اختبار الفصل الثاني

تمرين 1 (5نقاط)

(u_n) و (v_n) المتتاليتان العدديتان المعرّفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $\begin{cases} u_0 = \dfrac{7}{10} \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n + v_n}{5} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = \dfrac{1}{10} \\ v_{n+1} = \dfrac{2u_n + 3v_n}{5} \end{cases}$.

ومن أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $w_n = \dfrac{u_n - v_n}{2}$.

1) أ) برهن أنّ المتتالية (w_n) هندسية أساسها $\dfrac{2}{5}$، يطلب تعيين حدّها الأول w_0.

ب) اكتب عبارة الحد العام w_n بدلالة n، ثم احسب نهاية w_n.

2) أ) بيّن أنّ المتتالية (v_n) متزايدة تماما والمتتالية (u_n) متناقصة تماما.

ب) بيّن أنّ المتتاليتين (u_n) و (v_n) متجاورتان.

3) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $t_n = 2u_n + v_n$. بيّن أنّ المتتالية (t_n) ثابتة، احسب قيمتها ثم استنتج $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

4) من أجل كل عدد طبيعي n، نضع: $S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ و $S'_n = v_0 + v_1 + \ldots + v_n$.

احسب بدلالة n: $S_n - S'_n$ و $2S_n + S'_n$، ثم استنتج حساب المجموعين: S_n و S'_n.

تمرين 2 (4نقاط)

يحتوي كيس U_1 على 4 كريات سوداء، n كرية حمراء $(n \geq 3)$ وكرية واحدة خضراء (الكريات لا نفرق بينها عند اللمس)

1) نسحب كريتين في آن واحد بطريقة عشوائية، ونعتبر الأحداث التالية: A: سحب كريتين من نفس اللون.

B: سحب كريتين من لونين مختلفين. C: سحب كرية حمراء على الأقل.

بيّن أنّ احتمال الحدث A يساوي $\dfrac{n^2 - n + 12}{n^2 + 9n + 20}$، ثم احسب $p(\mathrm{B})$ و $p(\mathrm{B} \cup \mathrm{C})$.

2) ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل عملية سحب لكريتين عدد الكريات السوداء المتحصل عليها.

عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X، واحسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

3) نسحب من هذا الكيس كريتين على التوالي بدون إرجاع. احسب احتمال أن تكون الكرية الأولى المسحوبة حمراء.

4) يحتوي كيس U_2 على كرية واحدة سوداء وكرية واحدة حمراء، مشابهة لكريات الكيس الأول.

نسحب من الكيس U_1 كريتين سوداوين وكريتين حمراوين ثم نضعها في الكيس U_2. نختار عشوائيا أحد الكيسين ونسحب منه كرية واحدة. نعتبر الأحداث التالية: N: سحب كرية سوداء. R: سحب كرية حمراء. V: سحب كرية خضراء.

أ) أنجز شجرة الاحتمالات التي تنمذج هذه العملية.

ب) عيّن قيمة n التي من أجلها احتمال سحب كرية من الكيس U_2 علما أنّها حمراء يساوي $\dfrac{2}{5}$.

تمرين3 (4نقاط)

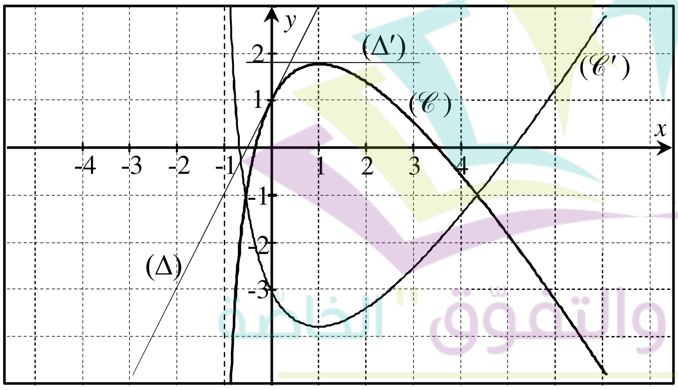
عيّن الاقتراح الصحيح الوحيد من بين الاقتراحات الثلاثة في كل حالة مما يلي مع التبرير.

		الاقتراح أ)	الاقتراح ب)	الاقتراح ج)
1	المنحني الممثل للدالة f المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x)=2x-1+(x^2+2x+3)e^{-x}$:	يقبل نقطة انعطاف واحدة	يقبل نقطتي انعطاف	لا يقبل نقطة انعطاف
2	المنحني الممثل للدالة g المعرّفة على $\mathbb{R}-\{0;1\}$ بـ: $g(x)=x+\ln\left\|1-\frac{1}{x}\right\|$ يقبل كمركز تناظر النقطة:	$A(-1;0)$	$B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$	$C\left(\frac{1}{2};0\right)$
3	h الدالة المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=3^{-x}+3^{x}$: القيمة المتوسطة لـ h على المجال $[0;1]$ هي:	$\frac{8}{3}$	$\frac{8}{3\ln 3}$	$\frac{4}{3\ln 3}$
4	مجموعة حلول المتراجحة $5\times10^{-x}\leq 6-10^{x}$، في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ هي المجال:	$[1;5]$	$[0;\ln 5]$	$[0;\log 5]$

تمرين4 (7نقاط)

I- f الدالة العددية المعرّفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ: $f(x)=ax+b+c\ln(x+1)$، حيث a، b و c ثلاثة أعداد حقيقية. ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في المعلم المتعامد والمتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ المبيّن في الشكل المقابل.

المستقيم (Δ) هو المماس للمنحني $(\mathscr{C})$ عند $x_0=0$، والمستقيم (Δ') هو المماس الأفقي لـ $(\mathscr{C})$ عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$. باستعمال القراءة البيانية:



1) عيّن قيم الأعداد التالية: $f'(1)$، $f(0)$ و $f'(0)$.

2) استنتج قيم الأعداد الحقيقية a، b و c.

3) هل $(\mathscr{C}')$ هو التمثيل البياني لـ: $(-f)$، $(-f+2)$ أو $(-f-2)$؟

II- نفرض أنّ عبارة الدالة f هي: $f(x)=-2x+1+4\ln(x+1)$.

1) احسب $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}-1} f(x)$، فسّر النتيجة بيانيا، ثم بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$.

2) احسب $f'(x)$، ادرس إشارتها ثم أنشئ جدول تغيرات الدالة f على المجال $]-1;+\infty[$.

3) بيّن أنّ المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]1;+\infty[$ يطلب حصره بعددين طبيعيين متتابعين.

4) هل المنحني $(\mathscr{C})$ يقبل مماسا ميله -2؟ علّل إجابتك.

5) عيّن بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m حتى تقبل المعادلة $2\ln(x+1)=x+m$ حلين موجبين تماما.

6) أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة، احسب: $I=\int_0^2 \ln(x+1)\,dx$. (لاحظ أنّ $\frac{x}{x+1}=1-\frac{1}{x+1}$)

ب) احسب مساحة الحيّز المحدّد بالمنحني $(\mathscr{C})$ حامل محور الفواصل والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=0$ و $x=2$.

III- نعتبر الدالة h المعرّفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x)=-2|x|+1+4\ln(|x|+1)$.

1) أ) بيّن أنّ: $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=2$ و $\lim\limits_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=-2$. (نذكّر أنّ: $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$)

ب) ماذا يمكن قوله عن قابلية اشتقاق الدالة h عند الصفر؟ أعط تفسيرا هندسيا.

2) بيّن أنّ الدالة h زوجية، ثم استعمل المنحني $(\mathscr{C})$ لرسم المنحني $(\mathscr{C}_h)$ الممثل للدالة h مع الشرح. (سلم الرسم 2cm)

تصحيح اختبار الفصل 2 : 2024م

"عبد المطلب"

تمرين 1:

1) أ) $W_{n+1} = \frac{U_{n+1} - V_{n+1}}{2}$

$W_{n+1} = \frac{\frac{4U_n+V_n}{5} - \frac{2U_n+3V_n}{5}}{2} = \frac{2U_n - 2V_n}{10}$

$W_{n+1} = \frac{U_n - V_n}{5} = \frac{2}{5}\left(\frac{U_n-V_n}{2}\right) = \frac{2}{5}W_n$

$W_0 = \frac{U_0 - V_0}{2} = \frac{3}{10}$ $\qquad q = \frac{2}{5}$

ب) $W_n = W_0 \cdot q^n = \frac{3}{10}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ (الحد العام)

$\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$ لأن $-1<q<1$ ..

2) أ) $V_{n+1} - V_n = \frac{2U_n+3V_n}{5} - V_n = \frac{2(U_n-V_n)}{5} = \frac{4}{5}W_n > 0$

$U_{n+1} - U_n = \frac{4U_n+V_n}{5} - U_n = \frac{V_n - U_n}{5} = -\frac{2}{5}W_n < 0$

ومنه: (V_n) متزايدة و (U_n) متناقصة

ب) (U_n) متناقصة و (V_n) متزايدة ولدينا $\lim_{n\to+\infty} W_n = 0$

أي $\lim_{n\to+\infty}(U_n - V_n) = 0$ ، إذن (U_n) و (V_n) متجاورتان

3) $t_{n+1} = 2U_{n+1} + V_{n+1} = \frac{8U_n+2V_n}{5} + \frac{2U_n+3V_n}{5}$

$t_{n+1} = \frac{10U_n+5V_n}{5} = 2U_n + V_n = t_n$ ومنه (t_n) ثابتة

$t_n = t_0 = 2U_0 + V_0$ ومنه: $t_n = \frac{3}{2}$

$2\lim_{n\to+\infty} U_n + \lim_{n\to+\infty} V_n = \lim_{n\to+\infty} t_n$

$3\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{3}{2}$ ومنه: $\lim_{n\to+\infty} U_n = \frac{1}{2}$

4) $S_n - S'_n = \sum_{n=0}^{n}(U_n - V_n) = 2\sum_{n=0}^{n} W_n$

$S_n - S'_n = 2\times\frac{3}{10}\left(\frac{1-(\frac{2}{5})^{n+1}}{1-\frac{2}{5}}\right) = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$2S_n + S'_n = \sum_{n=0}^{n}(2U_n+V_n) = \sum_{n=0}^{n} t_n$

$2S_n + S'_n = \underbrace{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}+\dots+\frac{3}{2}}_{(n+1)\text{ مرة}} = \frac{3}{2}(n+1)$

$$\begin{cases} S_n - S'_n = 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \\ 2S_n + S'_n = \frac{3}{2}(n+1) \end{cases}$$

بالجمع: $3S_n = \frac{3}{2}n + \frac{3}{2} + 1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$S_n = \frac{n}{2} + \frac{5}{6} - \frac{1}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

$S'_n = \frac{n}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$

تمرين 2:

1) $P(A) = \frac{C_n^2 + C_4^2}{C_{n+5}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}+6}{(n+5)(n+4)} = \frac{n^2-n+12}{n^2+9n+20}$

$P(B) = P(\bar{A}) = 1-P(A) = \frac{2(5n+4)}{n^2+9n+20}$

$P(C) = \frac{C_n^1\times C_5^1 + C_n^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2+9n}{n^2+9n+20}$

أو $P(C) = 1 - \frac{C_5^2}{C_{n+5}^2}$

(1 حمراء) $P(B\cap C) = \frac{C_n^1 \times C_5^1}{C_{n+5}^2} = \frac{10n}{n^2+9n+20}$

$P(B\cup C) = P(B)+P(C)-P(B\cap C) = \frac{n^2+9n+8}{n^2+9n+20}$

2) $X = \{0;1;2\}$

$P(X=0) = \frac{C_{n+1}^2}{C_{n+5}^2} = \frac{n^2+n}{n^2+9n+20}$

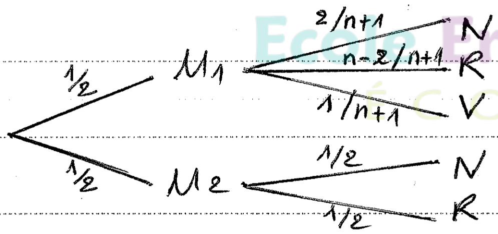
$P(X=1) = \frac{C_4^1\times C_{n+1}^1}{C_{n+5}^2} = \frac{8(n+1)}{n^2+9n+20}$

$P(X=2) = \frac{C_{n+4}^2}{C_{n+5}^2} = \frac{12}{n^2+9n+20}$

$E(X) = 0 + \frac{8(n+1)}{n^2+9n+20} + \frac{24}{n^2+9n+20} = \frac{8(n+4)}{(n+4)(n+5)} = \frac{8}{n+5}$

3) $P = \frac{A_n^1 \times A_{n+4}^1}{A_{n+5}^2} = \frac{n}{n+5}$

4) أ)



ب) $P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{n-2}{n+1} + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2} = \frac{3n-3}{4(n+1)}$

$P_R(U_2) = \frac{P(U_2\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3n-3}{4(n+1)}} = \frac{n+1}{3n-3} = \frac{2}{5}$

ومنه: $n = 11$

تمرين 3:

1) الاقتراح جـ هو الصحيح:

$f'(x) = 2 + (1-x^2)e^{-x}$

$+ \quad 1 \quad +$ $\qquad f''(x) = (x-1)^2 e^{-x}$

f'' تنعدم ولا تغير إشارتها

2) الإقتراح الصحيح هو ب) : $B\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$

$f\left(2\left(\frac{1}{2}\right)-x\right)+f(x)=2\left(\frac{1}{2}\right)$ $(1-x\neq 1 ، x\neq 0)$ $(1-x\neq 0 ؛ x\neq 1)$

$f(1-x)+f(x)=1$

$1-x+\ln\left|\frac{-x}{1-x}\right|+x+\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|=1+\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|-\ln\left|\frac{x}{x-1}\right|=1$

3) الإقتراح الصحيح هو ب) : $\frac{8}{3\ln 3}$

$\mu=\frac{1}{1-0}\int_0^1 h(x)\,dx=\int_0^1\left(e^{-x\ln 3}+e^{x\ln 3}\right)dx$

$\mu=\left[\frac{-1}{\ln 3}e^{-x\ln 3}+\frac{1}{\ln 3}e^{x\ln 3}\right]_0^1=\frac{1}{\ln 3}\left[3^x-3^{-x}\right]_0^1=\frac{8}{3\ln 3}$

4) $5.10^{-x}+10^x-6\leq 0$ يعني: $\frac{5}{10^x}+10^x-6\leq 0$

$10^{2x}-6.10^x+5\leq 0$ ، بوضع $X=10^x$:

$X^2-6X+5\leq 0$ $\quad + \ 1 \ - \ 5 \ +$

$1\leq X\leq 5$ ، $1\leq 10^x\leq 5$ ؛ $\log 1\leq x\leq \log 5$

ومنه : $0\leq x\leq \log 5$

تمرين 4:

I-1) $f'(1)=0$ ؛ $f(0)=1$

$f'(0)$ هو معامل توجيه المماس عند 0.

$f'(0)=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{3-1}{1-0}=2$

2) $f'(x)=a+\frac{c}{x+1}$ (f قابلة للاشتقاق على D_f)

$f(0)=1$ يعني $b+\ln 1=1$ ومنه: $b=1$

$\begin{cases}f'(1)=0\\ f'(0)=2\end{cases}$ يعني: $\begin{cases}a+\frac{c}{2}=0\\ a+c=2\end{cases}$ بالطرح: $c=4$ و $a=-2$

3) (C') هو التمثيل البياني لـ: $(-f-2)$. نناظر بالنسبة لـ (Ox) ثم نسحب بالشعاع $\vec{V}\binom{0}{-2}$

II-1) $\lim_{x\to -1}f(x)=-\infty$ لأن $\lim_{x\to -1}\ln(x+1)=-\infty$

مستقيم مقارب عمودي معادلته $x=-1$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\left[\frac{-2x+1}{x+1}+4\frac{\ln(x+1)}{x+1}\right]=-\infty$

2) $f'(x)=-2+\frac{4}{x+1}=\frac{-2x+2}{x+1}$

إشارة $f'(x)$: $-1 \ + \ 1 \ -$

x	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$-1+4\ln 2$	↘ $-\infty$

3) f مستمرة ومتناقصة تماما على $]1;+\infty[$ ، $f(1)>0$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$

حسب مبرهنة القيم المتوسطة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α، حيث $3<\alpha<4$ ؛ لأن $f(4)<0$ و $f(3)>0$.

4) $f'(x_0)=-2$ يعني: $\frac{-2x_0+2}{x_0+1}=-2$

المعادلة لا تقبل حلولا ومنه لا يوجد مماس ميله -2.

5) $2\ln(x+1)=x+m$ ، $-x+2\ln(x+1)=m$

$-2x+4\ln(x+1)=2m$ ومنه $f(x)=2m+1$

حلين موجبين تماما: $1<2m+1<-1+4\ln 2$

ومنه $0<m<-1+2\ln 2$

6) أ) $\begin{cases}u(x)=\ln(x+1)\\ v'(x)=1\end{cases}$ $\begin{cases}u'(x)=\frac{1}{x+1}\\ v(x)=x\end{cases}$

$I=\int_0^2\ln(x+1)\,dx=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\frac{x}{x+1}dx$

$=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\int_0^2\left(1-\frac{1}{x+1}\right)dx$

$=\left[x\ln(x+1)\right]_0^2-\left[x-\ln(x+1)\right]_0^2$

$I=\left[(x+1)\ln(x+1)-x\right]_0^2=3\ln 3-2$

ب) f موجبة على المجال $[0;2]$

$A=\int_0^2 f(x)\,dx=\left[-x^2+x\right]_0^2+4\int_0^2\ln(x+1)\,dx$

$A=-4+2+4(3\ln 3-2)=(12\ln 3-10)\,u.a$

III-1) أ) $\lim_{x\overset{>}{\to}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\overset{>}{\to}0}\left[-2+4\frac{\ln(x+1)}{x}\right]=2$

$\lim_{x\overset{<}{\to}0}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\overset{<}{\to}0}\left[2-4\frac{\ln(-x+1)}{-x}\right]=-2$

ب) f غير قابلة للاشتقاق عند 0 لأن $f'_g(0)\neq f'_d(0)$

(C_h) يقبل نقطة زاوية $A(0,1)$. (نصفي مماسين)

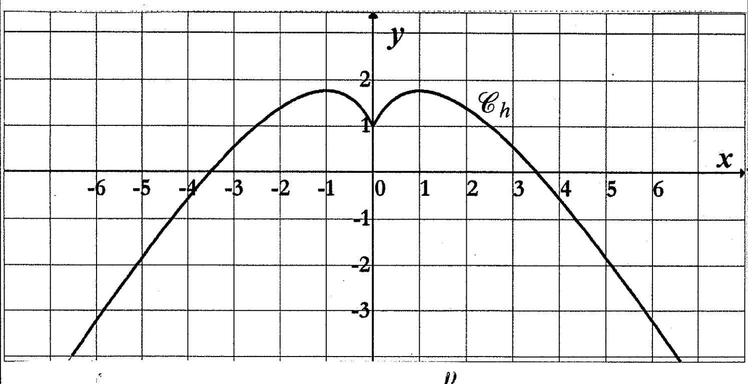
2) $h(-x)=f(|-x|)=f(|x|)$. $h(x)=f(|x|)$

$h(-x)=h(x)$ ومنه h زوجية.

$x>0$: $h(x)=f(x)$. (C_h) يطابق (C)

$x<0$: بما أن h زوجية. نناظر الجزء المطابق بالنسبة لـ (Oy)

(C_h) يقبل كمحور تناظر محور التراتيب.



"عبد المطلب"