الاختبار الثاني في مـــادة الريـــاضيات

المـدة: 04 ساعات

التمرين الأول :(05 نقاط)

(U_n) متتالية هندسية حدودها موجبة تماما معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} 6LnU_0 + LnU_3 + LnU_5 = 16Ln\sqrt{6} \\ LnU_7 - LnU_4 = Ln27 \end{cases}$

1)- أوجد q أساس هذه المتتالية ، ثم حدها الأول U_0 . 2)- أكتب عبارة الحد العام U_n بدلالة n .

3)- أحسب بدلالة n المجموعين : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + ... + U_n$

$$S'_n = LnU_0 + Ln\frac{U_1}{4} + Ln\frac{U_2}{4^2} + ... + Ln\frac{U_n}{4^n}$$

4)- أ)- أدرس حسب قيم العدد لطبيعي n بواقي قسمة 3^n على 10 .

بـ)- ما هو باقي قسمة العدد A_n على 10 حيث : $A_n = (S_n + 1)^{1444} - 2\times 299^{2n+3} - 2023$ ؟

5)- أ)- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$.

بـ)- عين قيم العدد الطبيعي n حتى يكون العدد $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعفا للعدد 10.

6)- N عددا طبيعيا يكتب $\overline{x\,222xxx}$ في نظام التعداد ذي الأساس 3 و يكتب $\overline{4x\,3y}$ في النظام التعداد ذي الأساس 7

أوجد x و y ثم أكتب N في النظام العشري .

التمرين الثاني :(04 نقاط)

1)- (C_f) هو التمثيل البياني للدالة f المعرفة على المجال : $\left[0,\sqrt{6}\right[$ بـ : $f(x) = \frac{3}{\sqrt{6-x^2}}$ (كما هو موضح على الوثيقة المرفقة)

- لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

أ)- مثل على حامل محور الفواصل الحدود الأربعة الأولى لهذه المتتالية . بـ)- ضع تخمينا حول اتجاه تغير و تقارب هذه المتتالية .

جـ)- باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أثبت أنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le \sqrt{3}$

د)- بين أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \dfrac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}}$. استنتج إتجاه تغير المتتالية (U_n) .

- استنتج من جـ)- و د)- أن المتتالية (U_n) متقاربة ، أحسب : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

2)- لتكن المتتالية (V_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$

أ)- بين أن المتتالية (V_n) متتالية حسابية يطلب تعيين أساسها r وحدها الأول .

بـ)- أكتب V_n ثم U_n بدلالة n ، أحسب للمرة الثانية : $\lim_{n\to+\infty} U_n$

جـ)- أحسب بدلالة n الجداء P_n حيث: $P_n = (U_1 \times U_2 \times .... \times U_n)^2$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

I)- لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f(x) = e^{-\frac{x+1}{2}} - e^{-x-1}$ ، (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

$\|\vec{i}\| = 4cm$

1)- أحسب : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ ، فسر هذه النتيجة بيانيا . 2)- بين أن : $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

3) - بين أنه من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $f'(x) = e^{-x-1}\left(\frac{-1}{2}e^{\frac{x+1}{2}}+1\right)$ ، استنتج اتجاه تغير الدالة f، ثم شكل جدول تغيراتها.

4) - أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0 = -1$. 5) - أنشئ (T) و (C_f).

6) - ناقش بيانيا حسب قيم الوسيط الحقيقي m عدد حلول المعادلة : $f(x) = f(m)x + f(m)$.

7) - λ وسيط حقيقي موجب تماما ، أحسب $S(\lambda)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f)، والمستقيمات التي معادلاتها :

$y = 0$ ، $x = -1$ و $x = \lambda$. أحسب : $\lim_{x\to+\infty} S(\lambda)$.

II)- لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $g(x) = f(x) + e^{-x-1}$. نسمي g' ، g'' ، .... $g^{(n)}$ الدوال المشتقة النونية للدالة g حيث n عدد طبيعي غير معدوم .

1)- برهن باستعمال مبدأ البرهان بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم : $g^{(n)}(x) = \left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$

2)- من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم نضع : $S_n = g'(0) + g''(0) + ... + g^{(n)}(0)$

أحسب S_n بدلالة n ، ثم $\lim_{n\to+\infty} S_n$.

التمرين الرابع :(06 نقاط)

I)- لتكن الدالة f المعرفة على المجال $D=[0,e[\cup]e,+\infty[$ كما يلي :

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{1}{1-Lnx}, & x\in]0,e[\cup]e,+\infty[\\ f(0)=0 \end{cases}$$

(C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

1)- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}}\dfrac{f(x)}{x}$ ، ماذا تستنتج ؟ فسر هذه النتيجة بيانيا .

2)- أ)- أحسب : $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ <}}f(x)$ ، $\lim\limits_{\substack{x\to e\\ >}}f(x)$ فسر النتيجتين بيانيا . أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

بـ)- أثبت أن (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : $y=x$ بجوار . ثم ادرس وضعيته بالنسبة للمنحنى (C_f)

3)- برهن أنه من أجل كل x من $]0,e[\cup]e,+\infty[$: $f'(x)=1+\dfrac{1}{x(1-Lnx)^2}$

- استنتج اتجاه تغير الدالة f على $]0,e[\cup]e,+\infty[$ ، شكل جدول تغيرات الدالة f على D .

4)- أ)- أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة $x_0=1$.

بـ)- لتكن الدالة h المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بـ : $h(x)=xLnx-x+1$

- ادرس تغيرات الدالة h ثم شكل جدول تغيراتها ، استنتج إشارة $h(x)$ على المجال $]0,+\infty[$.

- ادرس وضعية المماس (T) بالنسبة للمنحنى (C_f) . أنشئ (T) ، (Δ) و (C_f).

II)- 1)- ليكن التكاملين : $I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(xLnx)dx$ و $J=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x+1-xLnx)dx$

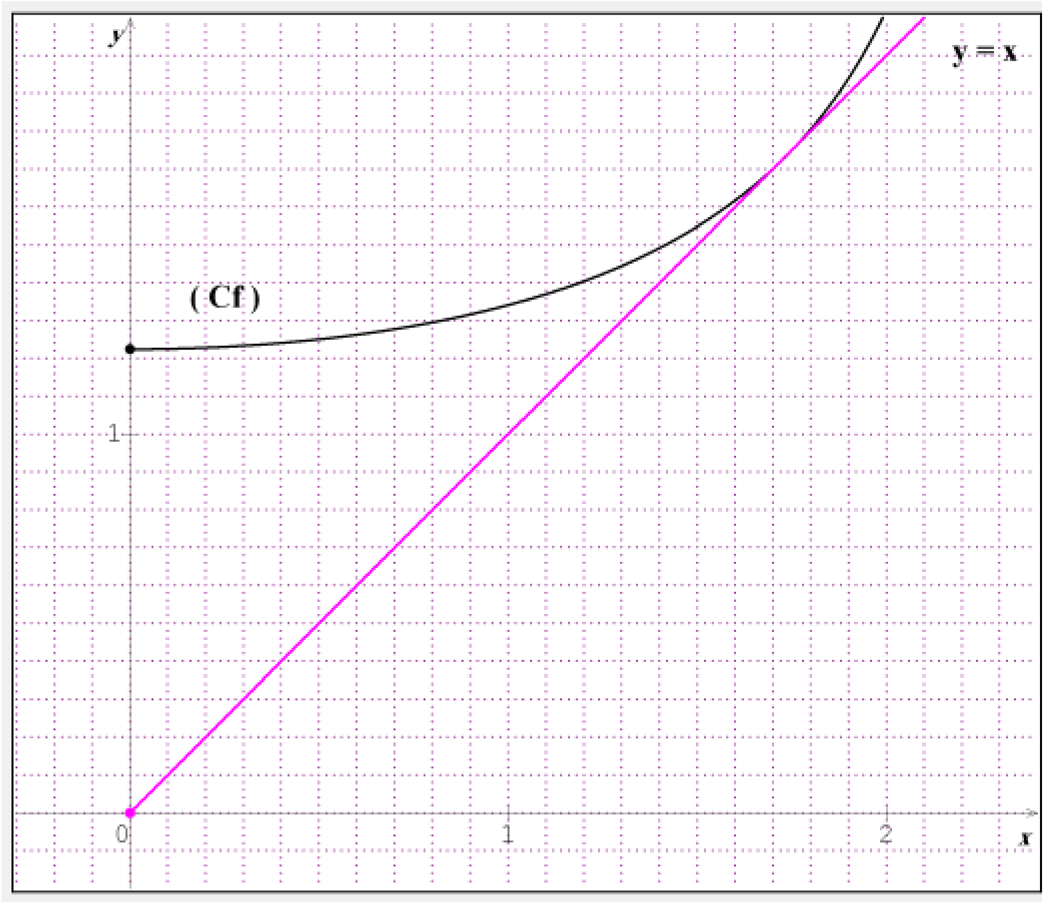
باستعمال التكامل بالتجزئة أحسب I ، ثم استنتج القيمة المضبوطة لـ J .

2)- أ)- برهن أنه إذا كان $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ فإن : $2x\le f(x)\le x+1-xLnx$.

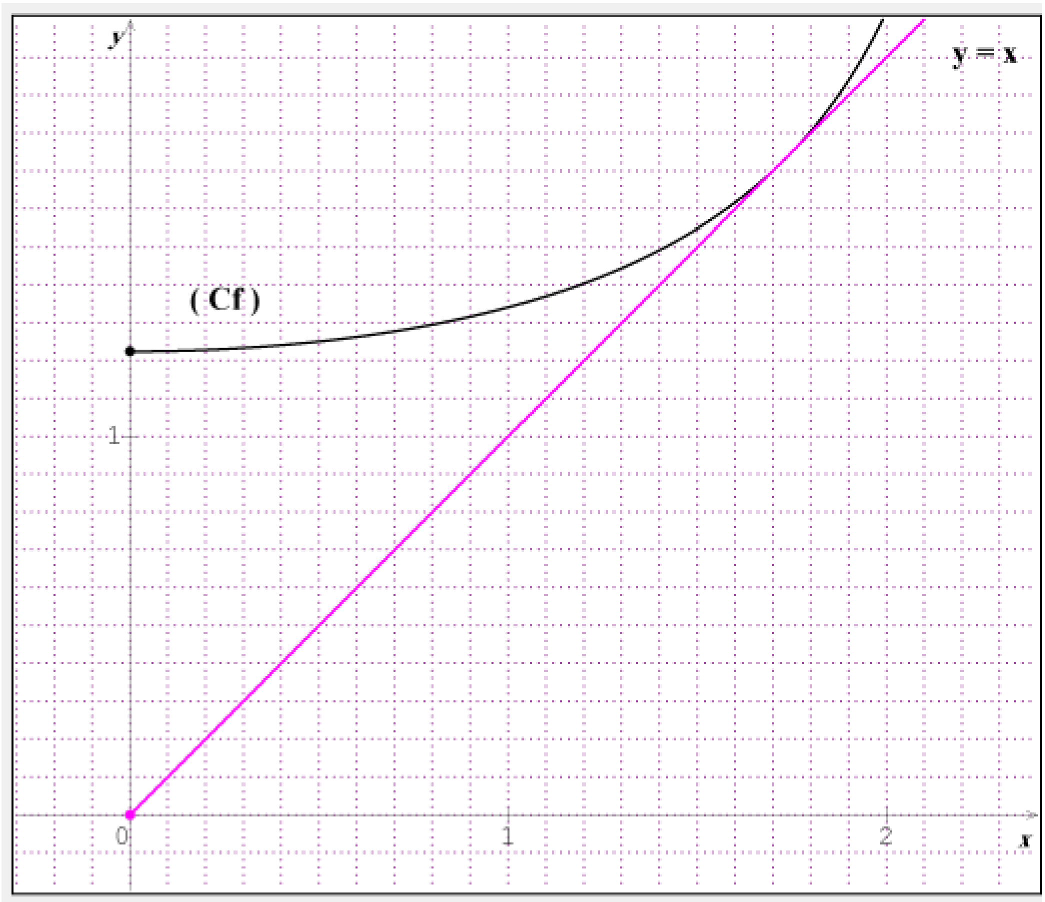
بـ)- نسمي S مساحة الحيز المستوي المحدد بـ (C_f) و محور الفواصل و المستقيمان التي معادلتها :

$x=\dfrac{1}{2}$ و $x=1$. برهن أن : $\dfrac{3}{4}\le S\le\dfrac{17}{16}-\dfrac{Ln2}{8}$.

الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الإسم واللقب : ....



الوثيقة المرفقة : التمرين الثاني الإسم واللقب : ....



الإجابــة النموذجية + سلــم التنقيط :

التمرين الأول :(05 نقاط)

1)- لدينا : $U_7 = q^3U_4$ ، $LnU_7 - LnU_4 = Ln\left(\frac{U_7}{U_4}\right) = Ln\left(\frac{q^3U_4}{U_4}\right) = Lnq^3 = 3Lnq$ ومنه :

$$LnU_7 - LnU_4 = Ln27 = Ln3^3 = 3Ln3$$

أي أن $3Lnq = 3Ln3$: $q = 3$ ....(0.5ن)

- لدينا : $U_3 = q^3U_0$ ، $U_5 = q^5U_0$ ، $6LnU_0 + LnU_3 + LnU_5 = 16Ln\sqrt{6}$ معناه :

$$Ln\left(U_0^6 \times q^3U_0 \times q^5U_0\right) = 8Ln6$$
$$Ln\left(U_0^8 \times q^8\right) = 8Ln\left(3U_0\right) = 8Ln6$$
$$3U_0 = 6$$

ومنه: $U_0 = 2$ ....(0.5ن)

2)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_n = U_0 \times q^n = 2\times 3^n$ . ...(0.25ن)

3)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $S_n = \frac{U_0}{1-q}\left(1-q^{n+1}\right) = \frac{2}{1-3}\left(1-3^{n+1}\right) = 3^{n+1}-1$ ....(0.25ن)

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: ومنه :

$$S'_n = Ln\left(U_0 \times U_1 \times ....\times U_n\right)$$
$$S'_n = Ln\left[\left(U_0\right)\left(U_0\times\left(\frac{3}{4}\right)\right)\left(U_0\times\left(\frac{3}{4}\right)^2\right).....\left(U_0\times\left(\frac{3}{4}\right)^n\right)\right]$$
$$S'_n = Ln\left[U_0^{\,n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{1+2+.....+n}\right] = Ln\left[2^{n+1}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = Ln\left[2^{n+1}\times\frac{3^{\frac{n(n+1)}{2}}}{2^{n(n+1)}}\right]$$

$S'_n = Ln\left[2^{1-n^2}\times 3^{\frac{n(n+1)}{2}}\right] = (1-n^2)Ln2 + \left(\frac{n^2+n}{2}\right)Ln3$ ....(0.5ن)

4)- أ)- $3^0 \equiv 1[10]$ ، $3^1 \equiv 3[10]$ ، $3^2 \equiv 9[10]$ ، $3^3 \equiv 7[10]$ ، $3^4 \equiv 1[10]$ ....(0.5ن)

$n =$	$4k$	$4k+1$	$4k+2$	$4k+3$	$k \in \mathbb{N}$
$3^n \equiv$	1	3	9	7	$[10]$

ب)- $2023 \equiv 3[10]$

$$\begin{cases} 299 \equiv 9[10] \\ 299 \equiv 3^2[10] \\ 299^{2n+3} \equiv 3^{4n+6}[10] \\ 299^{2n+3} \equiv 3^{4(n+1)+2}[10] \end{cases}$$

ومنه : $-2\times 299^{2n+3} \equiv (-2\times 9)[10]$ ، أي أن : $-2\times 299^{2n+3} \equiv 2[10]$

$\left(S_n+1\right)^{1444} = 3^{1444n+1444} = 3^{4(361n+361)}$ ومنه: $\left(S_n+1\right)^{1444} \equiv 1[10]$.

أي أن: $A_n \equiv (1+2-3)[10]$: $A_n \equiv 0[10]$. ومنه : باقي قسمة A_n على 10 هو 0 . ...(0.5ن)

5)- أ)- $9^n = 3^{2n}$ ، $7 \equiv -3[10]$ ، $7^{2n+1} \equiv (-3)^{2n+1}[10]$ ، $7^{2n+1} \equiv -3^{2n+1}[10]$ (لأن $2n+1$ فردي). ومنه :

أي أن :
$$(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv (3n+4)3^{2n} - 3^{2n+1}[10]$$
$$(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+4-3)[10]$$

$(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 3^{2n}(3n+1)[10]$ ....(0.5ن)

بـ)- $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1}$ مضاعف للعدد 10 معناه : $(3n+4)\times 9^n + 7^{2n+1} \equiv 0[10]$ و منه :

$3^{2n}(3n+1) \equiv 0[10]$ ، $(3n+1) \equiv 0[10]$ (لأن ليس ضاعف للعدد 10)

$3n \equiv -1[10]$ ، $3n \equiv 9[10]$ ، $n \equiv 3[10]$ و منه : $n = 10k + 3 \ (k \in \mathbb{N})$ . ...(0.5ن)

6)-
$$N = \overline{x222xxx} = x + 3x + 3^2x + 2\times 3^3 + 2\times 3^4 + +2\times 3^5 + 3^6 x$$
$$N = 742x + 702 \quad (0 \le x \prec 3)$$

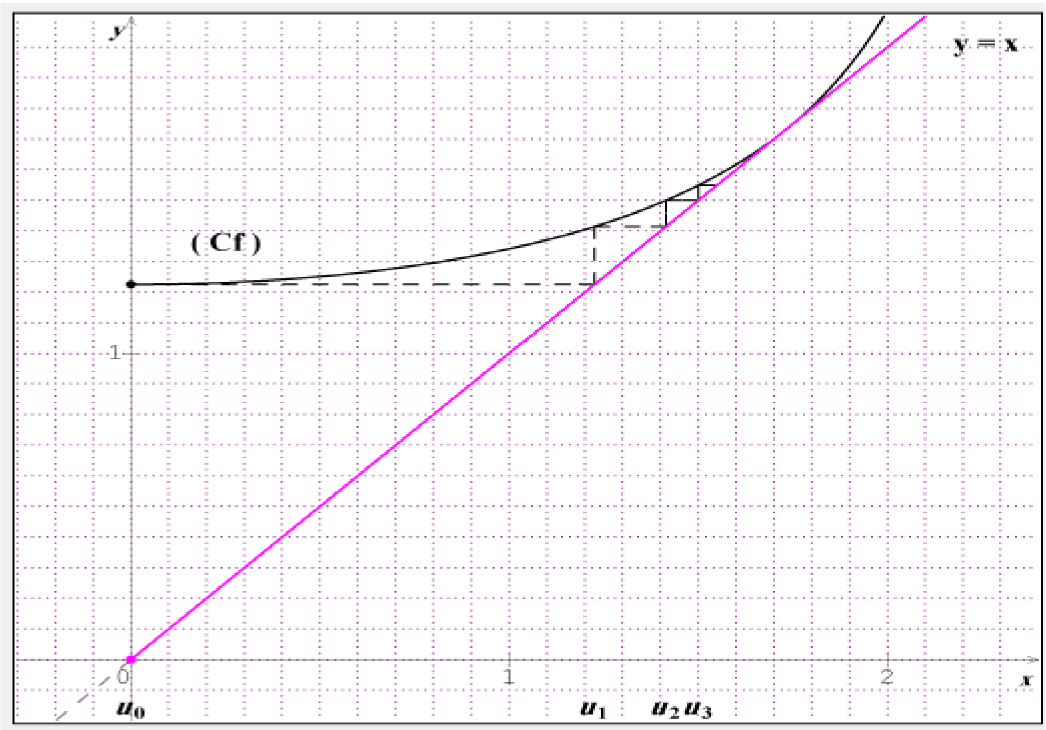
و منه :
$$N = \overline{4x3y} = y + 3\times 7 + 49x + 4\times 7^3$$
$$N = y + 49x + 1393 \quad (0 \le y \prec 7)$$

$742x + 702 = y + 49x + 1393$ ، $693x - y = 691$ $x = 0 : y = -691$ مرفوض. $x = 2 : y = 695$ مرفوض

$x = 1$ ، $y = 2$ - ....$N = 2 + 49 + 1393 = 1444$ ....(0.75ن)(0.25ن)

التمرين الثاني: (04 نقاط)

1)- أ)- تمثيل الأربع حدود الأولى للمتتالية (U_n) : ....(0.25ن)



بـ)- (U_n) حدود متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ ، ومتقاربة . ...(0.25ن)

جـ)-البرهان بالتراجع أنه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le \sqrt{3}$. $0 \le U_n \le \sqrt{3}$................$P(n)$

من أجل $n=0$: $U_0 = 0$ ، $0 \le U_0 \le \sqrt{3}$ ومنه : $P(0)$ محققة .

نفرض صحة $P(n)$: $0 \le U_0 \le \sqrt{3}$ و نبرهن صحة $P(n+1)$: $0 \le U_{n+1} \le \sqrt{3}$.

لدينا : $0 \le U_0 \le \sqrt{3}$ ، بما أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $\left[0,\sqrt{3}\right]$ فإن : $f(0) \le f(U_n) \le f(\sqrt{3})$

$$0 \le \frac{\sqrt{6}}{2} \le U_{n+1} \le \sqrt{3}$$

ومنه : $P(n+1)$ محققة . من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $0 \le U_n \le \sqrt{3}$..(0.5ن)

د)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$:

$$U_{n+1} - U_n = \frac{3}{\sqrt{6-U_n^2}} - U_n = \frac{3 - U_n\sqrt{6-U_n^2}}{\sqrt{6-U_n^2}} = \frac{\left(3 - U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{9 - U_n^2\left(6 \quad U_n^2\right)}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}} = \frac{9 - 6U_n^2 + U_n^4}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}}$$

$$U_{n+1} - U_n = \frac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}}$$

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $U_{n+1} - U_n = \frac{\left(U_n^2 - 3\right)^2}{\left(3 + U_n\sqrt{6-U_n^2}\right)\sqrt{6-U_n^2}} \ge 0$ ومنه : (U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.(0.25ن)(0.25ن)

(U_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بـ : $\sqrt{3}$ فهي متقاربة . ...(0.25ن)

$\lim_{n \to +\infty} U_n = l$ ، $\left(0 \le l \le \sqrt{3}\right)$ $l = \frac{3}{\sqrt{6-l^2}}$ ، $l\sqrt{6-l^2} = 3$ ، $l^2\left(6-l^2\right) = 9$ ، $\left(l^2-3\right)^2 = 0$ ومنه :

$l = \sqrt{3}$ أو $l = -\sqrt{3}$ مرفوضة لأن : $0 \le l \le \sqrt{3}$.. .. . ..(0.25ن)

2)- أ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_{n+1} - V_n = \frac{U_{n+1}^2}{3 - U_{n+1}^2} - V_n = \frac{\frac{9}{6-U_n^2}}{3 - \frac{9}{6-U_n^2}} - V_n$

$V_{n+1} - V_n = \frac{3 - U_n^2}{3 - U_n^2}$ $= \frac{3}{3-U_n^2} - \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$ $= \frac{9}{9-3U_n^2} - \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$ $V_{n+1} - V_n$ ومنه : $V_{n+1} - V_n = 1$

(V_n) متتالية حسابية أساسها $r=1$، وحدها الأول $V_0 = 0$ ....(0.25ن)(0.25ن) (0.25ن)

بـ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = n$ ....(0.25ن)

من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $V_n = \frac{U_n^2}{3-U_n^2}$ ، $V_n\left(3-U_n^2\right)=U_n^2$ ، $3V_n - V_n \times U_n^2 = U_n^2$ $U_n^2\left(1+V_n\right)=3V_n$

، $U_n^2 = \frac{3V_n}{1+V_n}$ ومنه : $U_n = \sqrt{\frac{3V_n}{1+V_n}}$ أو $U_n = -\sqrt{\frac{3V_n}{1+V_n}}$ مرفوضة لأن $U_n \geq 0$.

$U_n = \sqrt{\frac{3n}{1+n}}$ ، $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3n}{1+n}=3$ ومنه : $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \sqrt{3}$.......................................(0.5ن)(0.25ن)

جـ)- من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $P_n = U_1^2 \times U_2^2 \times \ldots\ldots \times U_n^2$ $P_n = \frac{3}{\cancel{2}}\times\left(\frac{3\times\cancel{2}}{\cancel{3}}\right)\times\left(\frac{3\times\cancel{3}}{\cancel{4}}\right)\times\ldots\ldots\times\left(\frac{3\times\cancel{n}}{n+1}\right)$

ومنه : $P_n = \frac{3^n}{1+n}$ ....(0.25ن)

التمرين الثالث :(05 نقاط)

I)-1)- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ ، (C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا معادلته: $y=0$ بجوار $+\infty$ . ...(0.25ن)(0.25ن)

2)- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x-1}\left(e^{\frac{x+1}{2}}-1\right)$ ، ومنه : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x-1}=+\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty}\left(e^{\frac{x+1}{2}}-1\right)=-1\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$... ... ...(0.25ن)

3)- f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$: $f'(x) = \frac{-1}{2}e^{\frac{x+1}{2}} + e^{-x-1} = e^{-x-1}\left(\frac{-1}{2}e^{\frac{x+1}{2}}+1\right)$..............................(0.25ن)

$f'(x)=0$ يكافئ : $x = -1+2Ln2$

f متزايدة تماما على المجال $\left]-\infty,-1+2Ln2\right]$ ، f متناقصة تماما على المجال $\left[-1+2Ln2,+\infty\right[$.... ....(0.25ن)

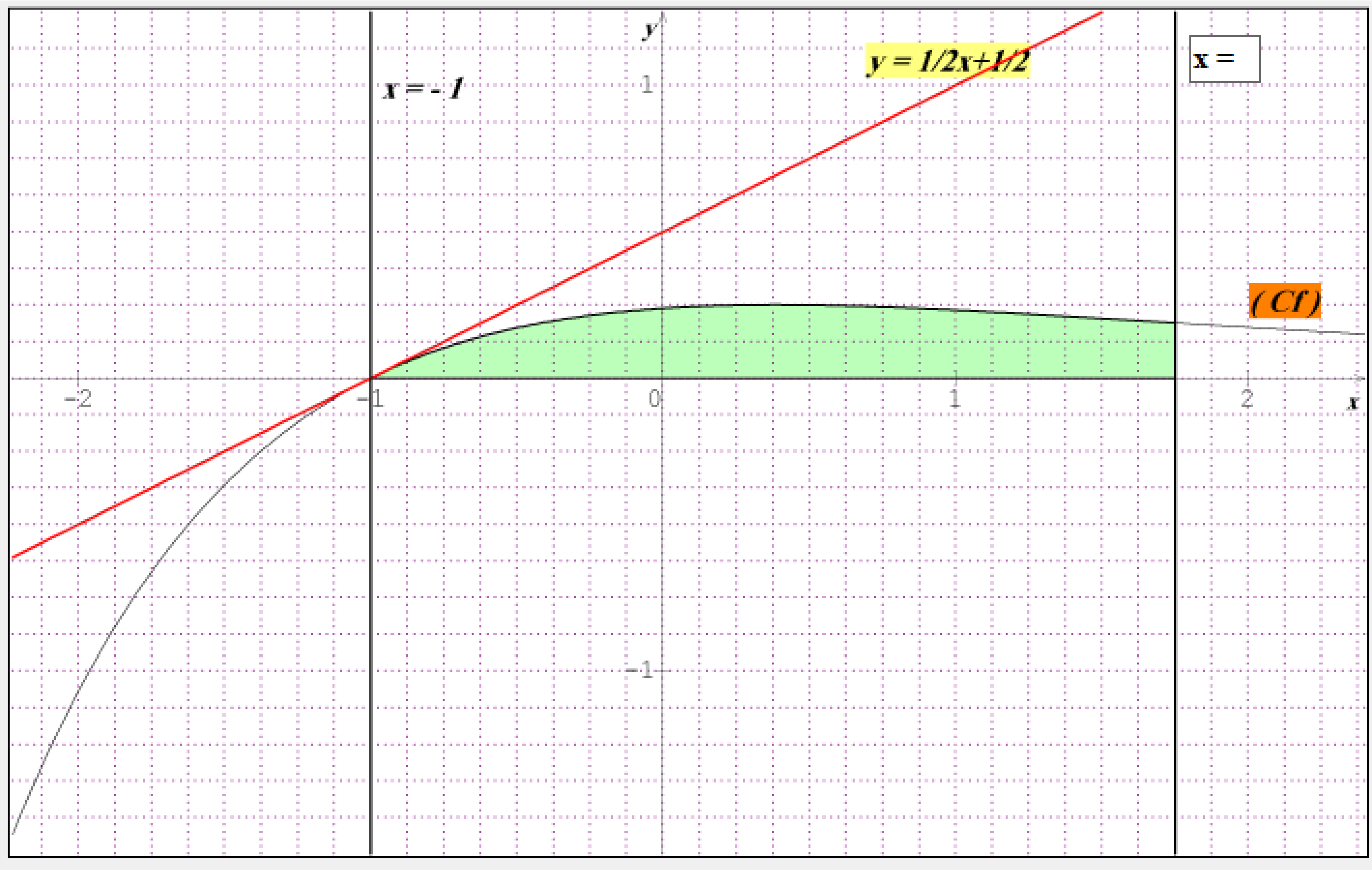
- جدول تغيرات الدالة f : ....(0.5ن)

x	$-\infty$	$-1+2Ln2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$	$-\infty$ ↗	$\frac{1}{4}$	↘ 0

4)- $(T): y = f'(-1)(x+1)+f(-1)$ ، $f'(-1)=\frac{1}{2}$ ،

$f(-1)=0$ ، $(T): y = \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ ....(0.25ن)

5)- إنشاء (C_f) : ....(0.5ن)



6)- حلول المعادلة $f(x)=f(m)x+f(m)$ هي فواصل نقاط تقاطع (C_f) مع المستقيم الذي معادلته $(\Delta_m): y=f(m)x+f(m)$.

- $f(m)\in\left]-\infty,0\right]$ أي $m\in\left]-\infty,-1\right]$: للمعادلة حلا وحيدا .

- $f(m)\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$ أي $m\in\left]-1,+\infty\right[$: للمعادلة حلين . ...(0.5ن)

- $f(m)=\frac{1}{2}$: المعادلة لا تقبل حلول

7)- $\int_{-1}^{\lambda} f(x)dx=\left[-2e^{-\frac{x+1}{2}}+e^{-x-1}\right]_{-1}^{\lambda}=-2e^{-\frac{\lambda+1}{2}}+e^{-\lambda-1}+1$

$S(\lambda)=\left(-2e^{-\frac{\lambda+1}{2}}+e^{-\lambda-1}+1\right)16cm^2$ ....(0.5ن)

$\lim_{\lambda\to+\infty} S(\lambda)=16$ ....(0.25ن)

II)-1)- من أجل كل x من $\mathbb{R}$: $g(x)=e^{-\frac{x+1}{2}}$ ، $g^{(n)}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ ....$P(n)$

من أجل $n=1$ $g'(x)=\frac{-1}{2}e^{-\frac{x+1}{2}}$ ومنه : $P(1)$ محققة .

نفرض صحة $P(n)$: $g^{(n)}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ ، نبرهن على صحة $P(n+1)$: $g^{(n+1)}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{x+1}{2}}$.

$g^{(n+1)}(x)=\left(g^{(n)}(x)\right)'=\left(\frac{-1}{2}\right)^n\left(\frac{-1}{2}\right)e^{-\frac{x+1}{2}}=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1} e^{-\frac{x+1}{2}}$ ومنه : $P(n+1)$ محققة .

ومنه : من أجل كل n من $\mathbb{N}^*$: $g^{(n)}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{x+1}{2}}$ ....(0.5ن)

2- نضع : $U_n=g^{(n)}(0)=\left(\frac{-1}{2}\right)^n e^{-\frac{1}{2}}$ ، (U_n) متتالية هندسية أساسها $q=\frac{-1}{2}$ و $U_1=\frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{2}$ حدها الأول .

$$S_n=\frac{-\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}}{1+\frac{1}{2}}\left[1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]=\frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3}\left[1-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right]=\frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3}+\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{3}\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$ ....(0.5ن)

$\lim_{n\to+\infty} S_n=\frac{-e^{-\frac{1}{2}}}{3}$ ....(0.25ن)

التمرين الرابع: (06 نقاط)

I(-1-1) $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left[1+\frac{1}{x-xLnx}\right]$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(x-xLnx\right)=0^+$ ومنه : $\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ ....(0.25ن)

الدالة f غير قابلة للإشتقاق عند النقطة ذات فاصلة 0 . (C_f) يقبل نصف مماس عمودي عند النقطة O ....(0.25ن)(0.25ن)

2-(أ- $\lim_{x\xrightarrow{<}e} f(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\xrightarrow{>}e} f(x)=-\infty$. (C_f) يقبل مستقيما مقاربا عموديا معادلته $x=e$ ....(0.5ن) (0.25ن)

ب- $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-Lnx}\right)=0$ ومنه : $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ ....(0.25ن)

ب- $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-y\right]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{1-Lnx}\right)=0$ ومنه : (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا (Δ) معادلته : بجوار $+\infty$ ....(0.25ن)

$f(x)-y=\frac{1}{1-Lnx}$ .... (0.25ن)

x	0 $\quad$ e	$+\infty$
$f(x)-y$	+	-
الوضعية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) تحت (Δ)

3- f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,e[\cup]e,+\infty[$: $f'(x)=1-\frac{-\frac{1}{x}}{(1-Lnx)^2}=1+\frac{1}{x(1-Lnx)^2}$ ....(0.25ن)

$f'(x) \succ 0$ ومنه : f متزايدة تماما على المجالين : $]0,e[$ ، $]e,+\infty[$ . ... (0.25ن)

- جدول تغيرات الدالة f : .... (0.25ن)

x	0		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	‖	+	
$f(x)$	0	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

4)- أ)- $(T): y = f'(1)(x-1)+f(1)$ ، $f'(1)=2$ ، $f(1)=0$ ، $(T): y = 2x$............................ (0.25ن)

بـ)- h قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$: $h'(x) = Lnx + \frac{1}{x} \times x - 1 = Lnx$ .... (0.25ن)

h متناقصة تماما على المجال $]0,1]$ ، h متزايدة تماما على المجال $[1,+\infty[$ . ... (0.25ن)

جدول تغيرات الدالة h : .... (0.25ن)

x	0		1		$+\infty$
$h'(x)$	‖	-	0	+	
$h(x)$	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

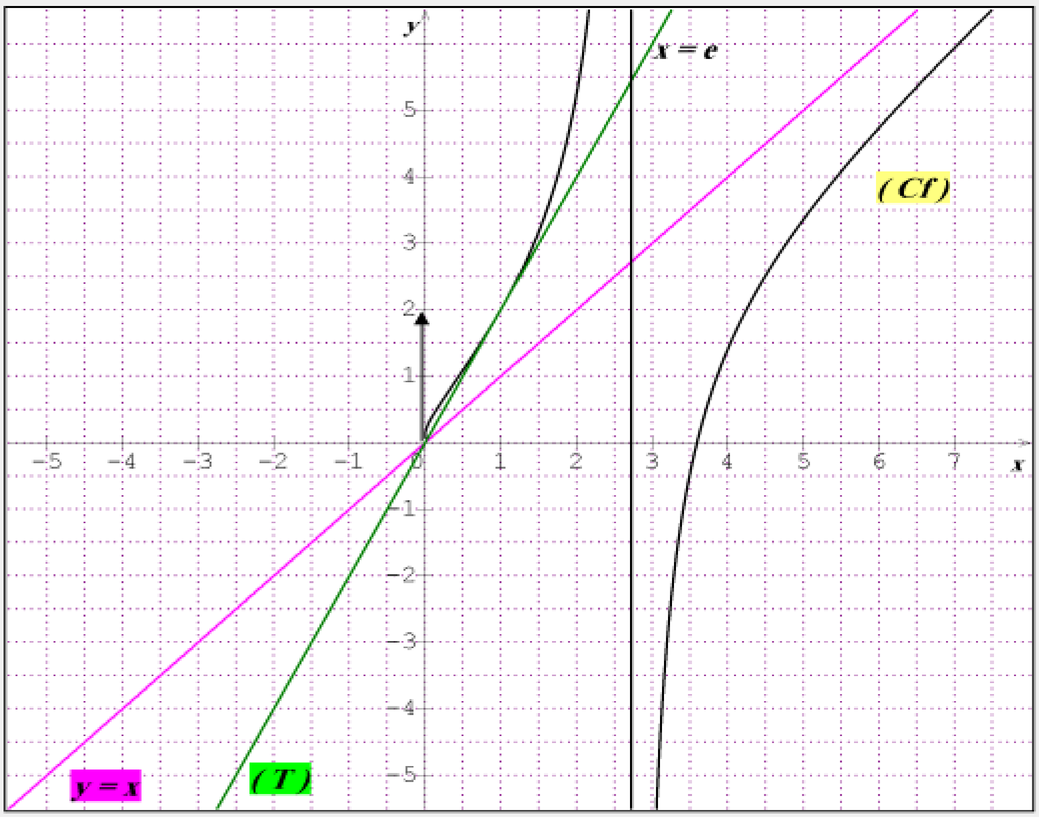
من أجل كل x من $]0,+\infty[$: $h(x) \geq 0$ $]0,+\infty[$ بالنسبة (0 قيمة حدية صغرى) .... (0.25ن)

وضعية (C_f) بالنسبة للمماس (T) : $f(x) - y = x + \frac{1}{1-Lnx} - 2x = \frac{h(x)}{1-Lnx}$.......... .... (0.25ن)

x	0		1		e		$+\infty$
$h(x)$	‖	+	0	+		+	
$1-Lnx$	‖	+		+	0	-	
$f(x)-y$	‖	+		+	‖	-	
الوضعية	‖	(C_f) فوق (T)		(C_f) فوق (T)	‖	(C_f) تحت (T)	

$(C_f)\cap(D) = \{A(1,2)\}$

إنشاء (T) ، (Δ) و (C_f): .... (0.5ن)



II)- 1)- حساب I : $u(x)=\dfrac{x^2}{2}$ ، $u'(x)=x$ ، $v'(x)=\dfrac{1}{x}$ ، $v(x)=Lnx$ ،

$$I=\left[\frac{x^2}{2}\times Lnx\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(\frac{x^2}{2}\times\frac{1}{x}\right)dx=\frac{Ln2}{8}-\left[\frac{x^2}{4}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$\boxed{I=\dfrac{Ln2}{8}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{-3}{16}+\dfrac{Ln2}{8}}$ ....(0.25ن)

$J=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x+1)dx-I=\left[\dfrac{x^2}{2}+x\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-I$ ، $J=\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{Ln2}{8}$ ومنه : $J=\dfrac{17}{16}-\dfrac{Ln2}{8}$ ....(0.25ن)

2)- أ)- لدينا : $f(x)\geq 2x$ .... (1) ((C_f) فوق (T) على المجال $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$)

$f(x)-x-1+xLnx=\dfrac{(1+x-xLnx)Lnx}{1-Lnx}$ على المجال $\left[\dfrac{1}{2},1\right]$: $Lnx\leq 0$ ، $1-Lnx\succ 0$ ، $1+x-xLnx\succ 0$ ومنه :

$f(x)\leq x+1-xLnx$ ....(2)

من (1) و(2) : $x\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$: $\boxed{2x\leq f(x)\leq x+1-xLnx}$ ....(0.25ن)

بـ)- $\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xdx\leq\int_{\frac{1}{2}}^{1}f(x)dx\leq\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x+1-xLnx)dx$ ، $\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xdx\leq S\leq J$ ، $\int_{\frac{1}{2}}^{1}2xdx=\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=1-\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$ ومنه :

$\boxed{\dfrac{3}{4}\leq S\leq\dfrac{17}{16}-\dfrac{Ln2}{8}}$ ....(0.25ن)