

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:
الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

(1) نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{R} بعدها الأول $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ؛ $u_{n+1} = 3 - \frac{10}{u_n + 4}$.

أ. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n \leq 1$.

ب. أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم استنتج أنها متقاربة واحسب نهايتها .

(2) نضع من أجل كل عدد طبيعي n ؛ $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ. أثبت أن المتتالية (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{5}$ ثم أحسب حدها الأول v_0 .

ب. عبر عن u_n بدلالة n ، و أحسب من جديد $\lim u_n$.

(3) أحسب بدلالة n ، المجموع S_n حيث $S_n = v_{n+1} + v_{n+2} + \dots + v_{n+2021}$ ثم استنتج بدلالة n ،

المجموع S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_{n+1} + 2} + \frac{1}{u_{n+2} + 2} + \dots + \frac{1}{u_{n+2021} + 2}$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

إناء به 5 كريات متماثلة ولا نفرق بينها عند لمس : 2 كرية خضراء و 3 كريات حمراء .

(1) نسحب عشوائيا وفي آن واحد كرتين من الإناء . نرمز بـ X إلى المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الكريات الخضراء المسحوبة .

أ. تحقق أن $p(X = 0) = \frac{3}{10}$ ثم عين قانون احتمال X ثم أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

ب. أحسب احتمال الحادثة A : " الكرتان المسحوبتان من نفس اللون " .

(2) نسحب على التوالي كرتين من الإناء بالطريقة التالية : إذا كانت الكرية

المسحوبة حمراء نعيدها إلى الإناء ، وإذا كانت الكرية المسحوبة خضراء لا نعيدها

إلى الإناء . نرمز إلى كرية خضراء بالرمز V وإلى كرية حمراء بالرمز R

أ. انقل ثم أكمل شجرة الاحتمالات المقابلة .

ب. احسب احتمال الحادثتين : B : " الكرية المسحوبة الأولى خضراء " . C : " إحدى الكرتين المسحوبتين خضراء " .

ج. بين أن احتمال أن يوجد في الإناء 2 كرية خضراء هو $\frac{9}{25}$.

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$(I) \begin{cases} z_1 + iz_2 = \sqrt{3} + i \\ 2iz_1 - z_2 = 2i\sqrt{3} \end{cases} : \text{حيث } z_2 \text{ و } z_1 \text{ المركبين}$$

(II) المستوي المركب منسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{u}; \vec{v})$. نعتبر النقط A ، B و C التي لاحقاتها على الترتيب : $z_A = \sqrt{3} - i$ ، $z_B = \overline{z_A}$ و $z_C = 2i$.

(1) بين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 ثم مثل النقط A ، B و C

(2) تحقق أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$ ثم استنتج طبيعة المثلث OAB واحسب مساحته .

(3) عين z_D لاحقة النقطة D مرجح الجملة $\{(A;2), (B;-2), (C;1)\}$

(4) عين (Γ_1) مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث: $\|2\overline{MA} - 2\overline{MB} + \overline{MC}\| = 2$

(5) (Γ_2) مجموعة النقط M من المستوي التي لاحقتها z حيث : $\arg(z + 2i) = \frac{\pi}{3}$

تحقق أن النقطة B تنتمي إلى (Γ_2) ثم عين المجموعة (Γ_2) .

التمرين الرابع: (07 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x + (x-1)e^{2x}$

وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. بين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. أ. أثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$.

ب. أدرس الوضع النسبي للمنحني (C_f) والمستقيم (Δ) .

3. بين أن من أجل كل x من \mathbb{R} ؛ $f'(x) = 1 + (2x-1)e^{2x}$

4. إليك جدول تغيرات الدالة f' الدالة المشتقة للدالة f .

أ. برر أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I يطلب تعيين إحداثياتها

ب. حدد حسب قيم x إشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات

الدالة f

5. أثبت أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على \mathbb{R} حلا وحيدا α . برر أن $0,8 < \alpha < 0,9$.

6. بين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ) ثم أكتب معادلة (T) . أرسم (C_f) ، (Δ) و (T) .

7. m وسيط حقيقي ، ناقش بيانيا حسب قيم m عدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} ب: $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.

2. أ. تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$.
ب. استنتج اتجاه تغير (u_n) ثم برر لماذا (u_n) متقاربة .

3. أ. بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$.
ب. استنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$.
ج. استنتج نهاية (u_n) .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

(I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين " .

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

أ - بين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$ ثم أحسب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C .

ب أحسب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

ج استنتج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين .

(II) نضيف إلى الكيس 2 قريصة حمراء . الكيس يحوي إذن 12 قريصة . نسحب الآن 3 قريصات في آن واحد وليكن

X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .

أ - برر أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 .

ب - بين أن $p(X = 2) = \frac{71}{110}$ ثم عين قانون احتمال المتغير X و احسب أمله الرياضي .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أحوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة

الصحيحة مع التبرير . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overline{OI}, \overline{OJ})$.

A ، B و C نقط لاحقاتها $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو : أ) $\frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ب) $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ ج) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ د) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$
2. الشكل الآسي لـ z_C هو : أ) $2e^{\frac{2i\pi}{3}}$ ب) $-e^{\frac{i\pi}{2}}$ ج) $-2e^{-\frac{i\pi}{3}}$ د) $\sqrt{2}e^{\frac{2i\pi}{3}}$
3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (D;1)\}$:

- أ) $1 + \frac{\sqrt{2}}{2}i$ ب) $-1 + \frac{1}{2}(1 - \sqrt{3})i$ ج) $1 + i$ د) $1 + \frac{1}{2}i$

1. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

- أ) $4k$ ب) $4k + 1$ ج) $8k + 4$ د) $8k$ ($k \in \mathbb{N}$)

5. مجموعة النقط M التي لاحقتها z حيث : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = 4$ هي :

- أ) دائرة ب) نقطة ج) مستقيم د) قطعة مستقيمة

التمرين الرابع: (07 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

1. أثبت أن :
- إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$.
- إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$.
2. أ. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ وفسر النتيجة بيانيا ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.
ب. بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$.
ج. شكل جدول تغيرات الدالة f .

3. أ. بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. أدرس وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) .

ج. بين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) يطلب تعيين معادلة له.

4. أنشئ المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحني (C_f) .

5. g الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ $g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$.

أ. بين أن الدالة g فردية ثم باستعمال المنحني (C_f) ارسم المنحني (C_g) .

6. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x) = m$ حلين متمايزين .

7. h الدالة المعرفة على $]1; +\infty[$ بـ $h(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1}$.

بين أن $h(x) = f(x-1) + 2$ ، اشرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقا من (C_f) .

انتهى الموضوع الثاني

الإجابة النموذجية لموضوع اختبار مادة : الرياضيات / الشعبة علوم تجريبية / بكالوريا تجريبية 2021

العلامة		عناصر الإجابة (الموضوع الأول)								
المجموع	مجزأة									
4	0.50+0.25	التمرين الأول : 1.أ) البرهان بالتراجع								
	2×0.25	ب) $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n - 1)(u_n + 2)}{u_n + 4}$ بما أن $0 \leq u_n < 1$ فإن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن (u_n) متزايدة تماما								
	0.25	-استنتاج أن (u_n) متقاربة.								
	0.50	-حساب النهاية : (u_n) متقاربة إذن $\lim u_n = l$ و $\lim u_{n+1} = l$ ومنه l حل للمعادلة $3 - \frac{10}{l+4} = l$ أي $l = 1$ أو $l = -2$. وبما أن $u_0 = 0$ و (u_n) متزايدة فإن $l = 1$ أي $\lim u_n = 1$.								
	0.50	2. أ) إثبات أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{5}$.								
	0.25	ب) عبارة v_n بدلالة n : $v_n = -\frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ و $u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n} = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{1 + \frac{1}{2} \left(\frac{2}{5}\right)^n}$.								
	0.25	حساب $\lim u_n$: لدينا $-1 < \frac{2}{5} < 1$ إذن $\lim \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ ومنه $\lim u_n = 1$								
	0.5	3. حساب S_n $S_n = v_{n+1} \frac{1-q^{2021}}{1-q} = -\frac{5}{6} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1} \left[1 - \left(\frac{2}{5}\right)^{2021}\right]$								
	0.25	استنتاج حساب S'_n حيث : $S'_n = \frac{1}{u_{n+1} + 2} + \frac{1}{u_{n+2} + 2} + \dots + \frac{1}{u_{n+2021} + 2}$ لدينا : $\frac{1}{u_n + 2} = \frac{1}{3}(1 - v_n)$ إذن :								
0.25	$S'_n = \frac{1}{3}(2021 - S_n)$ أي $S'_n = \frac{1}{3}(1 - v_{n+1}) + \frac{1}{3}(1 - v_{n+2}) + \dots + \frac{1}{3}(1 - v_{n+2021})$									
	0.5	التمرين الثاني : 1. التحقق أن $p(X = 0) = \frac{3}{10}$								
	1	قانون احتمال X : $p(X = 1) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{10} = \frac{6}{10}$ ، $p(X = 2) = \frac{C_2^2}{10} = \frac{1}{10}$								
	0.5	<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>X_i</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>2</td> </tr> <tr> <td>$p(X = X_i)$</td> <td>$\frac{3}{10}$</td> <td>$\frac{6}{10}$</td> <td>$\frac{1}{10}$</td> </tr> </table> <p>الأمّل الرياضياتي : $E(X) = \frac{4}{5}$.</p>	X_i	0	1	2	$p(X = X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$
X_i	0	1	2							
$p(X = X_i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$							

4	01	<p>أ) الشجرة :</p>
		<p>ب) $p(B) = \frac{2}{5}$ ، $p(C) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{27}{50}$</p>
		<p>ج) احتمال أن يبقى في الإناء 2 كرية خضراء يعني سحب كرتين حمراء : $\frac{3}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$</p>
5	2×0.5	<p>التمرين الثالث :</p> <p>(I) $z_1 = \sqrt{3} - i$ و $z_2 = 2$</p>
	0.75+1	<p>(II) 1. تبيين أن النقط A ، B و C تنتمي إلى الدائرة التي مركزها O ونصف قطرها 2 . تمثيل النقط</p>
	0.25	<p>2. التحقق أن $\frac{z_A}{z_B} = e^{-i\frac{\pi}{3}}$</p>
	0.25+0.5	<p>- استنتاج طبيعة المثلث - مساحة المثلث تحقق أن $S_{ABC} = \sqrt{3} u.a$</p>
	0.25	<p>3. $z_D = -2i$.</p>
	0.50	<p>4. (Γ_1) هي الدائرة التي مركزها $D(0; -2)$ ونصف قطرها 2.</p>
7	0.25+0.5	<p>التمرين الرابع :</p> <p>3. 1. تبيين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ ثم حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.</p>
	0.5	<p>2. أ. إثبات أن $y = x$ (Δ) مقارب للمنحني (C_f) عند $-\infty$</p>
	0.5	<p>ب. الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ)</p>
7	0.5	<p>3. بين أن من أجل كل x من \mathbb{N}؛ $f'(x) = 1 + (2x - 1)e^{2x}$</p>
	2×0.25	<p>4. أ) تبرير أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف I (بأي طريقة) تعيين إحداثيات I : $I(0; f(0))$ أي $I(0; -1)$</p>
	2×0.5	<p>ب. إشارة $f(x)$ ؛ جدول التغيرات</p>
	0.5	<p>5. إثبات أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على \mathbb{R} حلا وحيدا α . تبرير أن $0,8 < \alpha < 0,9$.</p>
	0.50	<p>6. تبيين أن (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)</p>
	0.25	<p>معادلة المماس (T) :</p>
	1	<p>- رسم (C_f) ، (Δ) و (T)</p>
		<p>7. المناقشة البيانية حسب قيم m لعدد حلول المعادلة $me^{-2x} - x + 1 = 0$.</p>

0.25	$f(x) = x + m$ معناه $me^{-2x} - x + 1 = 0$ •
3×025	<ul style="list-style-type: none"> • $m < -\frac{e}{2}$ ليس للمعادلة حلا . • $m = -\frac{e}{2}$ أو $m \geq 1$ للمعادلة حل واحد • $-\frac{e}{2} < m < 1$ حلين

التصحيح المفصل للإمتحان التجريبي

الموضوع الثاني

التمرين الأول (04 نقاط):

- 1) لتكن المتتالية (u_n) المعرفة على \mathbb{N} بـ : $u_0 = 0$ ومن أجل كل عدد طبيعي n ، $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$.
2. نبرهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq u_n < 4$.
- من أجل $n = 0$ ، $u_0 = 0$ و $0 \leq u_0 < 4$ إذن الخاصية محققة من أجل $n = 0$0.25
- . نفرض أن الخاصية صحيحة من أجل n أي : $0 \leq u_n < 4$ و نبرهن صحة الخاصية من أجل $n + 1$.
- أي : $0 \leq u_{n+1} < 4$
- لدينا : $0 \leq u_n < 4$ ، نضرب أطراف المتباينة في 3 نجد : ، $0 \leq 3u_n < 12$ نضيف 4 نجد :

$$0.5 \dots\dots\dots 0 \leq u_{n+1} < 4 \text{ بالتالي } 0 \leq 2 \leq \sqrt{3u_n + 4} < 4 \text{ و منه } 4 \leq 3u_n + 4 < 16$$

$$2. \text{ أ. نتحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n^2 + 3u_n + 4}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$0.75 \dots\dots\dots u_{n+1} - u_n = \sqrt{3u_n + 4} - u_n = \frac{(\sqrt{3u_n + 4} - u_n)(\sqrt{3u_n + 4} + u_n)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 4 - u_n^2}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n} = \frac{-(u_n + 1)(u_n - 4)}{\sqrt{3u_n + 4} + u_n}$$

بما أن $0 \leq u_n < 4$ فإن : $1 \leq u_n + 1 \leq 5$ و $-4 \leq u_n - 4 < 0$ و $\sqrt{3u_n + 4} + u_n > 0$

إذن : $u_{n+1} - u_n < 0$ و منه المتتالية (u_n) متزايدة تماما.....0.5

بما أن (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة.....0.25

$$4. \text{ أ. نبين أنه من أجل كل عدد طبيعي } n, 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n)$$

$$\text{لدينا : } 4 - u_{n+1} = 4 - \sqrt{3u_n + 4} = \frac{(4 - \sqrt{3u_n + 4})(4 + \sqrt{3u_n + 4})}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{16 - 3u_n - 4}{4 + \sqrt{3u_n + 4}} = \frac{3(4 - u_n)}{4 + \sqrt{3u_n + 4}}$$

لدينا أيضا : $0 \leq u_n < 4$ و منه : $4 \leq 3u_n + 4 < 16$ و $2 \leq \sqrt{3u_n + 4} < 4$ و بالتالي :

و بما أن $4 - u_n \geq 0$ إذن $\frac{1}{8} \leq \frac{1}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{1}{6}$: إذن $6 \leq 4 + \sqrt{3u_n + 4} \leq 8$

$$0.75 \dots\dots\dots 4 - u_{n+1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_n) \text{ ومنه } \frac{3(4-u_n)}{4+\sqrt{3u_n+4}} \leq \frac{3(4-u_n)}{6}$$

ت. التحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي n ، $0 \leq 4 - u_n \leq \frac{1}{2^n}(4 - u_0)$ ،

لدينا : $4 - u_n \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1})$ ، $4 - u_{n-1} \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-2})$ ، $4 - u_{n-2} \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-3})$ ، \dots ،

بالضرب طرفا إلى طرف نجد : $4 - u_1 \leq \frac{1}{2}(4 - u_0)$

$$(4 - u_n)(4 - u_{n-1})(4 - u_{n-2}) \dots (4 - u_1) \leq \frac{1}{2}(4 - u_{n-1}) \frac{1}{2}(4 - u_{n-2}) \frac{1}{2}(4 - u_{n-3}) \dots \frac{1}{2}(4 - u_0)$$

نختزل الأطراف المتشابهة نجد : $0 \leq (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n (4 - u_0)$ **0.5**.....

ح. استنتج نهاية (u_n) :

بما أن : $0 \leq (4 - u_n) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n 4$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n 4 = 0$ و منه حسب النهايات بالمقارنة $\lim_{n \rightarrow +\infty} (4 - u_n) = 0$

و بالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 4$ **0.5**.....

التمرين الثاني (04 نقاط):

(I) يحتوي كيس على 10 قريصات متماثلة : 7 بيضاء تحمل الأرقام 1 ، 1 ، 1 ، 2 ، 2 ، 3 ، 3 و 3 سوداء تحمل الأرقام 1 ، 4 ، 4 . نسحب في آن واحد قريصتين من هذا الكيس و نعتبر الحوادث :

A : " الحصول على قريصتين من نفس اللون " .

B : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين مختلفين " .

C : " مجموع الرقمين اللذين تحملهما القريصتان المسحوبتان يساوي 5 " .

ت تبين أن احتمال الحادثة B يساوي $\frac{4}{5}$: لدينا \bar{B} : " الحصول على قريصتين تحملان رقمين متشابهين "

$$0.5 \dots\dots\dots p(B) = 1 - p(\bar{B}) = 1 - \frac{C_4^2 + C_2^2 + C_2^2 + C_2^2}{C_{10}^2} = \frac{36}{45} = \frac{4}{5}$$

. حساب احتمال كل من الحادثة A والحادثة C :

$$0.5 \dots\dots\dots p(A) = \frac{C_7^2 + C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{24}{45} = \frac{8}{15}$$

$$0.5 \dots\dots\dots p(C) = \frac{C_4^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1}{C_{10}^2} = \frac{12}{45} = \frac{4}{15}$$

ب- حساب احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون و تحملان رقمين مختلفتين .

$$0.5 \dots\dots\dots p(A \cap B) = \frac{C_3^1 \times C_2^1 + C_3^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_2^1 + C_2^1 \times C_1^1}{C_{10}^2} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

ج-استنتاج احتمال الحصول على قريصتين من نفس اللون أو تحملان رقمين مختلفتين:

$$0.5 \dots\dots\dots p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \frac{8}{15} + \frac{4}{5} - \frac{2}{5} = \frac{14}{15}$$

(II) نضيف إلى الكيس 2 قرصاً حمراء. الكيس يحوي إذن 12 قرصاً. نسحب الآن 3 قرصات في آن واحد وليكن X المتغير العشوائي الذي يمثل عدد الألوان المحصل عليها .
 أ. تبرير أن قيم المتغير العشوائي X هي : 1 ؛ 2 ؛ 3 :

قيم X هي: $X = 1$ في حالة ظهور 3 كرات بيضاء BBB أو 3 كرات سوداء NNN ، $X = 2$ ظهور لونين أسود و أبيض: NNB أو BBN أو أبيض و أحمر: BBR أو BRR أو أسود و أحمر: NNR أو NRR ، $X = 3$ ظهور 3 ألوان أبيض ، أسود و أحمر: BNR 0.5

ب. بيان أن $p(X = 2) = \frac{71}{110}$

0.25 $p(X = 2) = \frac{C_7^2 \times C_5^1 + C_3^2 \times C_9^1 + C_2^2 \times C_{10}^1}{C_{12}^3} = \frac{142}{220} = \frac{71}{110}$

. قانون احتمال المتغير X : $p(X = 1) = \frac{C_7^3 + C_{10}^3}{C_{12}^3} = \frac{36}{220} = \frac{9}{55}$ ، $p(X = 3) = \frac{C_7^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{12}^3} = \frac{42}{220} = \frac{21}{110}$

0.5

X	1	2	3
$p(X)$	$\frac{9}{55}$	$\frac{71}{110}$	$\frac{21}{110}$

0.25 حساب أمله الرياضي: $E(X) = 1 \times \frac{9}{55} + 2 \times \frac{71}{110} + 3 \times \frac{21}{110} = \frac{223}{110} = 2.027$

التمرين الثالث (05 نقاط):

هذا التمرين هو استبيان متعدد الإجابات ، لكل سؤال 4 أحوبة مقترحة واحد منها صحيح ، المطلوب : تحديد الإجابة الصحيحة مع التبرير . المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O; \overline{OI}, \overline{OJ})$.

$z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}}$ ، $z_B = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$ و $z_C = -1 + i\sqrt{3}$.

1. الشكل الجبري للعدد z_A هو:

0.75 لدينا : $z_A = \sqrt{3}e^{i\frac{\pi}{6}} = \sqrt{3} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 إذن الإجابة الصحيحة هي ج) $\frac{3}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

2. الشكل الأسّي لـ z_C هو:

لدينا : $z_C = -1 + i\sqrt{3}$ ، $|z_C| = \sqrt{1+3} = 2$ و $\arg(z_C) = \arg(-1 + i\sqrt{3}) = \theta$ بحيث

0.75 $z_C = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$: وبالتالي $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2\pi k$ و $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ و $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

0.25 إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) $2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. لاحقة النقطة D بحيث يكون O مرجح الجملة $\{(A;1), (B;-1), (D;1)\}$ هي:

لدينا : $z_D = \frac{z_A - z_B + z_D}{1-1+1}$ و منه $z_D = z_0 - z_A + z_B$ إذن $z_D = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$

0.25 ومنه : $z_D = -1 + i\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$ 0.75 إذن الإجابة الصحيحة هي ب) $-1 + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})i$

4. ليكن n عددا طبيعيا، العدد $(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه n من الشكل :

الشكل الأسي ل z_B هو : $z_B = \frac{1}{2} + i\frac{1}{2}$ ، $\arg(z_C) = \arg\left(\frac{1}{2} + i\frac{1}{2}\right) = \alpha$ و $|z_B| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ بحيث:

$$(z_B)^n = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\frac{\pi}{4}} \quad \text{و بالتالي} \quad \alpha = \frac{\pi}{4} + 2\pi k \quad \cos \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{و} \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n e^{i\frac{n\pi}{4}}$$

$(z_B)^n$ حقيقي موجب معناه : $\frac{n\pi}{4} = 2k\pi$ و منه : $n = 8k$ حيث k عدد صحيح 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: د) $8k$ 0.25

5. مجموعة النقط M التي لاحتتها z حيث : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = 4$ هي :

لدينا : $(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = (z + 1 - i\sqrt{3})(\overline{z + 1 - i\sqrt{3}}) = |z + 1 - i\sqrt{3}|^2$

$$(z + 1 - i\sqrt{3})(\bar{z} + 1 + i\sqrt{3}) = |z - (-1 + i\sqrt{3})|^2 = |z - z_C|^2 = 4$$

معناه $MC^2 = 4$ و منه $MC = 2$ إذن مجموعة النقط هي دائرة ذات المركز C و نصف القطر 2 0.75

إذن الإجابة الصحيحة هي: أ) دائرة 0.25

التمرين الرابع (07 نقاط):

لتكن الدالة f المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ $f(x) = x - \frac{\ln x}{x}$. وليكن (C_f) تمثيلها البياني في

المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد والمتجانس $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

4. أثبات أن : - إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$.

- إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$.

نضع : لتكن k الدالة المعرفة على المجال $]0; +\infty[$ بـ : $k(x) = x^2 - 1 + \ln x$

ندرس إتجاه تغير الدالة $k(x) = 2x + \frac{1}{x}$ ، من أجل كل x من المجال $]0; +\infty[$ $k'(x)$ موجبة و منه

الدالة k متزايدة تماما على $]0; +\infty[$ 0.25

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} k(x) = -\infty$$

x	0	1	$+\infty$
$k'(x)$		+	
$k(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

إذن جدول تغيرات الدالة k : 0.25

و لدينا $k(1) = 0$

إذن $k(x)$ موجبة على $]0; 1[$ و سالبة على

$]1; +\infty[$ و بالتالي : إذا كان $x > 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x > 0$ و إذا كان $0 < x < 1$ فإن : $x^2 - 1 + \ln x < 0$... 0.5

2. أ. حساب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:
 0.25 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \left[x - \frac{\ln x}{x} \right] = +\infty$

التفسير الهندسي (C_f): يقبل حامل محور الترتيب مستقيم مقارب 0.25
 حساب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ لأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$ 0.25

ب. نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من المجال $]0; +\infty[$ ، $f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ ،

لدينا : $f'(x) = 1 - \frac{1 \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 - \frac{1 - \ln x}{x^2} = \frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2}$ 0.5

إشارة $f'(x)$ من إشارة $(x^2 - 1 + \ln x)$ إذن f متناقصة تماما على المجال $]0; 1]$ و متزايدة تماما

على $[1; +\infty[$ 0.25

ج. شكلي جدول تغيرات الدالة f : 0.25

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	0
$f(x)$	$+\infty$	↘	1
		↗	$+\infty$

3. أ. نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[x - \frac{\ln x}{x} - x \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{\ln x}{x} \right) = 0$ 0.25

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y = x$ مقارب مائل للمنحني (C_f) عند $+\infty$.

ب. دراسة وضعية المنحني (C_f) بالنسبة إلى (Δ) : 0.5

لدينا : $f(x) - x = -\frac{\ln x}{x}$ بما أن $x > 0$ إذن إشارة $f(x) - x$ من إشارة $-\ln x$

x	0	1	$+\infty$
$f(x) - x$		+	0
الوضع النسبي ل (C_f) و (Δ)		(C_f) فوق (Δ)	ينقطعان في النقطة (1; 1)
			(C_f) تحت (Δ)

ج. نبين أن المنحني (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي المستقيم (Δ) : معناه $f'(x) = 1$... 0.25 و منه $\frac{x^2 - 1 + \ln x}{x^2} = 1$

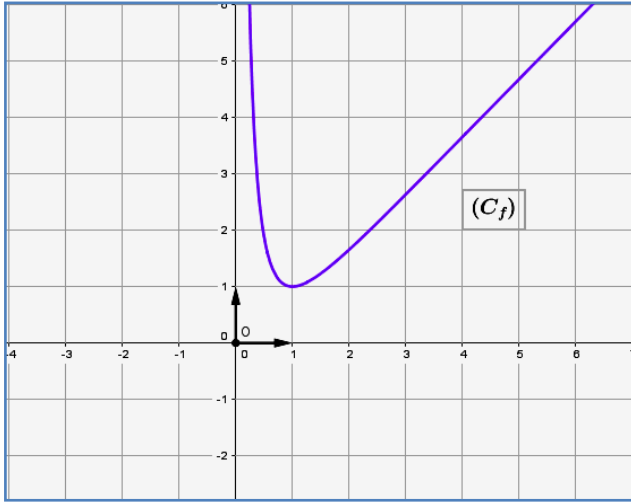
1

و بالتالي : $x^2 - 1 + \ln x = x^2$ و منه $\ln x = 1$ إذن $x = e$ 0.25

كتابة معادلة المماس (T) :

$$0.25 \dots\dots\dots (T): y = f'(e)(x - e) + f(e) = (x - e) + e - \frac{1}{e} = x - \frac{1}{e}$$

0.5....



4. إنشاء المستقيمين (Δ) ، (T) والمنحنى (C_f)

5. الدالة المعرفة على $\mathbb{R} - \{0\}$ بـ

$$g(x) = x - \frac{\ln|x|}{x}$$

أ. نبين أن الدالة g فردية:

$\mathbb{R} - \{0\}$ متناظر بالنسبة لـ 0

$$g(-x) = -x - \frac{\ln|-x|}{-x} = -x + \frac{\ln|x|}{x}$$

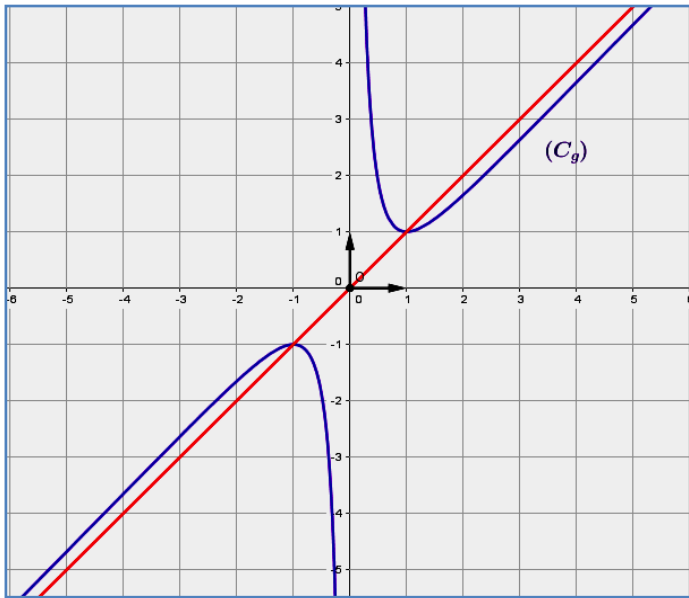
$$: \text{إذن } g(-x) = -\left(x - \frac{\ln|x|}{x}\right) = -g(x)$$

0.5..... دالة فردية g

0.5: إنشاء (C_g)

لدينا (C_g) منطبق على (C_f) على $]0; +\infty[$ و نظير

(C_f) بالنسبة للمبدأ 0 على $] -\infty; 0[$



8. m وسيط حقيقي ، عين مجموعة قيم m حتى يكون للمعادلة $g(x) = m$ حلين متمايزين .

0.5... $m \in]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ إذا كان $g(x) = m$ حلين متمايزين إذا كان

$$7. \text{ الدالة المعرفة على }]1; +\infty[\text{ بـ } h(x) = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1}$$

إثبات أن $h(x) = f(x-1) + 2$

$$f(x-1) + 2 = (x-1) - \frac{\ln(x-1)}{x-1} + 2 = \frac{(x-1)^2 - \ln(x-1) + 2(x-1)}{x-1} = \frac{x^2 - 2x + 1 - \ln(x-1) + 2x + 2}{x-1}$$

$$0.5 \dots\dots\dots f(x-1) + 2 = \frac{x^2 - 1 - \ln(x-1)}{x-1} = h(x) \text{ و منه}$$

. شرح كيف يمكن رسم المنحني (C_h) انطلاقاً من (C_f) : بما أن $h(x) = f(x-1) + 2$ إذن (C_h) هو صورة

(C_f)

بالإنسحاب الذي شعاعه $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 0.25

انتهى حل الموضوع الثاني