الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية البيَض — ثانوية: المجاهد شعشوع مصطفى -البيض-

المستوى : الثالثة علوم تجريبية — السنة الدراسية: 2022 / 2023

اختبار الفصل الثاني في مادّة الرياضيات — **المدة :03 ساعات**

التمرين الأول: (4 نقاط)

لكل سؤال جواب واحد صحيح عينه مع التبرير:

1) (U_n) متتالية هندسية أساسها $q = 2$ وحدها الأول $U_0 = 3$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n نضع $S_n = C_n^0 U_0 + C_n^1 U_1 + ... + C_n^n U_n$ ، المجموع S_n يساوي :

أ) $3(3)^n$ ب) $3(2)^n$ ج) $2(3)^n$

2) فريق عمل يتكون من 4 نساء و 7 رجال نريد تشكل لجنة تضم رئيسا ونائبا و أمين ، عدد اللجان التي يمكن تشكيلها بحيث تضم اللجنة رجلين أحدهما الرئيس :

أ) 168 ب) 84 ج) 336

3) ليكن (C) التمثيل البياني للدالة $f : x \longrightarrow \sqrt{\cos x}$ على المجال $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ ، الحجم v المولد بدوران (C) حول محور الفواصل (xx') بوحدة الحجوم يساوي :

أ) π ب) 1 ج) $\frac{\pi}{2}$

4) المتتالية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ ب: $U_n = \int_0^n 2^x dx$ هي متتالية :

أ) متزايدة تماما ب) متناقصة تماما ج) ثابتة

التمرين الثاني: (4 نقاط)

يحتوي صندوق على 9 كريات متماثلة لا نفرق بينها باللمس ،منها اربع كريات بيضاء مرقمة: -2،1 ، 1 ، 1 وخمس كريات حمراء مرقمة -1 ، -1 ، 0 ، 0 ، 0 ، نسحب عشوائيا وفي ان واحد ثلاث كريات من هذا الصندوق .

1) نعتبر الحادثتين: A " سحب 3 كريات من نفس اللون "

B "سحب 3 كريات مجموع أرقامها معدوم"

أ) احسب $P(A)$ ثم بين أن $P(B) = \frac{11}{42}$.

ب) احسب $P(A \cap B)$ ثم استنتج $P_B(A)$ و $P(A \cup B)$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب عدد الكريات البيضاء المسحوبة .

عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم احسب $E(x)$ أمله الرياضي .

التمرين الثالث: (4 نقاط)

المتتالية العددية (U_n) المعرفة على$\mathbb{N}$ ب $U_0 = \frac{3}{2}$ و ومن أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = \frac{6U_n - 2}{U_n + 3}$

1) أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_{n+1} = 6 - \frac{20}{U_n + 3}$

ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$.

2) بين أن المتتالية (U_n) متزايدة و استنتج أنها متقاربة .

3) أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant 2 - U_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2 - U_n)$.

ب) استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 \leqslant 2 - U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ ثم أحسب $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الجزء الأول :

نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$.

1) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $g'(x) = 4(2x+1)e^{2x}$.

2) استنتج اتجاه تغير الدالة g .

3) بين أن $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$ ثم استنتج أشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$.

الجزء الثاني :

f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$.

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(o; \vec{i}; \vec{j})$ ، "$\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$" .

1) بين أن $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$.

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها .

3) أ) احسب $\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - x]$ ثم استنتج أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا (Δ) يطلب تعيين معادلته .

ب) ادرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

4) أ) اكتب معادلة المستقيم المماس (T) للمنحنى (C_f) عند الفاصلة المعدومة .

ب) بين أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A يطلب تعيين إحداثيها .

5) احسب $f(1)$ ثم أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f) .

6) ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة $f(x) = x + \ln(m)$.

7) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}dx = 1 - \frac{e}{2}$.

8) لتكن S مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيم (T) و المستقيمين $x = 0$ و $x = \frac{1}{2}$.

بين أن : $S = (6 - 2e)cm^2$

التمرين الأول: (4 نقاط)

اختيار الجواب الصحيح مع التبرير:

1) أ) $S_n = 3(3)^n$ التبرير :

$$\begin{aligned} S_n &= C_n^0 U_0 + C_n^1 U_1 + \dots + C_n^n U_n \\ &= C_n^0(3\times 2^0) + C_n^1(3\times 2^1) + \dots + C_n^n(3\times 2^n) \\ &= 3\left[C_n^0(2^0\times 1^n) + C_n^1(2^1\times 1^{n-1}) + \dots + C_n^n(2^n\times 1^{n-n})\right] \\ &= 3(2+1)^n = 3(3)^n \end{aligned}$$

2) ج) 336 :

التبرير : لدينا حالتين

رجل (الرئيس)	رجل (ن أول)	امرأة (أمين)

أو

رجل (الرئيس)	امرأة (ن أول)	رجل (أمين)

ومنه عدد اللجان هو $2A_7^2A_4^1 = 2\times 7\times 6\times 4 = 336$

3) أ) π التبرير:

$$v = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x))^2\,dx = \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sqrt{\cos x}\right)^2 dx$$

$$v = \pi\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right] = \pi$$

4) أ) متزايدة تماما التبرير :

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^{n+1} 2^x\,dx - \int_0^n 2^x\,dx$$

$$= \int_0^n 2^x\,dx + \int_n^{n+1} 2^x\,dx - \int_0^n 2^x\,dx$$

$$= \int_n^{n+1} 2^x\,dx > 0$$

لأن $2^x > 0$ و $n+1 > n$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

(1 $P(A) = \dfrac{C_4^3 + C_5^3}{C_9^3} = \dfrac{4+10}{84} = \dfrac{14}{84} = \dfrac{1}{6}$

$$P(B) = \frac{C_3^2C_1^1 + C_3^1C_2^1C_3^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{3\times 1 + 3\times 2\times 3 + 1}{84}.$$

$$P(B) = \frac{3+18+1}{84} = \frac{11}{42}.$$

$$P(A\cap B) = \frac{C_3^2C_1^1 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{4}{84} = \frac{1}{21}$$

$$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{4}{84}}{\frac{22}{84}} = \frac{4}{22}$$

$$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B).$$

$$P(A\cup B) = \frac{14}{84} + \frac{22}{84} - \frac{4}{84} = \frac{32}{84} = \frac{8}{21}.$$

2) تعيين قيم المتغير العشوائي X . $X = \{0;1;2;3\}$

$3 \longrightarrow BBB$; $2 \longrightarrow BB\overline{B}$; $1 \longrightarrow B\overline{B}\,\overline{B}$; $0 \longrightarrow \overline{B}\,\overline{B}\,\overline{B}$

$$P(X=0) = \frac{C_5^3}{C_9^3} = \frac{10}{84}$$

$$P(X=1) = \frac{C_5^2C_4^1}{C_9^3} = \frac{40}{84}$$

$$P(X=2) = \frac{C_5^1C_4^2}{C_9^3} = \frac{30}{84}$$

$$P(X=3) = \frac{C_4^3}{C_9^3} = \frac{4}{84}$$

X_i	0	1	2	3
$p(X=X_i)$	$\frac{5}{42}$	$\frac{10}{21}$	$\frac{15}{42}$	$\frac{1}{21}$

حساب الأمل الرياضي :

$$E(x) = 0\frac{10}{84} + 1\frac{40}{84} + 2\frac{30}{84} + 3\frac{4}{84} = \frac{112}{84}$$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

1) أ)

$$U_{n+1} = 6 - \frac{20}{U_n+3} = \frac{6(U_n+3) - 20}{U_n+3}$$

$$U_{n+1} = \frac{6U_n + 18 - 20}{U_n+3} = \frac{6U_n - 2}{U_n+3}$$

ب) البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$.

$(*)$ من أجل $n=0$

لدينا $0 \leqslant U_0 = \frac{3}{2} \leqslant 2$

ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

$(**)$ نفرض أن $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$ من أجل عدد طبيعي كيفي n

ونبرهن أن $\frac{3}{2} \leqslant U_{n+1} \leqslant 2$.

لدينا $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$ ومنه $\frac{3}{2}+3 \leqslant U_n+3 \leqslant 2+3$

ومنه $-20\frac{2}{9} \leqslant -\frac{20}{U_n+3} \leqslant \frac{-20}{5}$

ومنه $6-\frac{40}{9} \leqslant 6-\frac{20}{U_n+3} \leqslant 6-\frac{20}{5}$

ومنه $\frac{3}{2} \leqslant \frac{14}{9} \leqslant U_{n+1} \leqslant 2$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n: $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$.

---

2) تبيان أن المتتالية (U_n) متزايدة :

$$U_{n+1}-U_n = \frac{6U_n-2}{U_n+3}-U_n = \frac{6U_n-2-U_n(U_n+3)}{U_n+3}$$

$$U_{n+1}-U_n = \frac{-U_n^2+3U_n-2}{U_n+3} = -\frac{(U_n-1)(U_n-2)}{U_n+3}$$

لدينا $\frac{3}{2} \leqslant U_n \leqslant 2$ ومنه $U_n+3>0$ و $U_n-1 \geqslant \frac{1}{2} > 0$

و $U_n-2 \leqslant 0$ ومنه $U_{n+1}-U_n > 0$ أي أن(U_n) متزايدة تماما.

بما أن(U_n)متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

---

3) أ) تبيان أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n)$.

$$2-U_{n+1} = 2-\frac{6U_n-2}{U_n+3} = \frac{2(U_n+3)-6U_n+2}{U_n+3}$$

$$2-U_{n+1} = \frac{8-4U_n}{U_n+3} = \frac{4(2-U_n)}{U_n+3}$$

ولدينا أيضا $\frac{3}{2} \leqslant U_n$ ومنه $\frac{9}{2} \leqslant U_n+3$

ومنه $\frac{1}{U_n+3} \leqslant \frac{2}{9}$

أي أن $\frac{4}{U_n+3} \leqslant \frac{8}{9}$

بضرب طرفي المتراجحة في $2-U_n$

$$2-U_{n+1} = \frac{4(2-U_n)}{U_n+3} \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n)$$

أي أن $2-U_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n)$

و $U_{n+1} \leqslant 2$ معناه $0 \leqslant 2-U_{n+1}$

ومنه ينتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n)$.

ب) استنتاج أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leqslant 2-U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

نستخدم البرهان بالتراجع

(*) من أجل $n=0$ لدينا $0 \leqslant 2-U_0 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^0$

أي $0 \leqslant \frac{1}{2} \leqslant \frac{1}{2}$ ومنه الخاصية محققة من أجل $n=0$

(**) نفرض أن $0 \leqslant 2-U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$

من أجل عدد طبيعي كيفي n ونبرهن أن

$$0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$$

لدينا $0 \leqslant 2-U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n$ بضرب أطراف المتراجحة في $\frac{8}{9}$

ينتج $0 \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n) \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^n \frac{8}{9}$

ومن السؤال السابق لدينا $0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \frac{8}{9}(2-U_n)$

أي أن . $0 \leqslant 2-U_{n+1} \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n+1}$

من $(*)$ و $(**)$ نستنتج من أجل كل عدد طبيعي n :

$$0 \leqslant 2-U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$$

حساب النهاية :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n} = 0$ لأن $-1 < \frac{8}{9} < 1$

و $0 \leqslant 2-U_n \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{8}{9}\right)^{n}$

ومنه $\lim\limits_{n\to+\infty} 2-U_n = 0$ أي أن $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 2$

التمرين الرابع: (08 نقاط)

الجزء الأول

. $g(x) = 1+4xe^{2x}$

1) المشتقة من أجل كل عدد حقيقي x لدينا :

$$g'(x) = 4e^{2x} + 2e^{2x}(4x) = (8x+4)e^{2x} = 4(2x+1)e^{2x}$$

2) استنتاج اتجاه تغير الدالة g : لدينا $4e^{2x} > 0$

ومنه اشارة المشتقة من اشارة $2x+1$

$2x+1=0$ ومنه $x = -\frac{1}{2}$

x	$-\infty$ $\qquad -\frac{1}{2} \qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$-$ $\quad 0 \quad$ $+$

ومنه f متناقصة تماما على المجال $\left]-\infty;-\frac{1}{2}\right]$

f متزايدة تماما على المجال $\left[-\frac{1}{2};+\infty\right[$

(3

$$g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1-\frac{2}{e} > 0$$

استنتاج اشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}$

لدينا $g\left(-\frac{1}{2}\right)$ قيمة حدية صغرى و $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

ومنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$ فإن $g(x) > 0$.

الجزء الثاني :

. $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

(1

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} 2xe^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -e^{2x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} x+1 = -\infty \end{cases}$$ ومنه $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} 2x-1 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^{2x} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{cases}$$ ومنه $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

(2

أ) تبيان أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2)e^{2x} + 2e^{2x}(2x-1) + 1 \\ &= (2+4x-2)e^{2x} + 1 \\ &= 1+4xe^{2x} = g(x) \end{aligned}$$

ب) استنتج إتجاه تغير الدالة f

اشارة المشتقة من إشارة $g(x)$ ومنه $f'(x) > 0$

نستنتج أن f متزايدة تماما على $\mathbb{R}$

. جدول التغيرات :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$

3) أ) حساب $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x]$:

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-x] = \lim_{x\to-\infty}[(2x-1)e^{2x}+x+1-x]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[(2x-1)e^{2x}+1]$$
$$= \lim_{x\to-\infty}[\cancelto{0}{2xe^{2x}} - \cancelto{0}{e^{2x}}+1] = 1$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x] = 1$ معناه $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)-x-1] = 0$

ومنه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x+1$ مستقيم مقارب

للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$.

ب) دراسة الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) :

$f(x)-y = f(x)-x-1 = (2x-1)e^{2x}$

اشارة الفرق من إشارة $2x-1$ ومنه :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f(x)-y$	$-$	0	$+$
الوضع النسبي بين (C_f) و (Δ)	(C_f)تحت(Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $(0.5;1.5)$	(C_f)فوق(Δ)

4) أ) معادلة المستقيم المماس عند الفاصلة 0.

$y = f'(0)(x-0)+f(0)$

$y = (1+4(0)e^{0})(x-0)+((0-1)e^{0}+0+1)$

$y = x+0$

$y = x$

ب) تبيان أن المنحنى (C_f) يقبل نقطة إنعطاف A

لدينا $f''(x) = g'(x)$ ومنه اشارة $f''(x)$ من اشارة $g'(x)$

(تمت دراسة اشارتها في السؤال 2 من الجزء الأول) ومنه ينتج

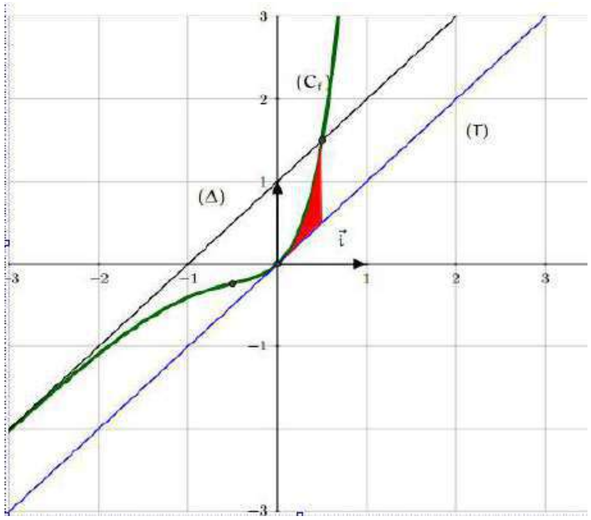
x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

و $f(-\frac{1}{2}) = (-1-1)e^{-1}-\frac{1}{2}+1 = -2e^{-1}+\frac{1}{2}$

المشتقة الثانية انعدمت وغيرت اشارتها من أجل $x = -\frac{1}{2}$

ومنه النقطة $(-\frac{1}{2}, -2e^{-1}+\frac{1}{2})$ نقطة إنعطاف

5) $f(1) = ((2(1)-1)e^{2(1)}+1+1 = e^{2}+2$



6)

المناقشة البيانية : حلول المعادلة $f(x) = x+\ln(m)$ بيانيا هي فواصل نقط تقاطع المنحنى(C_f) مع المستقيم ذو المعادلة $y = x+\ln(m)$ مناقشة مائلة موازية للمستقيمين (T) و (Δ)

من أجل $\ln(m) < 0$ أي $m < 1$ المعادلة لا تقبل حلولا

من أجل $\ln(m) = 0$ أي $m = 1$ المعادلة تقبل حل واحد

من أجل $0 < \ln(m) < 1$ أي $1 < m < e$ المعادلة تقبل حلين مختلفين

من أجل $\ln(m) \geqslant 0$ أي $m \geqslant e$ المعادلة تقبل حل واحد .

7) بفرض

$$\begin{cases} u(x) = (2x-1) & u'(x) = 2 \\ v'(x) = e^{2x} & v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}dx = \left[\frac{2x-1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}} - \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2}{2}e^{2x}dx$$
$$= \left[\frac{2(\frac{1}{2})-1}{2}e^{2(\frac{1}{2})} - \frac{0-1}{2}e^{0}\right] - \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$
$$= 0+\frac{1}{2} - \left[\frac{1}{2}e^{2(\frac{1}{2})} - \frac{1}{2}e^{0}\right] = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}e+\frac{1}{2}$$
$$= 1-\frac{e}{2}$$

8) مساحة الحيز : في المجال$\left[0,\frac{1}{2}\right]$المنحنى$(C_f)$ فوق المستقيم (T) ومنه

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}}(f(x)-y)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}}((2x-1)e^{2x}+x+1-x\ )\,dx$$

$$S = \int_0^{\frac{1}{2}}((2x-1)e^{2x}+1)dx$$

$$S = 1-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}-0 \quad = (\frac{2-e+1}{2})\,\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|cm^{2}$$

$$S = \frac{3-e}{2}(2\times 2)cm^{2} = (6-2e)cm^{2}$$