الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية غليزان

ثانوية واد الجمعة — السنة الدراسية:

المستوى:ثالثة علوم تجريبية — اختبار الثاني في مادة: الرياضيات — المدة :

عالج موضوع من الموضوعين

الموضوع 01:

التمرين الأول (04.5 نقاط) :

لكل سؤال ثلاث إجابات ، إجابة واحدة منها صحيحة ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير

الرقم	السؤال	الإجابة أ	الإجابة ب	الإجابة ج
01	حل المعادلة التفاضلية $y''=-e^{x}+2$ الذي يحقق الشرطان $y(0)=1\ ;\ y'(0)=1$ هو :	$y=x^2-e^x+2x+2$	$y=2e^x-x$	$y=-2x+e^x$
02	إذا كانت الأعداد $1-e^{-2}\ ;\ e^{-2}-e^{-4}$ و a تشكل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإن:	$a=1-e^{-4}$	$a=e^{-2}-e^{-6}$	$a=e^{-4}-e^{-6}$
03	نعتبر زهرة نرد مزيفة وجوهها مرقمة من 1 إلى 6 حيث $p(2)=p(1)=k$ و $p(4)=p(3)=2k$ و $p(6)=p(5)=3k$ فإن	$p(3)=\frac{1}{12}$	$p(3)=\frac{1}{6}$	$p(3)=\frac{1}{5}$

التمرين الثاني : (13.5نقاط)

I) لتكن الدالة العددية f المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة : $f(x)=1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^{x}+1}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$ مع $\|\vec{i}\|=2cm$

1)أ) تحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^{x}+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب) استنتج أن الدالة f فردية ثم أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$

2) أ)بين انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^{x}-1}{e^{x}+1}\right)^{2}$

ب) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

ج) استنتج انه من اجل كل عدد حقيقي x من المجال $[0;+\infty[$ فان : $1-\frac{2}{e^{x}+1}\le\frac{1}{2}x$

3)أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

ب) استنتج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته

4) أرسم المستقيم (d) ذو المعادلة $y=1-\frac{1}{2}x$ و المستقيم (Δ) ثم أنشئ المنحنى (C_f)

5) أ) بين انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون : $\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$

ب) أحسب بال cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$ المحصور بين المنحنى (C_f) والمستقيم (d) والمستقيمين ذو المعادلتين : $x=0$ و $x=\lambda$ ، حيث λ عددا حقيقيا موجبا تماما، ثم أحسب $A(\lambda)$ لما λ يؤول إلى $+\infty$

II) نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأوّل $u_0=1$ ومن اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=1-\frac{2}{e^{u_n}+1}$.

1) أثبت بالتراجع أنّه من أجل كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n>0$

2) أ) تحقق ، باستعمال نتيجة السؤال 3.ج) ، من أنّ : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$.

ب) استنتج أنّ المتتالية (u_n) متناقصة . ماذا يمكن القول عن تقاربها ؟

3) بين انه من كل عدد طبيعي n فإنّ : $u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ ، ثم أحسب $\lim\limits_{x \to +\infty} u_n$

الموضوع 02 :

التمرين الأول (08 نقاط):

(u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ كما يلي : $u_0 = 1 \;,\; u_1 = 2$ و $u_n = 2u_{n-1} + 3u_{n-2}$.

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي : $v_n = \alpha u_n + \beta u_{n-1}$ حيث $\beta;\alpha$ عددان حقيقيان غير منعدمان .

أ. أحسب u_2 و u_3

ب. أحسب $v_1\,;\, v_2$ و v_3 بدلالة α و β

ج. بيّن أنّه إذا كانت v_1 و v_2 و v_3 ثلاثة حدود متتابعة من متتالية هندسية فإنّ : $3\alpha^2 - 2\alpha\beta - \beta^2 = 0$

2. نضع $\beta = \alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب.استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n + u_{n-1} = 3^n$

3. نضع $\beta = -3\alpha$:

أ. برهن أن (v_n) متتالية هندسية يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب.استنتج أنّه من أجل كل عدد n من $\mathbb{N}^*$: $u_n - 3u_{n-1} = (-1)^n$

التمرين الثاني :(12نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $I =]0;+\infty[$ بـ: $f(x) = -x + 1 + \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في معلم متعامد $(O;\vec{i};\vec{j})$ ، $\left(\|\vec{j}\| = 1\,cm \;,\|\vec{i}\| = 2cm\right)$

$I)$ g هي الدالة المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $g(x) = -\left[2\left(x\sqrt{x} - 1\right) + \ln x\right]$

1) احسب $g(1)$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ في الحالتين $0 < x < 1$ و $x > 1$.

2) احسب نهايتي الدالة f عند $0 \,,\, +\infty$ ، ثم استنتج المستقيمين المقاربين للمنحني (C_f) .

3) احسب $f'(x)$ واستنتج أن إشارتها من نفس إشارة الدالة g

4) استنتج اتجاه تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها .

5) أرسم (C_f) والمستقيمين المقاربين

$II)$ 1. باستعمال تكامل التجزئة ، عين دالة أصلية للدالة $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

1) احسب $S(\alpha)$ مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) والمستقيمات التي معادلاتها : $y = -x + 1 \;,\; x = 1 \;,\; x = \alpha$
بحيث $0 < \alpha < 1$

2) احسب نهاية $S(\alpha)$ لما يؤول α إلى الصفر ، أعط تفسيرا بيانيا لهذه النهاية

$III)$ (u_n) متتالية معرفة بحدها الأول u_0 حيث : $u_0 \in [1;2]$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$

1) برهن أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $[1;2]$ لدينا : $0 \leq \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \leq 1$

2) برهن بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_n \in [1;2]$

3) بملاحظة أن من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} = f(u_n) + u_n$ ، عين اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

4) برهن أن المتتالية (u_n) متقاربة ، نسمي العدد l نهايتها

5) احسب بدقة قيمة l

الأستاذة : ج.لام

المستوى:ثالثة علوم تجريبية | الحل النموذجي الاختبار الثاني | الأستاذة : جلام

الموضوع 01:

التمرين الأول

1 - الإجابة ج)

دالة أصلية للدالة $x\mapsto -e^x+2$ هي الدالة $x\mapsto -e^x+2x+c_1$ و

دالة أصلية للدالة $x\mapsto -e^x+2x+c_1$ هي الدالة $x\mapsto -e^x+x^2+c_1x+c_2$ بالتالي فإن حلول المعادلة $y=-e^x+2$ هي الدوال y حيث: $y=-e^x+x^2+c_1x+c_2$ مع c_1 و c_2 عددان حقيقيان ثابتان.

ولدينا $y(0)=1$ ومنه $c_2=2$ ولدينا $y'(0)=1$ ومنه $c_1=2$ إذن

$$y=x^2-e^x+2x+2$$

2 - الإجابة ج)

بما أن الأعداد $a;e^{-2}-e^{-4};1-e^{-2}$ تشكل حدود متعاقبة لمتتالية هندسية فإن $\left(1-e^{-2}\right)\times a=\left(e^{-2}-e^{-4}\right)^2$ ومنه

$$a=\frac{\left(e^{-2}-e^{-4}\right)^2}{\left(1-e^{-2}\right)}$$ إذن $a=e^{-4}-e^{-6}$

3 - الإجابة ب)

لدينا $p(1)+p(2)+p(3)+p(4)+p(5)+p(6)=1$ أي $k+k+2k+2k+3k+3k=1$ ومنه $12k=1$ إذن $k=\frac{1}{12}$

ولدينا $p(3)=2k=2\times\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$ ومنه $p(3)=\frac{1}{6}$

التمرين الثاني:

1)أ- التحقق من أن $\frac{1}{e^{-x}+1}=1-\frac{1}{e^x+1}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$:

$$\frac{1}{e^{-x}+1}=\frac{e^x}{e^x\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=1-\frac{e^x}{e^x+1}$$

ب- استنتاج أن الدالة f فردية

لكل x من $\mathbb{R}$ لدينا $-x$ من $\mathbb{R}$ أي $\mathbb{R}$ متناظرة بالنسبة إلى 0)

من أجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا:

$$f(-x)=1-\frac{1}{2}(-x)-\frac{2}{e^{-x}+1}$$

$$=1+\frac{1}{2}x-2\left(1-\frac{1}{e^x+1}\right)=-1+\frac{1}{2}x+\frac{2}{e^x+1}$$

$$=-\left(1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\right)=-f(x)$$

حساب النهايتين : $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)$

$\lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty$ و $\lim_{x\to-\infty}f(x)=+\infty$

2) أ)تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x فان : $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$

الدالة f معرفة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ودالتها المشتقة هي :

$$f'(x)=-\frac{1}{2}+\frac{2e^x}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{-\left(e^x+1\right)^2+4e^x}{2\left(e^x+1\right)^2}=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}+2e^x+1-4e^x}{\left(e^x+1\right)^2}\right)$$

$$=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^{2x}-2e^x+1}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{\left(e^x-1\right)^2}{\left(e^x+1\right)^2}\right)=\frac{-1}{2}\left(\frac{e^x-1}{e^x+1}\right)^2$$

2) ب) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها :

من أجل كل عدد حقيقي x لدينا: $f'(x)\le 0$ وعليه الدالة f متناقصة تماما على $\mathbb{R}$

جدول تغيراتها:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$-$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$

2) ج) استنتاج انه من اجل كل x من $\mathbb{R}^+$ فان : $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

نلاحظ من جدول تغيرات الدالة f انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$ لدينا: $f(x)\le 0$ أي $1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}\le 0$ وعليه: $1-\frac{2}{e^x+1}\le\frac{1}{2}x$

3)أ- حساب $\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]$ وتفسر النتيجة هندسيا :

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-1+\frac{1}{2}x\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[-\frac{2}{e^x+1}\right]=0$$

إذن المستقيم ذو المعادلة : $y=1-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $+\infty$.

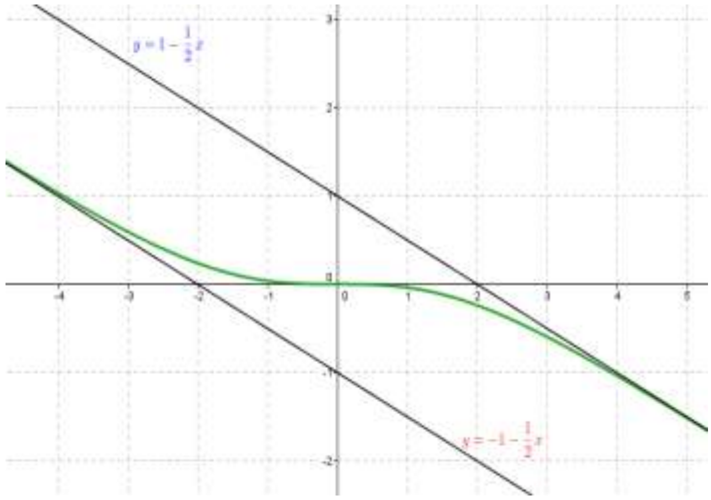
3) ب) استنتاج ان المنحنى (C_f) يقبل مستقيما مقاربا مائلا آخر (Δ) عند $-\infty$ يطلب تعيين معادلته :

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(-1-\frac{1}{2}x\right)\right]=\lim_{x\to-\infty}\left[1-\frac{1}{2}x-\frac{2}{e^x+1}+1+\frac{1}{2}x\right]$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\left[2-\frac{2}{e^{-x}+1}-2\right]=0$$

اذن المستقيم ذو المعادلة : $y=-1-\frac{1}{2}x$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

4) الرسم



5) أ) تبيان انه من اجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\frac{1}{e^{x}+1}=\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}$$

من اجل كل عدد حقيقي x لدينا : $\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}=\frac{e^{-x}\left(e^{x}\right)}{e^{x}\left(e^{-x}+1\right)}=\frac{1}{1+e^{x}}$

ب) حساب بال cm^2 مساحة الحيز المستوي $A(\lambda)$

لدينا :

$$A(\lambda)=\int_0^{\lambda}\left(1-\frac{1}{2}x-f(x)\right)dx=\int_0^{\lambda}\left(\frac{2}{e^{x}+1}\right)dx=$$

$$-2\int_0^{\lambda}\left(\frac{-e^{-x}}{e^{-x}+1}\right)dx=-2\left[\ln\left(e^{-x}+1\right)\right]_0^{\lambda}=-2\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)(ua)$$

لكن $ua=2\times2=4cm^2$ ومنه $A(\lambda)=-8\ln\left(\frac{e^{-\lambda}+1}{2}\right)cm^2$

حساب $A(\lambda)$ لما λ يؤول الى $+\infty$:

$$\lim_{\lambda\to+\infty}A(\lambda)=\lim_{\lambda\to+\infty}\left[-8\ln\left(\frac{\cancel{e^{-\lambda}}^{0}+1}{2}\right)\right]=8\ln 2\ cm^2$$

II) 1) اثبات بالتراجع انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n>0$

نسمي P_n الخاصية : $u_n>0$ ، P_0 صحيحة لان $u_0=1>0$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي: $u_n>0$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن: $u_{n+1}>0$

لدينا $u_n>0$ أي $e^{u_n}>1$ أي $e^{u_n}+1>2$ أي $\frac{1}{e^{u_n}+1}\le\frac{1}{2}$ أي

$\frac{2}{e^{u_n}+1}\le1$ أي $1-\frac{2}{e^{u_n}+1}>0$ أي $u_{n+1}>0$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي

2)أ)التحقق من ان : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$:

لدينا مما سبق السؤال 2)ج- انه من اجل كل عدد حقيقي x من $\mathbb{R}^+$

فان : $1-\frac{2}{e^{x}+1}\le\frac{1}{2}x$ إذن: $1-\frac{2}{e^{u_n}+1}\le\frac{1}{2}u_n$ ومنه $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

ب) استنتاج ان المتتالية (u_n) متناقصة :

لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$

اي $u_{n+1}-u_n\le\frac{1}{2}u_n-u_n$ ومنه $u_{n+1}-u_n\le-\frac{1}{2}u_n$ ولدينا : $u_n>0$

اذن $-\frac{1}{2}u_n<0$ وعليه $u_{n+1}-u_n\le0$

ينتج ان المتتالية (u_n) متناقصة

3) تبيان ان : $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$ نستعمل البرهان بالتراجع

نسمي P_n الخاصية : $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$,

P_0 صحيحة لان $u_0=1\le\left(\frac{1}{2}\right)^0=1$

نفرض ان P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي كيفي أي $u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$

ونبرهن أن P_{n+1} صحيحة أي نبرهن أن: $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

لدينا مما سبق2)أ) : $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n$ لكل n من $\mathbb{N}$ وفرضية التراجع

$u_n\le\left(\frac{1}{2}\right)^n$: $u_{n+1}\le\frac{1}{2}u_n\le\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ اذن $u_{n+1}\le\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

إذن P_{n+1} صحيحة ومنه نستنتج أن P_n صحيحة من أجل كل عدد طبيعي

حساب : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n$

بما انه من اجل كل n من $\mathbb{N}$ لدينا : $u_n>0$ و

$\lim\limits_{n\to+\infty}u_n\le\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ اذن $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=0$

الموضوع 02 :

التمرين الأول :

1. نعتبر (v_n) متتالية معرفة على $\mathbb{N}^*$ بما يلي :

$v_n=\alpha u_n+\beta u_{n-1}$ حيث $\alpha;\beta$ عددان حقيقيان غير منعدمان

أ. حساب الحدود : $u_2=7$; $u_3=20$.

ب. حساب الحدود : $v_1;v_2;v_3$ ، $v_1=2\alpha+\beta$ ،

$v_2=7\alpha+2\beta$ ، $v_3=20\alpha+7\beta$

جـ $v_1;v_2;v_3$ حدود متتابعة من متتالية هندسية معناه

$v_2^2=v_1\times v_3$ معناه $(7\alpha+2\beta)^2=(2\alpha+\beta)(20\alpha+7\beta)$

معناه $9\alpha^2-6\alpha\beta-3\beta^2=0$ معناه $3\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2=0$

2. نضع $\beta=\alpha$:

أ. لدينا $v_n=\alpha u_n+\alpha u_{n-1}$ معناه $v_n=\alpha(u_n+u_{n-1})\cdots(1)$

من أجل كل عدد طبيعي $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1}=\alpha(u_{n+1}+u_n)$$
$$=\alpha(2u_n+3u_{n-1}+u_n)$$
$$=\alpha(3u_n+3u_{n-1})$$
$$v_{n+1}=3v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها q=3 و حدها الأول $v_1=3\alpha$.

ب. لدينا : $v_n=v_1\times 3^{n-1}$ و منه $v_n=3\alpha\times 3^{n-1}$ معناه :

$v_n=\alpha\times 3^n\cdots\cdots(2)$ من (1)و(2) نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n+u_{n-1})=\alpha\times 3^n$ معناه $u_n+u_{n-1}=3^n$

3. نضع $\beta=-3\alpha$:

أ. إثبات أنّ (v_n) متتالية هندسية .

لدينا $v_n=\alpha u_n-3\alpha u_{n-1}\cdots\cdots(1)$

من أجل كل عدد طبيعي n من $\mathbb{N}^*$

$$v_{n+1}=\alpha(u_{n+1}-3u_n)$$
$$=\alpha(2u_n+3u_{n-1}-3u_n)$$
$$=\alpha(-u_n+3u_{n-1})$$
$$=-\alpha(u_n-3u_{n-1})$$
$$v_{n+1}=-v_n$$

و منه (v_n) متتالية هندسية أساسها $q=-1$ و حدها الأول $v_1=-\alpha$.

ب. لدينا $v_n=-\alpha(-1)^{n-1}$ و منه

$v_n=\alpha(-1)^n\cdots\cdots(2)$ من (1) و (2)نستنتج أنّ:

$\alpha(u_n-3u_{n-1})=\alpha(-1)^n$ و منه

$$u_n-3u_{n-1}=(-1)^n$$

التمرين الأول :

f معرفة على $I=]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$g(x)=-\left[2\left(x\sqrt{x}-1\right)+\ln x\right]$

1)حساب $g(1)$ **ثم استنتج إشارة** $g(x)$

$g(1)=0$ ، ولدينا من اجل $0<x<1$ فان $\ln x<0$ و

$x\sqrt{x}-1<0$ اذن $\left[(x\sqrt{x}-1)+\ln x\right]<0$ ومنه $g(x)>0$

من اجل $x>1$ فان $\ln x>0$ و $x\sqrt{x}-1>0$ اذن

$\left[(x\sqrt{x}-1)+\ln x\right]>0$ ومنه ينتج ان $g(x)<0$

2)حساب نهايتي الدالة f **عند** $+\infty$ **وعند** 0

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(-x+1+\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)=\lim_{y\to+\infty}\left(-y^2+1+\cancelto{0}{\frac{2\ln y}{y}}\right)=-\infty$$

بما ان $f(x)=-x+1+Q(x)$ مع $\lim_{x\to+\infty}Q(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$

فان المستقيم ذو المعادلة $y=-x+1$ مقارب مائل لـ(C_f) عند $+\infty$

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}f(x)=\lim_{x\xrightarrow{>}0}\left(\cancelto{0}{-x}+1+\frac{\cancelto{-\infty}{\ln x}}{\cancel{\sqrt{x}}}\right)=-\infty$$

اذن $x=0$ هي معادلة مستقيم مقارب لـ(C_f) **موازي لمحور التراتيب**

3)حساب $f'(x)$: f تقبل الاشتقاق على $]0;+\infty[$ ولدينا:

$$f'(x)=-1+\frac{1}{x\sqrt{x}}-\ln x\cdot\frac{1}{2x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{-2x\sqrt{x}+2-\ln x}{2x\sqrt{x}}=\frac{-\left[2(x\sqrt{x}-1)+\ln(x)\right]}{2x\sqrt{x}}$$
$$=\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة الدالة g

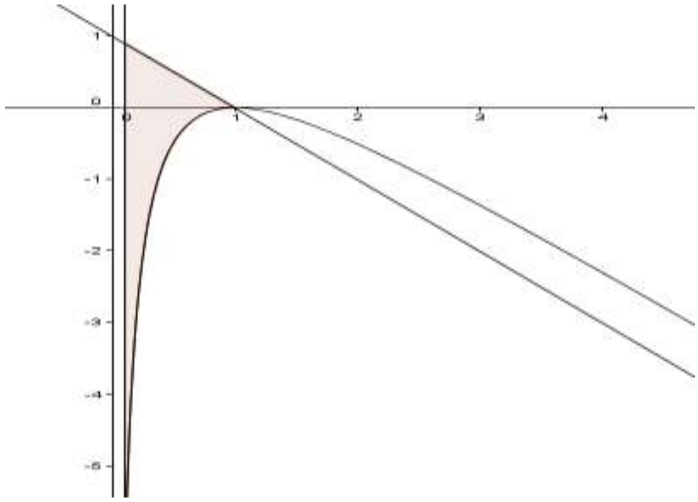
4) اتجاه تغيرات الدالة f **و جدول تغيراتها .**

لدينا على المجال $]0,1]$: $g(x)\geq0$ ومنه $f'(x)\geq0$ اذن الدالة f متزايدة تماما على $]0,1]$

وعلى المجال $[1;+\infty[$: $g(x)\leq0$ ومنه $f'(x)\leq0$ اذن الدالة f متناقصة تماما على $[1;+\infty[$ وبالتالي جدول تغيرات f هو :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

5)الرسم



$\left(II\right)$ 1)**تعيين دالة أصلية للدالة** $x \mapsto \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

$$\int \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \int \ln x \frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - \int \frac{2\sqrt{x}}{x}dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x\right] - 2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx$$

$$= \left[2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c\right] \ / \ c \in R$$

الدالة الاصلية المطلوبة هي $x \mapsto 2\sqrt{x}\ln x - 4\sqrt{x} + c \ / \ c \in R$

2)**حساب** $S\left(\alpha\right)$ **بحيث** $0 < \alpha < 1$

$$S\left(\alpha\right) = \int_{\alpha}^{1} \left|f\left(x\right) - y\right| dx = -\int_{\alpha}^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}dx = \left[-2\sqrt{x}\ln x + 4\sqrt{x}\right]_{\alpha}^{1}$$

$$= 4 + 2\sqrt{\alpha}\ln\alpha - 4\sqrt{\alpha} \ (ua)$$

ومنه $S\left(\alpha\right) = 8 + 4\sqrt{\alpha}\ln\alpha - 8\sqrt{\alpha} \ cm^2$

3)**حساب نهاية** $S\left(\alpha\right)$ **لما يؤول** α **إلى الصفر**

$$\lim_{\alpha \to 0} S\left(\alpha\right) = \lim_{\alpha \to 0}(8 + \overset{0}{\cancel{4\sqrt{\alpha}\ln\alpha}} - 8\sqrt{\alpha}) = 8cm^2$$

التفسير البياني : نهاية $S\left(\alpha\right)$ **هي مساحة الحيز المستوي المحدد بكل من** $\left(C_f\right)$ و المستقيم $\left(d\right)$ والمستقيمين ذو المعادلتين : $x = 0$ و $x = 1$

$\left(III\right.$: $u_0 \in \left[1;2\right]$ و $u_{n+1} = \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1$

1)**برهان أنه من أجل كل** x **من المجال** $\left[1;2\right]$ **لدينا :** $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

لدينا من اجل x من المجال فان $(1)....0 \le \ln x \le \ln(2) \le 1$

و ان $1 \le \sqrt{x} \le \sqrt{2}$ اي ان $(2).....0 < \frac{1}{\sqrt{2}} \le \frac{1}{\sqrt{x}} \le 1$

من (1) و (2) نجد $0 \le \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \le 1$

2)**برهان بالتراجع أن من أجل كل عدد طبيعي** n **لدينا :** $u_n \in \left[1;2\right]$

نسمي $P(n)$ الخاصية "$u_n \in \left[1;2\right]$"

-لدينا من اجل $n = 0$ $u_0 \in \left[1;2\right]$ ومنه $P(0)$ صحيحة

- نفرض ان $P(n)$ صحيحة ونبرهن صحة $P(n+1)$ اي نبرهن ان $u_{n+1} \in \left[1;2\right]$

لدينا : $u_n \in \left[1;2\right]$ اي $1 \le u_n \le 2$ اذن حسب السؤال السابق $0 \le \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} \le 1$

ومنه $1 \le \frac{\ln u_n}{\sqrt{u_n}} + 1 \le 2$ اي ان $1 \le u_{n+1} \le 2$ معناه ان $P(n+1)$ صحيحة

اذن حسب مبدا البرهان بالتراجع ان الخاصية صحيحة من اجل كل عدد طبيعي n

3)**تعيين اتجاه تغير المتتالية** $\left(u_n\right)$.

لدينا $u_{n+1} = f\left(u_n\right) + u_n$ ومنه وبما ان f سالبة على $]0;+\infty[$ ((C_f) تحت محور الفواصل) فان $u_{n+1} - u_n \le 0$ ومنه المتتالية $\left(u_n\right)$ متناقصة

4)**برهان أن المتتالية** $\left(u_n\right)$ **متقاربة**

لدينا من اجل كل n **من** $\mathbb{N}$: $1 \le u_n \le 2$ **اي ان** $\left(u_n\right)$ **محدودة من الاسفل**

وبما انها متناقصة فانها متقاربة ولتكن ℓ **نهايتها**

5) **حساب نهاية** $\left(u_n\right)$

لدينا $\lim_{n \to +\infty} u_n = \lim_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ اذن بادخال النهاية على العلاقة التراجعية نجد $\ell = \frac{\ln\ell}{\sqrt{\ell}} + 1$ معناه $-\ell + 1 + \frac{\ln\ell}{\sqrt{\ell}} = 0$ معناه $f\left(\ell\right) = 0$

ونلاحظ ان المعادلة $f\left(x\right) = 0$ تقبل حلا وحيدا هو 1 (بيانيا)ينتج ان $\ell = 1$