحقق $63x_0 + 5y_0 = 159 \dots (**)$

من $(*)$لدينا $y_0 = -3 - x_0$

بالتعويض في $(**)$ نجد $x_0 = 3$ و منه $y_0 = -6$

اذن الحل الخاص هو $(x_0, y_0) = (3, -6)$

استنتاج حلول (E)

لدينا $\begin{cases} 63x + 5y = 159 \\ 63(3) + 5(-6) = 159 \end{cases}$ بالطرح نجد $63(x-3) = 5(-y-6)$

باستعمال مبرهنة غوص نحصل على $x = 5k + 3$ و $y = -63k - 3$ حيث $k \epsilon \mathbb{Z}$

ج- تعيين كل الثنائيات (x, y) حلول المعادلة (E) التي تحقق $|13x + y - 33| < 4$

لدينا $|13x + y - 33| < 4$ معناه $|13(5k+3) + (-63k-6) - 33| < 4$

أي $|k| < 2$ أي $k \epsilon \{-1,0,1\}$

و بالتعويض نجد $S = \{(-2,57); (8,-69); (3,-6)\}$

.2

أ- لدينا $A = \overline{5\alpha 0\alpha}^{7} = 50\alpha + 1715$ ومن جهة أخرى $A = \overline{\beta 10\beta 0}^{5} = 630\beta + 125$

$\alpha = 6$ و $\beta = 3$: $A = 2015$ و $A + 8 = 2023$

ب- بواقي القسمة الاقليدية دورية ودورها من الشكل $4k$ وهي : 1، 3، 4 و 2

ج- $n \in \{42,54\}$

التمرين الثالث :

-1 أ- $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ، $\lim_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = +\infty$

ب- إتجاه تغير f: $f'(x) = \frac{x-1}{x}$

f متزايدة تماما على المجال $]1; +\infty[$، ومتناقصة تماما على المجال $]0; 1[$

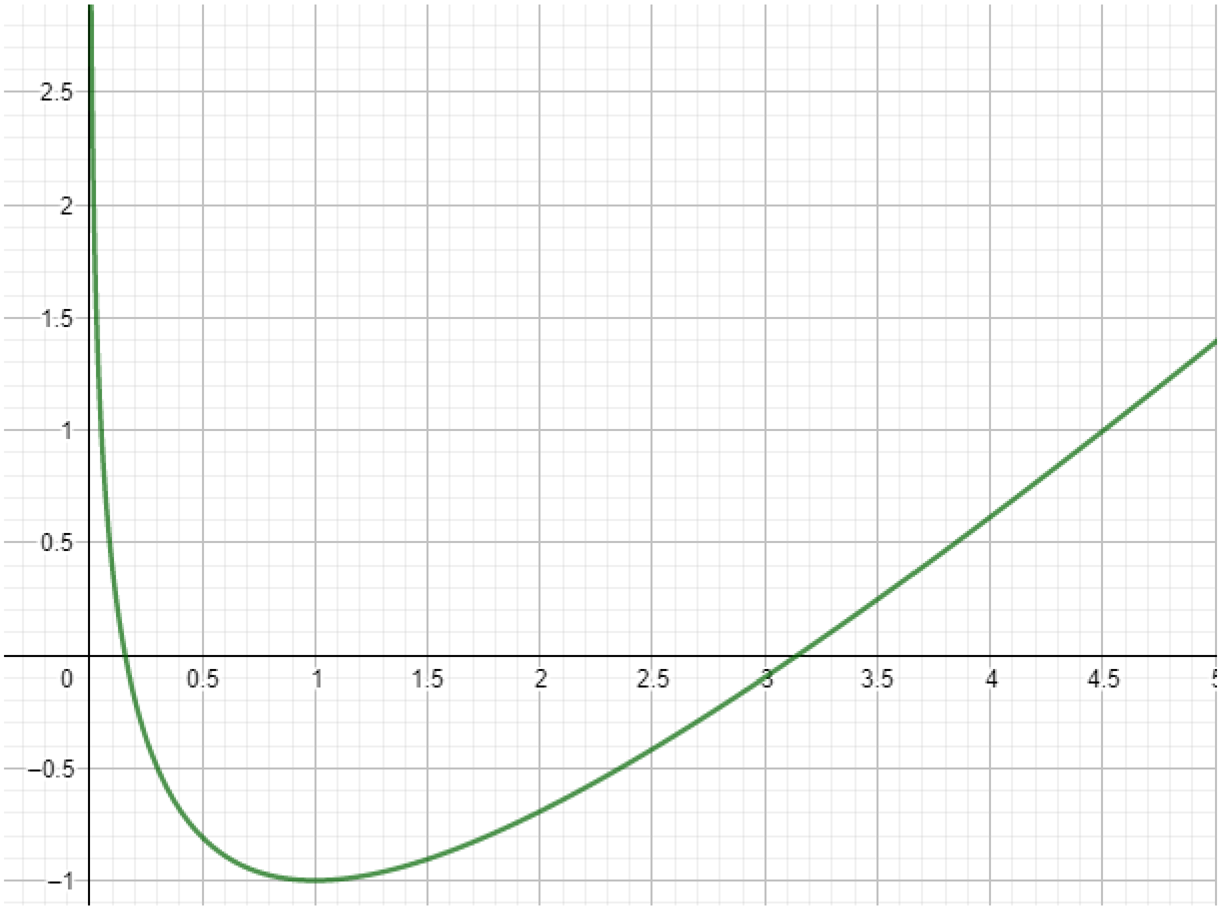
جدول تغيراتها:

ج- المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلين مختلفين:

على المجال $]0; 1[$ f مستمرة ومتناقصة تماما ولدينا $f(e^{-2}) \times f(e^{-1}) < 0$ إذن يوجد عدد حقيقي a حيث $e^{-2} < a < e^{-1}$ و $f(a) = 0$

بنفس الطريقة : $f(b) = 0$

الإنشاء:



2- المستقيمات الموازية للمستقيم (D) تقطع (C_f) في نقطة وحيدة وهي كل المستقيمات من الشكل $y = x + \alpha$ حيث $\alpha \in \mathbb{R}$

نعتبر الدالة h المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $h(x) = f(x) - (x + \alpha)$

نطبق مبرهنة القيم المتوسطة لنبرهن أن المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا على المجال $]0;+\infty[$

3- $m \in]-\infty;-1] \cup [1;+\infty[$

4- أ- $M(x;f(x))$ ، $N(\frac{1}{x};f\left(\frac{1}{x}\right))$

$x_I = \frac{x+\frac{1}{x}}{2}$ ، $y_I = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) - 2$

ومنه $y_I = x_I - 2$ أي I تنتمي إلى المستقيم ذو المعادلة $y = x - 2$

5- أ- $\Phi(x) - x = -f(x)$ بما أن $f(x) < 0$ على المجال $[3;b]$ إذن $\Phi(x) - x \geq 0$ أي $\Phi(x) \geq x$

ب- لدينا $\Phi(x) = 2 + \ln x$ من أجل $x \in [3;4]$ ومنه Φ متزايدة تماما على $[3;4]$

بما أن $3 \leq x \leq b$ إذن $3 \leq \Phi(x) \leq b$

ج- $I = \int_3^b (\Phi(x) - x)\,dx = -\frac{1}{2}b^2 + b + b\ln b + \frac{3}{2} - 3\ln 3$

هندسيا: I هو مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ومحور الفواصل والمستقيمات ذو المعادلات $x = 3$ و $x = b$

د- لدينا $3 \leq x \leq b$ و $3 \leq \Phi(x) \leq b$ إذن $3 - b \leq \Phi(x) - x \leq b - 3$ ومنه بالتكامل نجد

$-(b-3)^2 \leq I \leq (b-3)^2$ ومنه $|I| \leq (b-3)^2$