♠

1180003032024

الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية جيجل — الموسم الدراسي: 2023م-2024م

ثانوية راشدي محمد -سيدي معروف — المستوى: الثالثة -رياضيات

اختبار الفصل الثاني في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين ويجيب عليه:

الموضوع الأوّل:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة والقابلة للإشتقاق على المجال: $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\sqrt{1+ax^2}$ حيث $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$.

I/ تحقق أن الدالة f متزايدة تماما.

II/ نعتبر (u_n) المتتالية المعرفة بحدها الأول: $U_0=0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=\sqrt{1+a\left(u_n\right)^2}$.

1/ نفرض أن: $0<a<1$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0\leq u_n\leq\dfrac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة .

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

2/ نفرض أن: $a>1$.

نعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=\left(u_{n+1}-u_n\right)\left(u_{n+1}+u_n\right)$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ إِستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $\left(u_{n+1}\right)^2-\left(u_n\right)^2=a^n$.

ج/ نعرف على $\mathbb{N}$ المتتالية (w_n) كالتالي: $\begin{cases} w_0=0 \\ w_n=1+a+a^2+a^3+\cdots+a^{n-1} \quad ;n\geq 1\end{cases}$.

- أُكتب w_n بدلالة n .

د/ بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $u_n=\sqrt{w_n}$ ، ثم أُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

1/ ا/ أُدرس أولية العدد 631 .

ب/ تحقق أنه من أجل كل عددين حقيقيين x و y: $x^3-y^3=(x-y)\left(x^2+y^2+xy\right)$.

ج/ جد جميع الثنائيات المرتبة $(x;y)$ من الأعداد الطبيعية التي تحقق: $x^3-y^3=631$.

2/ لتكن المعادلة ذات المجهول $(a;b)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $1962b-1830a=18 \cdots (E)$.

ا/ بين أن المعادلة (E) تقبل حلولا في $\mathbb{Z}^2$.

ب/ تحقق أن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

ج/ عين الثنائيات الطبيعية (a,b) من حلول المعادلة (E) التي تحقق: $PGCD(a,b)=3$.

3/ ا/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي n باقي القسمة الإقليدية للعدد 9^n على 13 .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(\alpha;\beta)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0[13]$.

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=\dfrac{\ln\left(e^{x}+1\right)}{e^{x-2}}$

و ليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1/ ا/ عين نهاية الدالة f عند $-\infty$.

ب/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f(x)=e^{2}\left[\dfrac{x}{e^{x}}+e^{-x}\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]$

ج/ عين نهاية الدالة f عند $+\infty$.

د/ استنتج أن المنحنى (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين، يُطلب تعيين معادلة لكل منهما.

2/ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$.

ا/ بين أن الدالة g متناقصة تماما على المجال $]0;+\infty[$.

ب/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

3/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $f'(x)=e^{-x+2}g\left(e^{x}\right)$.

ب/ اِستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أحسب $f(0)$ ، ثم أنشئ المستقيمات المقاربة والمنحنى (C_f).

5/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0;+\infty[$ بـ: $F(x)=\int_{0}^{x}f(t)\,dt$.

ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x : $\dfrac{1}{e^{x}+1}=1-\dfrac{e^{x}}{e^{x}+1}$ ، ثم أحسب: $\int_{0}^{x}\dfrac{1}{e^{t}+1}dt$.

ب/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أن: $F(x)=e^{2}\left[x-\ln\left(1+e^{x}\right)\right]-f(x)+2e^{2}\ln 2$.

ج/ أَحسب $F(\ln 2)$ وفسره هندسيا، ثم عين $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$.

انتهى الموضوع الأوّل.

الموضوع الثّاني:

التمرين الأول: (06 نقاط)

لتكن (u_n) المتتالية المعرفة بــ : $u_0 = 3$ ومن أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} = \frac{a + 2au_n}{a + 1 + u_n}$ حيث a عدد حقيقي.

1/ عين قيم a التي تجعل المتتالية (u_n) ثابتة.

2/ نفرض أن: $a > 3$.

ا/ برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $0 < u_n < a$.

ب/ بين أن المتتالية (u_n) متزايدة تماما.

ج/ استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم عين نهايتها.

3/ نفرض أن $a = 2$ ، ونعتبر (v_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بــ: $v_n = \frac{u_n - 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أُكتب v_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

ج/ أُحسب بدلالة n المجموع: $S_n = \frac{1}{1+u_0} + \frac{1}{1+u_1} + \cdots + \frac{1}{1+u_n}$.

4/ نفرض أن $a = -1$ ، ونعتبر (w_n) المتتالية المعرفة على $\mathbb{N}$ بــ: $w_n = \frac{u_n + 2}{u_n + 1}$.

ا/ بين أن المتتالية (w_n) حسابية، يُطلب تعيين أساسها وحدها الاول.

ب/ أُكتب w_n بدلالة n، ثم استنتج u_n بدلالة n وأُحسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

التمرين الثاني: (07 نقاط)

نعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $45x + 20y = 2^m - 18 \cdots (E_m)$.

I/ 1/ أُدرس حسب قيم العدد الطبيعي m بواقي القسمة الإقليدية للعدد 2^m على 5 .

2/ عين قيم العدد الطبيعي m التي تجعل المعادلة (E_m) تقبل حلولا.

II/ نضع $m = 7$ ، ونعتبر المعادلة ذات المجهول $(x;y)$ من $\mathbb{Z}^2$ التالية: $9x + 4y = 22 \cdots (E)$

1/ ا/ تحقق أن المعادلة (E_7) تقبل حلولا، ثم استنتج أن المعادلة (E_7) تكافئ المعادلة: (E) .

ب/ بين أنه إذا كانت الثنائية $(x;y)$ حلا للمعادلة (E) فإن: $x \equiv 2[4]$ ثم استنتج حلول المعادلة (E) .

2/ ليكن N عددا طبيعيا يُكتب $\overline{133\alpha\beta3}$ في النظام ذو الأساس 4 ، ويُكتب $\overline{56\alpha0}$ في النظام ذو الأساس 7 ، حيث α و β عددان طبيعيان.

- عين α و β ، ثم أُكتب N في النظام العشري.

3/ نعتبر: $a = 88n + 22$ و $b = 198n + 44$ ، حيث n عدد طبيعي، وليكن $d = PGCD(a, b)$.

ا/ تحقق أن الثنائية $(a; -b)$ حل للمعادلة (E) ، ثم استنتج القيم الممكنة لـ d .

ب/ تحقق أن 22 يقسم كلا من a و b .

ج/ باستعمال مبرهنة بيزو، بين أن العددين $(4n + 1)$ و $(9n + 2)$ أوليان فيما بينهما، ثم استنتج قيمة d .

التمرين الثالث: (07 نقاط)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $f(x) = \dfrac{1 - e^x}{x^2}$

و ليكن (C_f)تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $\left(O; \vec{i}, \vec{j}\right)$. (نأخذ: $\left\|\vec{i}\right\| = 2cm$)

1/ أُحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ ، ثم فسر النتائج هندسيا.

2/ نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ: $g(x) = 2\left(1 - e^{-x}\right) - x$.

ا/ أُدرس إتجاه تغير الدالة g ، ثم شكّل جدول تغيراتها.

ب/ بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث: $\ln 4 < \alpha < \ln 6$.

ج/ استنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0; +\infty[$.

3/ ا/ تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما: $f'(x) = \dfrac{e^x}{x^3} g(x)$.

ب/ إستنتج إتجاه تغير الدالة f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

4/ أنشئ المنحنى (C_f). (نأخذ: $f(\alpha) \simeq -1.5$)

5/ لتكن F الدالة المعرفة على المجال $[0; +\infty[$ بـ: $F(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1 - e^t}{t^2} dt & ; x > 0 \\ -\ln 2 & ; x = 0 \end{cases}$.

ا/ باستعمال المكاملة بالتجزئة، بين أنه من أجل كل $x > 0$: $F(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{2x} - \dfrac{e^x - 1}{x} - \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt$.

ب/ بين أنه من أجل كل $x > 0$ فإن: $e^x \ln 2 \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt \leq e^{2x} \ln 2$.

ج/ أَحسب $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \left(\displaystyle\int_x^{2x} \frac{e^t}{t} dt\right)$ ، ثم استنتج أن الدالة F مستمرة على يمين 0 .

انتهى الموضوع الثاني.

☺☺بالتوفيق للجميع☺☺

ثانوية راشدي محمد - سيدي معروف. ✓ الموسم الدراسي: 2023/2024 ✓ المستوى: 03 رياضيات

مناقشة الإختبار الثاني في مادة الرياضيات.

الموضوع الأول:

$f(x)=\sqrt{1+ax^2}$; $D_f=[0,+\infty[$; $a\in\mathbb{R}_+-\{1\}$

(I) التحقق أن f متزايدة تماما:

لدينا الدالة f تقبل الإشتقاق على $[0,+\infty[$ و:

$$f'(x)=\frac{2ax}{\sqrt{1+ax^2}}>0$$

إذا: الدالة f متزايدة تماما على المجال $[0;+\infty[$.

(II) $(u_n):\begin{cases}u_0=0\\ u_{n+1}=\sqrt{1+a(u_n)^2}\end{cases}$

1) نفرض: $0<a<1$؛

أ/ البرهان بالتراجع:

نسمي $P(n)$ الخاصية: « $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ »

ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n.

• من أجل $n=0$: لدينا: $u_0=0$

أي: $0\le u_0\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$ إذا $P(0)$ محققة.

• ليكن n عددا طبيعيا كيفيا.

نفرض صحة $P(n)$ أي $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

وبما أن f متزايدة تماما على $[0;+\infty[$

فإن: $f(0)\le f(u_n)\le f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)$

لدينا: $f(0)=\sqrt{1+a(0)}=1$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)=\sqrt{1+a\left(\frac{1}{\sqrt{1-a}}\right)^2}=\sqrt{1+\frac{a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1-a+a}{1-a}}=\sqrt{\frac{1}{1-a}}=\frac{1}{\sqrt{1-a}}.$$

ومنه: $0<1\le u_{n+1}\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

إذا $P(n+1)$ صحيحة بفرض صحة $P(n)$.

إذا حسب مبدأ البرهان بالتراجع من أجل كل عدد طبيعي n: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

ب/ إثبات أن (u_n) متزايدة:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+a(u_n)^2}-u_n=\frac{1+a(u_n)^2-(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}$$

$$=\frac{1+(a-1)(u_n)^2}{\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n}.$$

لدينا: $\sqrt{1+a(u_n)^2}+u_n>0$ و لدينا: $0<a<1$

ومنه: $a-1<0$ ، ولدينا: $0\le u_n\le\frac{1}{\sqrt{1-a}}$

ومنه: $0\le(u_n)^2\le\frac{1}{1-a}$ ومنه:

$$0\ge(a-1)(u_n)^2\ge\frac{a-1}{1-a}$$

أي: $0\le 1+(a-1)(u_n)^2\le 1$

إذا: $u_{n+1}-u_n\ge 0$ إذا (u_n) متزايدة.

جـ/ الإستنتاج:

لدينا (u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى

إذا (u_n) متقاربة.

تعيين نهايتها:

(u_n) متقاربة معناه: $\lim_{n\to+\infty}u_n=l\in\mathbb{R}$

ومنه: $l=\sqrt{1+al^2}$

أي: $l^2=1+al^2$ ومنه $1+(a-1)l^2=0$،

ومنه: $l^2=\frac{1}{1-a}$ إذن: $l=\pm\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

وبما أن $0\le u_n$ إذن: $\lim_{n\to+\infty}u_n=\frac{1}{\sqrt{1-a}}$.

2- نفرض $a>0$:

$$v_n=(u_{n+1}-u_n)(u_{n+1}+u_n)=(u_{n+1})^2-(u_n)^2.$$

أ/ تبيان أن (v_n) هندسية:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$$v_{n+1}=(u_{n+2})^2-(u_{n+1})^2=1+a(u_{n+1})^2-1-a(u_n)^2$$

$$=a\left((u_{n+1})^2-(u_n)^2\right)=av_n$$

إذن (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=a$

وحدها الأول: $v_0=(u_1)^2-(u_0)^2=\sqrt{1}=1$

ب/ الإستنتاج:

بما أن (v_n) متتالية هندسية فإن:

$$v_n=v_0\times q^n=1\times a^n=a^n$$

ومنه من أجل كل عدد طبيعي n: $(u_{n+1})^2-(u_n)^2=a^n$

جـ/ كتابة w_n بدلالة n:

$$w_n=1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$$

$$=1\times\left(\frac{a^n-1}{a-1}\right)=\frac{a^n-1}{a-1}=w_n$$

د- التبيان:

لدينا: $w_n = 1+a+a^2+\dots+a^{n-1}$

$= a^0 + a^1 + a^2 + \dots + a^{n-1}$

$= (u_1)^2-(u_0)^2+(u_2)^2-(u_1)^2+\dots+(u_n)^2-(u_{n-1})^2$

$= -(u_0)^2+(u_n)^2-(u_n)^2$

ومنه: $|u_n|=\sqrt{w_n}$ وبما أن: $u_n \geq 0$

فإن: $u_n=\sqrt{w_n}$

تعيين النهاية: $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\sqrt{\frac{a^n-1}{a-1}} = +\infty$

التمرين الثاني:

1) أ) دراسة أولية العدد 631: لدينا $\sqrt{631}\approx 25,12$

القاسم:	2	3	5	7	11	13	17	19	23
قابلية القسمة	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$	$\nmid$

العدد 631 لا يقبل القسمة على أي عدد أولي أصغر من $\sqrt{631}$ إذن العدد 631 عدد أولي.

ب) التحقق: من أجل كل عددين x و y:

$(x-y)(x^2+y^2+xy) = x^3+\cancel{xy^2}+\cancel{x^2y}-\cancel{yx^2}-y^3-\cancel{xy^2}$
$= x^3-y^3$.

ج- إيجاد الثنائيات الطبيعية (x,y) حيث:

$x^3-y^3=631$ تكافئ $(x-y)(x^2+y^2+xy)=631$

إذن: $x-y \mid 631$ و $x^2+y^2+xy \mid 631$،

بما أن x و y أعداد طبيعية فإن: $x-y < x^2+y^2+xy$

عليه: $\begin{cases} x-y=1 \\ x^2+y^2+xy=631 \dots (*)\end{cases}$ ومنه: $\boxed{x=1+y}$

بالتعويض في $(*)$ نجد: $(1+y)^2+y^2+(1+y)y = 1+y^2+2y+y^2+y+y^2$

$\Rightarrow 3y^2+3y+1=631$

أي: $3y^2+3y-630=0$ ومنه لدينا:

$\Delta=(3)^2-4(3)(-630)=7569 \Rightarrow \boxed{\sqrt{\Delta}=87}$

ومنه: $y=\frac{-3-87}{2(3)}=\frac{-90}{6}=-15 \notin \mathbb{N}$

أو $y=\frac{-3+87}{2(3)}=\frac{84}{6}=14\in\mathbb{N}$

إذن: $\boxed{y=14}$ ومنه: $x=1+14=\boxed{15=x}$

إذن: $\boxed{(x,y)=(15,14)}$

2- $(E)\dots\ 1962b-1830a=18$

أ) تبيان أن (E) تقبل حلولاً:

لدينا:

$1962=1830\times1+132$

$1830=132\times13+114$

$132=114\times1+18$

$114=18\times6+6$

$18=6\times3+0$

إذن: $PGCD(1962,1830)=6$ وبما أن $6|18$ فإن المعادلة (E) تقبل حلولاً في $\mathbb{Z}^2$.

ب) التحقق:

لدينا: $1962(14)-1830(15)=27468-27450=18$

إذن الثنائية $(15;14)$ حل للمعادلة (E).

حل المعادلة (E): لدينا:

$1962b-1830a=18$

$1962(14)-1830(15)=18$ فقط

بالطرح طرفاً لطرف نجد:

$1962(b-14)-1830(a-15)=0$

ومنه: $6\times(327(b-14)-305(a-15))=0$

$(1)\dots\ 327(b-14)=305(a-15)$ أي:

وبما أن: $327\wedge305=1$ وبما أن:

$327|305(a-15)$ فإن: $327|a-15$

ومنه: $a-15=327k$ أي: $a=327k+15$

بالتعويض في (1) نجد: $327(b-14)=305(327k)$

ومنه: $b-14=305k$ إذن: $b=305k+14$

إذن: $(a,b)=(327k+15;\ 305+14)$

حيث $k\in\mathbb{Z}$.

د) تعيين (a,b) حيث: $a\wedge b=3$:

معناه: $3|a$ و $3|b$ أي:

$a\equiv0[3]$

$b\equiv0[3]$

ومنه: $\begin{cases}327k+15\equiv0[3]\\305+14\equiv0[3]\end{cases}$ بالطرح طرف لطرف

$22k+1\equiv0[3]$

ومنه $22k\equiv-1[3]$ وبما أن: $22\equiv1[3]$

إذن: $22k\equiv k[3]$ إذن: $k\equiv2[3]$

إذن: $k=3q+2$ وعليه: $q\in\mathbb{N}$

$a=327(3q+2)+15=981q+669$

$b=305(3q+2)+14=915q+624$

إذن: $(a,b)=(981q+669;\ 915q+624);\ q\in\mathbb{N}$

3- أ) دراسة بواقي قسمة 9^n على 13:

لدينا: $\begin{cases}9^0\equiv1[13]\\9^1\equiv9[13]\\9^2\equiv3[13]\\9^3\equiv1[13]\end{cases}$ إذن:

$n=$	$3k$	$3k+1$	$3k+2$
$r_n=$	1	9	3

ج-1) تبيان أن: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0\,[13]$

حيث (α,β) حل للمعادلة (E).

معناه، $327\beta-305\alpha=3$.

لدينا: $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}=6\times 9^{327\beta}+9^{305\alpha+1012}$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{305\alpha+1012-327\beta}\right)$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{-3+1012}\right)$

$=9^{327\beta}\left(6+9^{1009}\right)$

لدينا $327\beta=3(109\beta)$ ومنه، $\boxed{9^{327\beta}\equiv 1\,[13]}$ ...(1)

و $1009=3(336)+1$ ومنه، $9^{1009}\equiv 9\,[13]$

ومنه، $\boxed{6+9^{1009}\equiv 2\,[13]}$ ...(2) $(6+9=15)$

إذن بضرب (1) و(2) طرفا لطرف نجد:

$9^{327\beta}\left(6+9^{1009}\right)\equiv 2\,[13]$ (3)

إذن: $\boxed{6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}\equiv 2\,[13]}$ ...(3)

ولدينا $1445=13\times(111)+2$

إذن: $1445\equiv 2\,[13]$ ...(4)

من (3) و(4) نجد، $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 2-2\,[13]$

إذن $6\times 9^{327\beta}+3^{610\alpha+2024}-1445\equiv 0\,[13]$

4-) لدينا: $\Pi=\overline{j222jj2}^{\,3}=\overline{2j2i0}^{\,5}$

ومنه: $\Pi=2+3j+3^2j+3^3\times 2+3^4\times 2+3^5\times 2+3^6j$

أي: $\Pi=704+741j$

ولدينا: $\Pi=0+5i+2\times 5^2+5^3j+2\times 5^4$

$\Pi=5i+125j+1300$

إذن: $704+741j=5i+125j+1300$

ومنه: $616j=5i+596$.

لدينا: $0\leq i\leq 4$ و $0\leq j\leq 2$

ومنه:

$j=$	0	1	2	إذا كان
$i=$	$-\frac{596}{5}$	4	$\frac{636}{5}$	فإن:
	✗	نعم	✗	القبول:

إذن: $(i;j)=(4;1)$

ومنه، $\Pi=704+741(1)=\boxed{1445=\Pi}$

التمرين الثالث:

$f(x)=\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}$; $D_f=\mathbb{R}$

1-أ) حساب النهايات:

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\dfrac{\ln(e^x+1)}{e^{x-2}}\right)=\lim\limits_{t\to 0}e^2\left(\dfrac{\ln(t+1)}{t}\right)$

$=e^2$ (بوضع $t=e^x$).

ب- التحقق: لدينا من أجل كل عدد حقيقي،

$e^2\left(\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right)=\left(\dfrac{x+\ln(e^{-x}+1)}{e^x}\right)e^2$

$=\dfrac{x+\ln\left(e^{-x}(1+e^x)\right)}{e^{x-2}}=\dfrac{x-x+\ln(1+e^x)}{e^{x-2}}$

$=f(x)$.

ج-1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^2\left(\dfrac{x}{e^x}+e^{-x}\ln(e^{-x}+1)\right)$

$=0$

الاستنتاج:

(C_f) يقبل مستقيمين مقاربين موازيين لحامل محور الفواصل، معادلتيهما:

$y=e^2$ عند $-\infty$ و $y=0$ عند $+\infty$.

2-) $g(x)=\dfrac{x}{x+1}-\ln(x+1)$; $D_g=]-1;+\infty[$

أ- تبيان أن g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$:

لدينا من أجل كل x من $]-1;+\infty[$:

$g'(x)=\dfrac{1(x+1)-1(x)}{(x+1)^2}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1-x-1}{(x+1)^2}$

$=\dfrac{-x}{(x+1)^2}$

ومنه:

x	-1		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	

إذن الدالة g متناقصة تماما على $[0;+\infty[$.

ج-1- لدينا، $g(0)=0$ و g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$ إذن من أجل كل x من المجال $]0;+\infty[$

$g(x)\leq g(0)$ إذن، $g(x)\leq 0$.

3-أ) التحقق من المشتقة:

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$:

$f'(x)=-e^{-x+2}\ln(e^x+1)+\dfrac{e^x}{e^x+1}e^{-x+2}$

$=e^{-x+2}\left(\dfrac{e^x}{e^x+1}-\ln(e^x+1)\right)=e^{-x+2}g(e^x)$

لدينا من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $e^x > 0$ وإذن $g(e^x) \leq 0$ و $e^{-x+2} > 0$ وإذن $f'(x) \leq 0$

إذن الدالة f متناقصة ع $\mathbb{R}$.

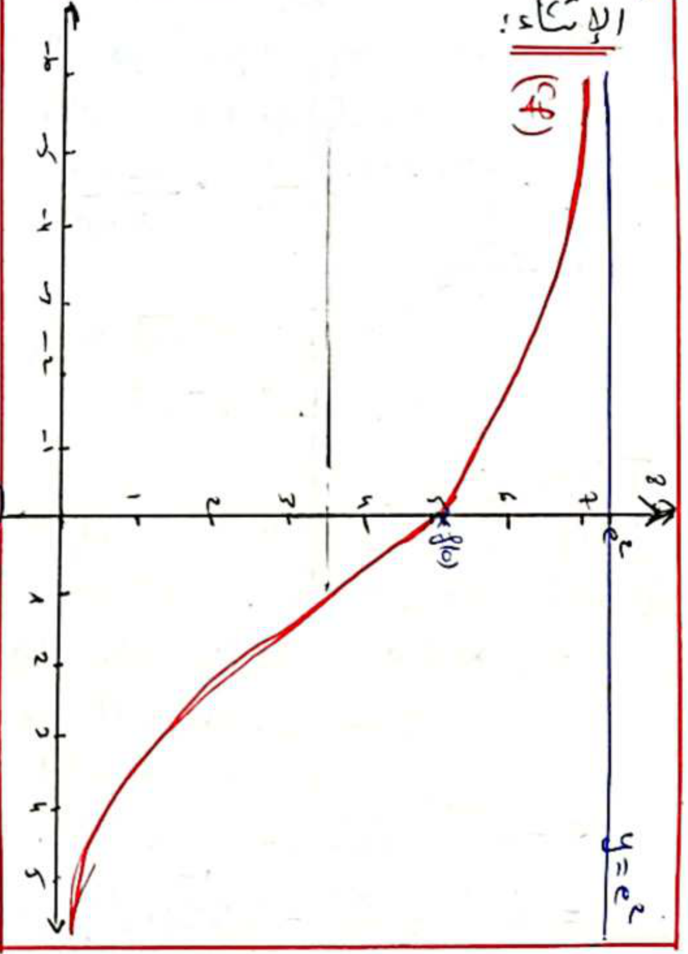
\# جدول تغيراتها

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	e^2 ↘	0

4)-

$f(0) = e^2 \ln(2) \simeq 5{,}12$

الإنشاء:



5)- $x \in [0, +\infty[$; $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

1)- التحقق:

لدينا من أجل كل عدد حقيقي:

$1 - \frac{e^x}{e^x+1} = \frac{e^x+1-e^x}{e^x+1} = \frac{1}{e^x+1}$.

ومنه:

$\int_0^x \frac{1}{e^t+1}\,dt = \int_0^x \left(1 - \frac{e^t}{e^t+1}\right) dt$

$= \left[t - \ln(e^t+1)\right]_0^x = \boxed{x - \ln(e^x+1) + \ln 2}$

ب/ الاستنتاج: لدينا:

$F(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x e^{-t+2} \cdot \ln(e^t+1)\,dt$

نضع: $\begin{cases} u(t) = \ln(e^t+1) \\ v'(t) = e^{-t+2} \end{cases}$ فنجد: $\begin{cases} u'(t) = \frac{e^t}{e^t+1} \\ v(t) = -e^{-t+2} \end{cases}$

وعليه:

$F(x) = \left[-e^{-t+2} \ln(e^t+1)\right]_0^x - \int_0^x -\frac{e^t}{e^t+1} e^{-t+2}\,dt$

$= -e^{-x+2} \ln(e^x+1) + e^2 \ln 2 + \int_0^x \frac{e^2}{e^t+1}\,dt$

$= -f(x) + e^2 \ln 2 + e^2\left(x - \ln(e^x+1) + \ln 2\right)$

$F(x) = e^2\left(x - \ln(e^x+1)\right) + 2e^2 \ln 2 - f(x)$

* ~~الدالة F هي الدالة الأصلية للدالة f على المجال $[0, +\infty[$ والتي تنعدم عند $x = 0$.~~

ج/ الحساب:

$F(\ln 2) = e^2(\ln 2 - \ln 3) + 2e^2 \ln 2 - \frac{e^2 \ln 3}{2}$.

$= e^2\left(\ln 2 + 2\ln 2 - \ln 3 - \frac{1}{2}\ln 3\right)$

$F(\ln 2) = e^2\left(3\ln 2 - \frac{3}{2}\ln 3\right)$

\# التفسير الهندسي: $F(\ln 2)$ هو مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) والمستقيمات ذات المعادلات:

$y = 0$ ، $x = 0$ ، $x = \ln 2$.

\# النهاية:

$\lim_{x \to +\infty} F(x) = \lim_{x \to +\infty}\left(e^2\left(x - \ln(1+e^x)\right) - f(x) + 2e^2 \ln 2\right)$

$= \lim_{x \to +\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{e^x}{1+e^x}\right)\right) - f(x) + 2e^2 \ln 2\right)$

$= \lim_{x \to +\infty}\left(e^2\left(\ln\left(\frac{1}{e^{-x}+1}\right)\right) - f(x) + 2e^2 \ln 2\right)$

$= 2e^2 \ln 2$

01:26

التمرين الأول

تابع للموضوع

إذن: $e^x \ln 2 \leq \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \leq e^{2x} \ln 2$.

د/ ومنه لدينا:

$\lim_{x \to 0} e^x \ln 2 =$

$\lim_{x \to 0} e^{2x} \ln 2 = \ln 2$

إذن: $\lim_{x \to 0}\left(\int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt\right) = \ln 2$.

• لدينا:

$\lim_{x \to 0} F(x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt\right)$

$= 1 - 1 - \ln 2$

$= -\ln 2 = F(0)$

إذن F مستمرة على يمين العدد 0 .

تابع للموضوع 02

01:17

الموضوع الثاني :

التمرين الأول :

$$(u_n):\begin{cases} u_0=3 \\ u_{n+1}=\dfrac{a+2au_n}{a+1+u_n} \end{cases} \quad ; \ a\in\mathbb{R}.$$

1- تعيين قيمة a بحيث (u_n) تكون ثابتة :

(u_n) ثابتة معناه من أجل كل عدد طبيعي n :

$u_{n+1}=u_n=u_0=3$ ومنه : $3=\dfrac{a+2a\times 3}{a+1+3}$

ومنه : $3(a+4)=7a$

ومنه : $12=4a$ إذن $a=\dfrac{12}{4}=\boxed{3=a}$

2- نفرض أن $a>3$:

أ/ البرهان بالتراجع :

نسمي $p(n)$ الخاصية $0<u_n<a$ ولنثبت صحتها من أجل كل عدد طبيعي n .

• من أجل $n=0$: لدينا $u_0=3$ معناه : $0<u_0\leq 3<a$ إذن $p(0)$ محققة .

• ليكن n عددا طبيعيا كيفيا .

نفرض صحة $p(n)$ أي : $0<u_n<a$.

ومنه : لدينا $u_{n+1}=\dfrac{a+2au_n}{a+1+u_n}=\dfrac{2a-a+2a^2-2a^2+2au_n}{a+1+u_n}$

$$=\frac{2a(1+a+u_n)-a-2a^2}{a+1+u_n}=2a-\frac{a(1+2a)}{a+1+u_n}$$

لدينا : $0<u_n<a$ ومنه $a+1<a+1+u_n<2a+1$

ومنه : $\dfrac{1}{2a+1}<\dfrac{1}{a+1+u_n}<\dfrac{1}{a+1}$ ومنه :

$$-\frac{a(1+2a)}{a+1}<-\frac{a(1+2a)}{a+1+u_n}<-\frac{a(1+2a)}{2a+1}$$

ومنه : $2a-\dfrac{a(2a+1)}{a+1}<2a-\dfrac{a(1+2a)}{a+1+u_n}<2a-a$

إذن : $\dfrac{2a^2+2a-2a^2-a}{a+1}<u_{n+1}<a$

أي $0<\dfrac{a}{a+1}<u_{n+1}<a$.

إذن $p(n+1)$ محققة بفرض أن $p(n)$ صحيحة .

إذن حسب مبدأ البرهان بالتراجع : من أجل كل عدد طبيعي n : $0<u_n<a$.

ب/ تبيان أن (u_n) متزايدة تماما :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n :

$$u_{n+1}-u_n=\frac{a+2au_n}{a+1+u_n}-u_n=\frac{a+2au_n-au_n-u_n-(u_n)^2}{a+1+u_n}$$

$$=\frac{-(u_n)^2+(a-1)u_n+a}{a+1+u_n}$$

لدينا باعتبار كثير الحدود : $-X^2+(a-1)X+a$

فإن : $\Delta=(a-1)^2-4(-1)(a)=a^2-2a+1+4a$

$=a^2+2a+1=(a+1)^2>0$

ومنه : $\sqrt{\Delta}=a+1$.

وعليه له جذران :

$X_1=\dfrac{1-a-a-1}{2(-1)}=a$

$X_2=\dfrac{1-a+a+1}{2(-1)}=-2$

وعليه : من أجل

X	$-\infty$		-2		a		$+\infty$
$-X^2+(a-1)X+a$		$-$	0	$+$	0	$-$	

إذن من أجل $u_n<a$: $-(u_n)^2+(a-1)u_n+a>0$

إذن : $u_{n+1}-u_n>0$ إذن (u_n) متزايدة تماما .

جـ/ الاستنتاج :

(u_n) متزايدة ومحدودة من الأعلى فهي متقاربة .

تعيين نهايتها : نضع : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=\ell$

ومنه : $\ell=\dfrac{a+2a\ell}{a+1+\ell}$

ومنه : $\ell(a+1+\ell)=a+2a\ell$ وعليه :

$\ell^2+(a+1)\ell-2a\ell-a=0$

أي : $\ell^2+(1-a)\ell-a=0$ أي :

$-\ell^2+(a-1)\ell+a=0$

مما سبق نجد : $\ell=a$ أو $\ell=-2$

وبما أن $0<u_n<a$ فإن : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=a$

3- نفرض أن $a=2$: (v_n) : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n+1}$.

أ/ تبيان أن (v_n) هندسية :

لدينا : $u_{n+1}=\dfrac{2+4u_n}{4+u_n}$ ومنه :

$$v_{n+1}=\frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}+1}=\frac{\frac{2+4u_n}{3+u_n}-2}{\frac{2+4u_n}{3+u_n}+1}=\frac{2+4u_n-6-2u_n}{2+4u_n+3+u_n}$$

$$=\frac{-4+2u_n}{5+5u_n}=\frac{2(u_n-2)}{5(u_n+1)}$$

$$=\frac{2}{5}v_n$$

إذن : (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=\dfrac{2}{5}$ وحدها الأول : $v_0=\dfrac{3-2}{3+1}=\dfrac{1}{4}$

لدينا عبارة الحد العام:

$v_n = v_0 \times q^n$

$v_n = \frac{1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

لدينا: $v_n = \frac{u_n-2}{u_n+1} = 1 - \frac{3}{u_n+1}$ ومنه، $-\frac{3}{u_n+1} = v_n - 1$

ومنه، $u_n + 1 = \frac{-3}{v_n - 1}$ أي،

$u_n = \frac{3}{1-v_n} - 1$ أي، $u_n = \frac{3}{1-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1$

$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{1-\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n} - 1\right) = 3 - 1 = 2$

ج- حساب المجموع:

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n:

$-\frac{3}{u_n+1} = v_n - 1$ ومنه، $\frac{1}{u_n+1} = -\frac{1}{3}(v_n - 1)$

$= -\frac{1}{3} v_n + \frac{1}{3}$.

وعليه،

$S_n = \frac{1}{1+u_0} + \frac{1}{1+u_1} + \dots + \frac{1}{1+u_n}$

$= \left(-\frac{1}{3}v_0 + \frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}v_1 + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{3}v_n + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3}(v_0 + v_1 + \dots + v_n) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{3}\right)$

$= -\frac{1}{3} \times \frac{1}{4}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-0+1}}{1-\frac{2}{3}}\right) + \frac{1}{3}(n-0+1)$

$= -\frac{1}{12}\left(\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{3}(n+1)$

$= -\frac{5}{36}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}\right) + \frac{1}{3}(n+1) = S_n$

4- نضع $a = -1$ أي، $u_{n+1} = \frac{-1-2u_n}{u_n}$

ونضع: $w_n = \frac{u_n+2}{u_n+1} = 1 + \frac{1}{u_n+1}$.

أ- تبيان أن: (w_n) حسابية:

$w_{n+1} = \frac{u_{n+1}+2}{u_{n+1}+1} = \frac{\frac{-1-2u_n}{u_n}+2}{\frac{-1-2u_n}{u_n}+1}$

$= \frac{-1-2u_n+2u_n}{-1-2u_n+u_n} = \frac{-1}{-1-u_n}$

$= \frac{1}{1+u_n} = w_n - 1$.

ومنه، (w_n) متتالية حسابية أساسها $\boxed{r=-1}$

حدها الأول: $w_0 = \frac{3+2}{3+1} = \frac{5}{4}$.

ب- عبارة الحد العام:

$w_n = w_0 + nr$

$= \frac{5}{4} + (-1)n = \frac{5}{4} - n = w_n$

• لدينا، $w_n - 1 = \frac{1}{u_n+1}$ ومنه $u_n + 1 = \frac{1}{w_n - 1}$

ومنه $u_n = \frac{1}{w_n-1} - 1$

إذن، $u_n = \frac{1}{\frac{5}{4}-n-1} - 1 = \frac{1}{\frac{1}{4}-n} - 1$

ومنه، $\lim_{n\to+\infty} u_n = -1$

التمرين الثاني:

$(E_m)\dots\ 45x + 20y = 2^m - 18$; $m \in \mathbb{N}$

(I) 1- دراسة بواقي قسمة 2^m على 5:

لدينا $2^0 \equiv 1\ [5]$

$2^1 \equiv 2\ [5]$

$2^2 \equiv 4\ [5]$

$2^3 \equiv 3\ [5]$

$2^4 \equiv 1\ [5]$

ومنه،

$m =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$
$r_m =$	1	2	4	3

2- حتى تقبل (E_m) حلولا يجب:

$PGCD(45;20) \mid 2^m - 18$ لدينا،

$45 = 20\times2 + 5$

$20 = 5\times4 + 0 \Rightarrow 45 \wedge 20 = 5$

إذن يجب $5 \mid 2^m - 18$ أي $2^m - 18 \equiv 0\ [5]$

ومنه، $2^m \equiv 18\ [5]$ أي $2^m \equiv 3\ [5]$.

ومنه، $m = 4k+3$; $k \in \mathbb{N}$

(II): $m = 7$ نصبح: $(E_7)\dots\ 45x + 20y = 110$

$(E)\dots\ 9x + 4y = 22$

1) أ- التحقق أن (E_7) تقبل حلولا:

لدينا، $m = 7 = 4(1) + 3$ إذن (E_7) تقبل حلولا.

لدينا $45x + 20y = 110$ تكافئ

$9x + 4y = 22$ أي $5(9x) + 5\times4y = 5\times22$

إذن (E_7) تكافئ (E).

علينا أن نتحقق أن (x,y) حل المعادلة (E) معناه: $9x+4y=22$ ومنه $9x=4(-y)+22$

$$=4(-y)+4(5)+2$$
$$=4(-y+5)+2$$

لدينا: $9x\equiv 2[4]$ وبما أن $9\equiv 1[4]$

فإن $9x\equiv x[4]$ إذن $x\equiv 2[4]$

حلول المعادلة (E): لدينا $x\equiv 2[4]$

معناه: $x=4k+2\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

بالتعويض في E نجد:

$$9(4k+2)+4y=22$$

ومنه $9\times 4k+4y=22-18$

أي $4y=-9\times 4k+4$

أي $y=-9k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

إذن $(x,y)=(4k+2\,;-9k+1)\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

2) $N=\overline{133\alpha\beta 3}^{4}=\overline{56\alpha 0}^{7}$

معناه: $3+4\beta+16\alpha+3\times4^3+3\times4^4+4^5=0+7\alpha+7^2\times6+5\times7^3$

أي $4\beta+16\alpha+1987=7\alpha+2009$

ومنه $9\alpha+4\beta=22$

إذن: $(\alpha;\beta)=(4k+2;-9k+1)$

لكن: $0\leq\alpha\leq3$ و $0\leq\beta\leq3$.

أي $0\leq 4k+2\leq 3$ و $0\leq -9k+1\leq 3$

ومنه $\begin{cases}-\frac{1}{2}\leq K\leq\frac{1}{4}\\ \frac{1}{9}\geq K\geq-\frac{2}{9}\end{cases}$ و إذن $K=0$

ومنه $(\alpha;\beta)=(2,1)$

بالتعويض في N نجد:

$$N=7(2)+2009$$
$$=14+2009=2023=N.$$

3) $a=88n+22$ و $b=198n+44$.

$d=PGCD(a,b)$.

أ- التحقق: لدينا:

$$9a+4(-b)=9(88n+22)-4(198n+44)$$
$$=792n+198-792n-176$$
$$=22$$

إذن: $(a;-b)$ حل المعادلة (E).

ب- استنتاج قيم d: لدينا $d|a$ و $d|b$

ومنه $d|9a-4b$ أي $d|22$

ومنه $d\in D_{22}=\{22;11;2;1\}$

ج- التحقق: لدينا

$a=22(4n+1)$

و $b=22(9n+2)$

إذن $22|a$ و $22|b$.

د- لدينا: $-4(9n+2)+9(4n+1)=9-8$
$=1$

إذن حسب مبرهنة بيزو العددان $(4n+1)$ و $(9n+2)$ أوليان فيما بينهما.

ومنه $PGCD(a,b)=22\,PGCD(9n+2;4n+1)$
$=22\times1=22$

التمرين الثالث:

$f(x)=\dfrac{1-e^x}{x^2}$; $D_f=]0,+\infty[$

1- الحساب:

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}\right)=-\infty$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\>}}f(x)=\lim_{\substack{x\to0\\>}}\Big[\underbrace{\frac{1}{x}}_{+\infty}\times(-1)\Big(\underbrace{\frac{e^x-1}{x}}_{1}\Big)\Big]$$
$$=-\infty$$

التفسير الهندسي: (C_f) يقبل مستقيما مقاربا موازيا لحامل محور التراتيب معادلته $x=0$.

2) $g(x)=2(1-e^{-x})-x$; $D_g=]0,+\infty[$

1/ دراسة اتجاه تغير الدالة g:

لدينا من أجل x من $]0,+\infty[$:

$$g'(x)=2e^{-x}-1.$$

لدينا: $2e^{-x}-1=0$

معناه: $2e^{-x}=1$

أي $e^{-x}=\frac{1}{2}$

ومنه $-x=\ln(\frac{1}{2})$

أي $\boxed{x=\ln 2}$

ولدينا $2e^{-x}-1>0$

معناه: $2e^{-x}>1$

أي $e^{-x}>\frac{1}{2}$

ومنه $-x>\ln(\frac{1}{2})$

إذن: $x<\ln 2$

وعليه:

x	0		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$+$	0	$-$	

وعليه g متزايدة تماما على المجال $]0;\ln 2]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\ln 2;+\infty[$.

جدول تغيراتها

x	0	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$0 \nearrow$	$1-\ln 2$	$\searrow -\infty$

$\lim_{x \to 0^{>}} g(x) = 0$

$\lim_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

$g(\ln 2) = 1 - \ln 2$

ب- الدالة g موجبة في المجال $]0;\ln 2]$

ومستمرة في المجال $[\ln 2;+\infty[$ و: $g(\ln 2)>0$

و $\lim_{x\to+\infty} g(x) = -\infty < 0$

وبما أنها متناقصة تماما في هذا المجال

إذن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α

وحسابيا $g(\ln 4) = \frac{3}{2} - \ln 4 > 0$

$g(\ln 6) = \frac{5}{3} - \ln 6 < 0$.

ومنه $\ln 4 < \alpha < \ln 6$.

ج- إشارة $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$	$+$	0	$-$

3) أ- المشتقة: من أجل كل عدد حقيقي x موجب تماما:

$$f'(x) = \frac{-e^x(x^2) - 2x(1-e^x)}{(x^2)^2} = \frac{-x^2e^x + 2xe^x - 2x}{x^4}$$

$$= \frac{-x e^x + 2e^x - 2}{x^3}$$

$$= \frac{e^x}{x^3}\left(-x + 2 - 2e^{-x}\right)$$

$$= \frac{e^x}{x^3}\left(2(1-e^{-x}) - x\right) = \frac{e^x}{x^3} g(x)$$

ب- وعليه إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

إذن الدالة f متزايدة تماما في المجال $]0;\alpha]$

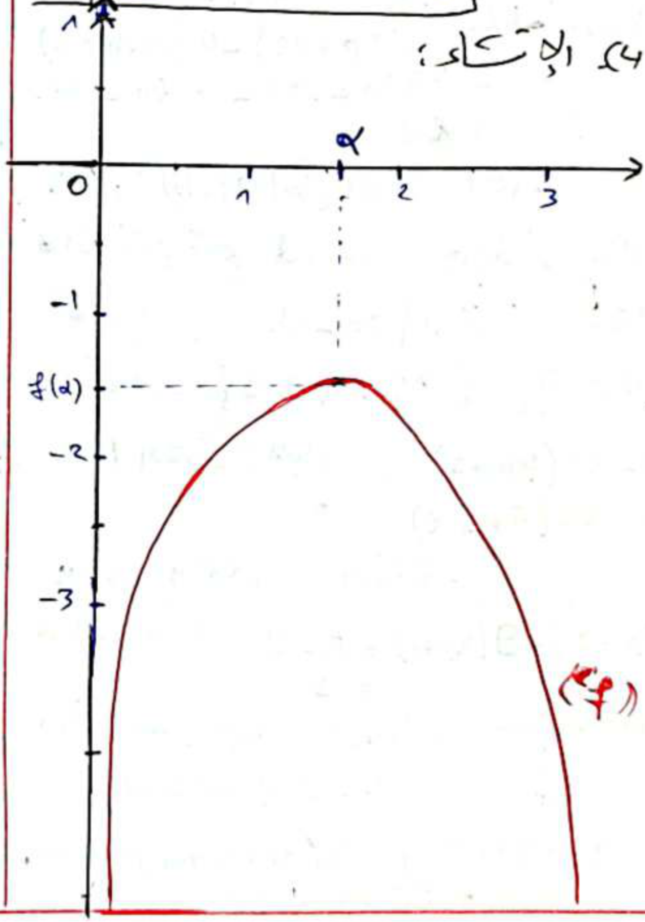
ومتناقصة تماما في المجال $[\alpha;+\infty[$.

جدول التغيرات

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty \nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow -\infty$

$f(\alpha) \simeq -1,5$

4) الإنشاء:



5-
$$F(x) = \begin{cases} \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt & ; x>0 \\ -\ln 2 & ; x=0. \end{cases}$$

أ- الإثبات: من أجل كل $x>0$ لدينا:

$$F(x) = \int_x^{2x} \frac{1-e^t}{t^2}\,dt = \int_x^{2x} \frac{1}{t^2}\cdot(1-e^t)\,dt$$

بوضع: $\begin{cases} u(t) = 1-e^t \\ v'(t) = \frac{1}{t^2} \end{cases}$ فإن: $u'(t) = -e^t$ ، $v(t) = -\frac{1}{t}$.

وعليه:

$$F(x) = \left[\frac{1-e^t}{-t}\right]_x^{2x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt$$

$$F(x) = \frac{e^{2x}-1}{2x} - \frac{e^x-1}{x} - \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt.$$

ب- التبيان: لدينا $0 < x \le t \le 2x$

ومنه $e^x \le e^t \le e^{2x}$ ومنه $\frac{e^x}{t} \le \frac{e^t}{t} \le \frac{e^{2x}}{t}$

إذن $\int_x^{2x} \frac{e^x}{t}\,dt \le \int_x^{2x} \frac{e^t}{t}\,dt \le \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t}\,dt$

لدينا
$$\bullet \int_x^{2x} \frac{e^x}{t} = e^x \int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = e^x\left[\ln t\right]_x^{2x}$$
$$= e^x(\ln 2x - \ln x)$$
$$= e^x \ln 2$$

و لدينا
$$\bullet \int_x^{2x} \frac{e^{2x}}{t} = e^{2x}\int_x^{2x} \frac{1}{t}\,dt = e^{2x}\left[\ln t\right]_x^{2x}$$
$$= e^{2x}(\ln 2x - \ln x) = e^{2x}\ln 2$$