وزارة التربية الوطنية.	إختبار	مديرية التربية لولاية قسنطينة.
ثانوية الصادق مخلوف عين اسمارة.	الفصل الثاني	المستوى : 3 علوم تجريبية.
الاثنين 04 مارس 2024.	في مادة الرياضيات.	المدة : ساعتان.

تمرين 01 (5 نقاط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = x - 3 + (x+1)^2 e^{-x}$ ،وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 نعتبر G الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ : $G(x) = (-x-1)e^{-x}$.

- تحقق أن الدالة G دالة أصلية للدالة $x \mapsto xe^{-x}$ على $\mathbb{R}$.

2 نضع : $I = \int_0^1 xe^{-x}dx$ و $J = \int_0^1 x^2 e^{-x}dx$.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة بين أن : $J = 2I - e^{-1}$.

(ب) أحسب قيمة I ، ثم إستنتج قيمة J.

3 (أ) بالاستعانة بنتائج السؤال (2-ب)، أحسب العدد الحقيقي A حيث : $A = \int_0^1 (x+1)^2 e^{-x}dx$.

(ب) فسر النتيجة هندسيا.

تمرين 02 (7 نقاط)

لتكن المتتالية العددية (U_n) المعرفة بـ : $U_0 = -\frac{5}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n - 1$.

1 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n \leq -\frac{3}{2}$.

(ب) أدرس إتجاه تغير المتتالية (U_n) ، ثم إستنتج أنها متقاربة .

(ج) أحسب نهاية المتتالية (U_n).

2 برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $U_n = -\left(\frac{1}{3}\right)^n - \frac{3}{2}$.

لتكن (V_n) المتتالية المعرفة بـ : $V_0 = 0$ و من أجل كل عدد طبيعي n لدينا : $V_{n+1} = V_n + U_n + \frac{3}{2}$.

1 بين أن المتتالية (V_n) متناقصة تماما على $\mathbb{N}$.

2 (أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $V_n = -\left(1 + \left(\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right)$

(ب) إستنتج أنه من أجل كل عدد طبيعي n : $V_n = -\frac{3}{2}\left(1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

(ج) أحسب $\lim_{n\to+\infty} V_n$ ، ثم إستنتج أن المتتاليتين (U_n) و (V_n) متجاورتان.

3 بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n :

$$\ln\left(\frac{2}{3}V_0 + 1\right) + \ln\left(\frac{2}{3}V_1 + 1\right) + \ldots + \ln\left(\frac{2}{3}V_n + 1\right) = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

⚠ إقلب الصفحة .

تمرين 03 (8 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0;+\infty[$ ب : $f(x)=x\ln x-\frac{1}{2}(\ln x)^2$ ،وليكن (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد و متجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1 (أ) أحسب : $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0} f(x)$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا.

(ب) بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

2 (أ) تحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ لدينا : $f'(x)=1+\frac{(x-1)\ln x}{x}$.

(ب) أثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]0;+\infty[$ فان : $(x-1)\ln x\geq 0$، ثم إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

3 أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة 1.

4 نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=f(x)-x+1$، وجدول تغيراتها يعطى كما يلي :

x	0 $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

(أ) أحسب $g(1)$ ، ثم استنتج إشارة $g(x)$ من أجل $x>0$.

(ب) إستنتج أن النقطة $A(1;0)$ هي نقطة إنعطاف للمنحنى (C_f).

(ج) بين أن المعادلة $g(x)=1$ تقبل في المجال $]0;+\infty[$ حلا وحيدا α حيث : $3,3<\alpha<3,4$.

5 بين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=x$ يقطع (C_f) في النقطة ذات الفاصلة α.

6 أنشئ كلا من (T)، (Δ) و المنحنى (C_f).

7 نسمي A مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) ، حامل محور الفواصل و المستقيمين اللذين معادلتاهما : $x=1$ و $x=e$.

(أ) باستعمال المكاملة بالتجزئة ، بين أن : $\int_1^e x\ln x\,dx=\frac{e^2+1}{4}$.

(ب) بين أن الدالة : $x\mapsto x(\ln x)^2-2x\ln x+2x$ هي دالة أصلية للدالة : $x\mapsto(\ln x)^2$ على $]0;+\infty[$.

(ج) إستنتج أن : $A=\frac{e^2-2e+5}{4}$ u.a.

☺ بالتوفيق للجميع .