Email: saitameur3@gmail.com 023 71 54 67 :فاكس 023 71 54 63 / 0550 47 22 35 :رقم الهاتف

المستوى الثالثة ثانوي تقني رياضي

المدة: 2 سا

اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات

التمرين الأول (7 ن):

(u_n) متتالية معرفة بـ: $u_0 = e^3$ و من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$

1) برهن انه من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $u_n > e^2$

2) ادرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). هل هي متقاربة؟

3) نضع من أجل كل n من $\mathbb{N}$: $v_n = \ln(u_n) - 2$

أ) بين أن المتتالية (v_n) هندسية، يطلب تعيين أساسها و حدها الأول

ب) عبر عن v_n بدلالة n ثم u_n بدلالة n

4) احسب بدلالة n كل من S_n و P_n حيث:

$$S_n = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$$

$$P_n = u_0 \times u_1 \times \ldots \times u_n$$

التمرين الثاني (5 ن):

n عدد طبيعي غير معدوم

ليكن a و b عددان طبيعيان حيث $a = 2n + 1$ و $b = n - 3$

1) ماهي القيم الممكنة للقاسم المشترك الأكبر للعددين a و b

2) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

3) أ) بين أنه $6^{2n} \equiv 1[7]$

ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $6^{2n} + 5^n + 3 \equiv (5^n + 4)[7]$

ج) عين قيم n التي من أجلها يكون العدد $6^{2n} + 5^n + 3$ قابلا للقسمة على 7

التمرين الثالث (8 ن):

.I g دالة معرفة على R بـ: $g(x) = 1 + 4xe^{2x}$

1) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2) استنتج انه من اجل كل x من R : $g(x) > 0$

.II f دالة معرفة على R بـ: $f(x) = (2x-1)e^{2x} + x + 1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O, \vec{i}, \vec{j})$. الوحدة 2cm

1) أحسب نهايات الدالة f عند أطراف مجال تعريفها

2) ادرس اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها

3) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0.2 < \alpha < 0.2$ ثم تحقق أن $\alpha = 0$

4) أ) بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x + 1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$

ب) أدرس الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)

5) أرسم (Δ) و (C_f)

6) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، مع $0 < a < \frac{1}{2}$ ، بين أن:

$$\int_a^{\frac{1}{2}} (2x-1)e^{2x}\,dx = -\left(\frac{e}{2} + (a-1)e^{2a}\right)$$

ب) استنتج مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلة $y = x + 1$ ، $x = \frac{1}{2}$

و $x = \frac{1}{4}$

BAC TM 2024

YES WE CAN !

التصحيح النموذجي:

التمرين الأول (7 ن):

لدينا : $u_0 = e^3$ وَ $u_{n+1} = e\sqrt{u_n}$.

1) إثبات أنّ : $u_n > e^2$ ، (نستعمل البرهان بالتراجع)

*)التحقق من صحة الخاصية من أجل $n = 0$ ،

لدينا : $u_0 = e^3$ أي : $u_0 > e^2$ محقّقة .

*)نفرض صحة الخاصية عند n ، أي : $u_n > e^2$.

*)و نبرهن صحة الخاصية عند $n+1$ ، أي : $u_{n+1} > e^2$.

لدينا فرضا $u_n > e^2$ ، أي : $\sqrt{u_n} > e$ ،

أي : $e\sqrt{u_n} > e^2$ ، إذن : $u_{n+1} > e^2$. وهو المطلوب

ومنه : من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_n > e^2$.

2) إتجاه تغيّر المتتالية (u_n) : أي نحسب :

$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n$ ، أي :

$$u_{n+1} - u_n = e\sqrt{u_n} - u_n \times \frac{e\sqrt{u_n} + u_n}{e\sqrt{u_n} + u_n} = \frac{e^2 u_n - u_n^2}{e\sqrt{u_n} + u_n}$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(e^2 - u_n)}{e\sqrt{u_n} + u_n}$.

*) بما أنّ : $u_n > e^2$ معناه : $e^2 - u_n < 0$ ، ومنه :

$u_{n+1} - u_n < 0$ ، إذن المتتالية (u_n) متناقصة .

*) نعم المتتالية (u_n) متقاربة ، لأنّها متناقصة و محدودة من الأسفل بــ e^2 .

3) لدينا من أجل كل عدد طبيعي n : $v_n = \ln(u_n) - 2$

*)بيان أنّ المتتالية (v_n) هندسية : أي نحسب :

$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) - 2$ ، أي : $v_{n+1} = \ln(e\sqrt{u_n}) - 2$

ومنه : $v_{n+1} = \ln e + \ln\sqrt{u_n} - 2$ ، أي

$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{2}\ln(u_n) - 2$ ، أي :

$v_{n+1} = \frac{1}{2}\ln(u_n) - 1$ ، ومنه :

$v_{n+1} = \frac{1}{2}(\ln(u_n) - 2)$ ، إذن : $v_{n+1} = \frac{1}{2}v_n$ ،

و عليه فإن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q = \frac{1}{2}$.

وَ حدّها الأول : $v_0 = \ln(u_0) - 2$ ، أي :

$v_0 = \ln(e^3) - 2$ ، ومنه : $v_0 = 1$.

*) عبارة v_n : $v_n = v_0 \times (q)^n$ ، أي : $v_n = (\frac{1}{2})^n$.

*)عبارة u_n : $v_n = \ln(u_n) - 2$ ، أي : $\ln(u_n) = v_n + 2$

أي : $u_n = e^{v_n + 2}$ ، إذن : $u_n = e^{((\frac{1}{2})^n + 2)}$.

*) حساب النهايات :

أ) نهاية المتتالية (v_n) : $\lim\limits_{n\to+\infty}(v_n) = 0$ ، لأنّ : $-1 < q < 1$

ب) نهاية المتتالية (u_n) :

$$\lim_{n\to+\infty}(u_n) = \lim_{n\to+\infty} e^{((\frac{1}{2})^n + 2)} = e^2 .$$

4) حساب الجداء P_n : $P_n = u_0 \times u_1 \times .... \times u_n$ ،

أي : $P_n = e^{(v_0+2)} \times e^{(v_1+2)} \times .... \times e^{(v_n+2)}$ ، أي :

$P_n = e^{(v_0 + v_1 + ... + v_n)} \times e^{(2+2+.....+2)}$ ، ومنه :

$P_n = e^{(S_n)} \times e^{2(n+1)}$.

*) حساب S_n : $S_n = v_0 \times \dfrac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$ ، أي :

$S_n = 1 \times \dfrac{1 - (\frac{1}{2})^{n+1}}{1 - (\frac{1}{2})}$ ، ومنه : $S_n = 2\left[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}\right]$.

إذن : $P_n = e^{2\left[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}\right]} \times e^{2(n+1)}$ ،

أي : $P_n = e^{2\left[1 - (\frac{1}{2})^{n+1}\right] + 2n + 2}$. (بالإمكان التبسيط أكثر لـ P_n)

التمرين الثانى (5 ن):

1) $PGCD(a; b) \in \{1; 7\}$

2) أدرس تبعا لقيم العدد n بواقي قسمة العدد 5^n على 7

3) أ) $6^{2n} \equiv 1[7]$

ب) من أجل كل عدد طبيعي n : $6^{2n}+5^{n}+3 \equiv (5^{n}+4)[7]$

ج) قيم n: $n=6k+5;\quad k\in N$

التمرين الثالث (8 ن):

I. g دالة معرفة على R بـ: $g(x)=1+4xe^{2x}$

11) أدرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

$\lim_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} g(x)=1$

من أجل كل x من R: $g'(x)=4(1+2x)e^{2x}$

الدالة g *متزايدة على المجال* $]-\frac{1}{2};+\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty;-\frac{1}{2}]$

2)الدالة g تقبل قيمة حدية صغرى عند النقطة ذات الفاصلة 1/2- مع $g\left(\frac{-1}{2}\right)=0.26$ و منه من اجل كل x من R : $g(x)>0$

f دالة معرفة على R بـ: $f(x)=(2x-1)e^{2x}+x+1$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. الوحدة 2cm

1) $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$

2) من أجل كل x من R: $f'(x)=g(x)$ الدالة f *متزايدة تماما على* R

3) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حل وحيد α حيث $-0.2<\alpha<0.2$ (مبرهنة القيم المتوسطة)

مع *f(0.2)=0.3* و *f(-0.2)=-0.13*

تحقق أن $\alpha=0$ *:* لدينا *f(0)=0*

4) أ) المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x+1$ مستقيم مقارب مائل لـ (C_f) عند $-\infty$ لان

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-y]=0$$

ب) الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)

لما $x\in]-\infty;\ 1/2\ [$: (C_f) يقع تحت (Δ)

عند النقطة ذات الفاصلة $x=\frac{1}{2}$: (C_f) يقطع (Δ)

لما $x\in]1/2\ ;+\infty[$: (C_f) يقع فوق (Δ)

4) أرسم (Δ) و (C_f)

5) أ) باستعمال التكامل بالتجزئة، مع $0<\alpha<\frac{1}{2}$:

$$\int_{\alpha}^{\frac{1}{2}}(2x-1)e^{2x}\,dx = -\left(\frac{e}{2}+(\alpha-1)e^{2\alpha}\right)$$

ب) مساحة الحيز المحدد بالمنحنى (C_f) و المستقيمات ذات المعادلة $y = x + 1$ ، $x = \frac{1}{2}$

و $x = \frac{1}{4}$ هي $S = 2e - 3\sqrt{e} = 0.490399\ cm^2$