مدرسة "الرّجاء والتفوّق" الخاصّة
Ecole Erradja wa Tafaouk
ÉCOLE PRIVÉE

المادّة: رياضيات
المستوى: 3 ت إ

التوقيت: 3ســـا
التاريخ: 2023/03/08

امتحان الفصل الثاني

التمرين الأول: (4 نقاط)

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=e^{x}+4e^{-x}-5$ و ليكن $(\mathscr{C})$ تمثيلها البياني في معلم متعامد ومتجانس.
اختر اقتراح واحد من بين الاقتراحات الثلاثة لكل سؤال مع التعليل:

السؤال	الإقتراح الأول	الإقتراح الثاني	الإقتراح الثالث
المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلين في $\mathbb{R}$ هما:	$\ln 4$ ، $\ln 2$	1 ، 4	0 ، $\ln 4$
(C) يقبل مماس عند النقطة ذات الفاصلة 0 معادلته:	$y=3x+1$	$y=-3x$	$y=3x$
الدالة الأصلية لـ f و التي تنعدم عند $x=0$:	$F(x)=e^{x}+4e^{-x}-5x+3$	$F(x)=e^{x}-4e^{-x}-5x+3$	$F(x)=e^{x}-4e^{-x}-5x$
القيمة المتوسطة m للدالة f على المجال $[0;1]$ هي:	$m=e-\frac{4}{e}-2$	$m=e-\frac{4}{e}+3$	$m=\frac{1}{e}-5$

التمرين الثاني: (4 نقاط)

I- نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بحدها الأول $u_0=12$ و بالعلاقة: $u_{n+1}=\frac{2}{3}u_n+1$

1) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن: $u_n>3$

2) أدرس اتجاه تغير المتتالية (u_n). واستنتج تقاربها.

II- لتكن المتتالية العددية (v_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $v_n=u_n+\alpha$ حيث α عدد حقيقي.

1) عين قيمة α حتى تكون (v_n) هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

2) أكتب عبارة v_n بدلالة n ثم استنتج عبارة u_n بدلالة n.

3) أحسب نهاية المتتالية (u_n).

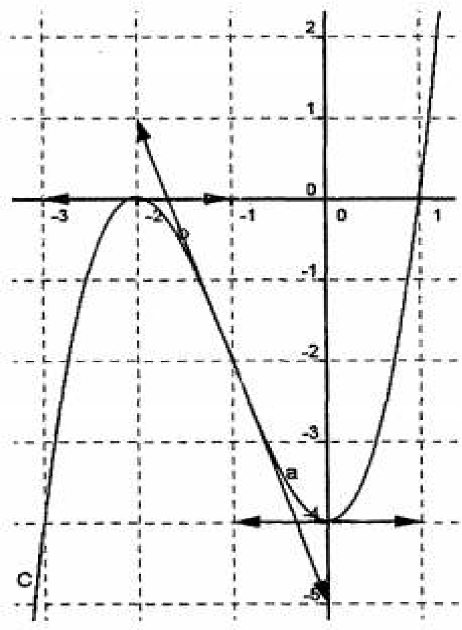
4) ما طبيعة المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n=\ln(v_n)$

5) أحسب المجموع s_n بدلالة n حيث: $s_n=v_0+v_1+...+v_n$

6) أحسب الجداء p_n بدلالة n حيث: $p_n=(u_0-3)\times(u_1-3)\times...\times(u_n-3)$

التمرين الثالث: (4 نقاط)

لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بمنحناها البياني (C) في معلم متعامد ومتجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$. (T) مماس للمنحني عند النقطة $I(-1,-2)$ (الشكل المقابل)



بالقراءة البيانية:

1) أدرس اشارة $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

2) عين اشارة $f(x)$ على $\mathbb{R}$.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C) و (T).

4) أحسب $f(-1)$ ، $f'(-1)$، $f''(-1)$.

5) أنشئ جدول تغيرات الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $g:x\to[f(x)]^2$

6) اعتمادا على (C) أنشئ (C') منحني الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ:

$h:x\to|f(x)|-1$

7) نفرض عبارة الدالة f هي: $f(x)=ax^3+bx^2-4$ حيث a و b أعداد حقيقية. عين a و b.

التمرين الرابع: (8 نقاط)

I- لتكن الدالة g المعرفة على $]0,+\infty[$ كما يلي: $g(x)=-2x^2+2-\ln x$

1) أدرس تغيرات الدالة g وشكل جدول تغيراتها

2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج اشارة $g(x)$ على $]0,+\infty[$

II- الدالة f معرفة على $]0,+\infty[$ بـ: $f(x)=\dfrac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب الى معلم متعامد ومتجانس.

1) عين نهايتي الدالة f عند حدود مجموعة التعريف

2) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-(-2x+2e)\right]$ فسر النتيجة بيانيا.

3) أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (Δ) ذو المعادلة $y=-2x+2e$

4) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0,+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

5) استنتج تغيرات الدالة f وشكل جدول تغيراتها

6) بين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا a حيث: $0.4<a<0.5$

7) أنشئ (C_f) و (Δ).

8) أحسب التكامل : $I=\int_1^2\dfrac{-1+\ln x}{x}$ (لاحظ أن : $\dfrac{-1+\ln x}{x}=\dfrac{1}{x}(-1+\ln x)$)

9) أحسب مساحة الحيز المحدد بالمنحني (C_f) و محور الفواصل والمستقيمين: $x=1$ و $x=2$

تصحيح الامتحان الثاني: 3ت ع

تمرين 01:

1) المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلان هما $0, \ln 4$

2) (C_f) تقبل مماس عند 0 معادلته $y=-3x$

3) الدالة الأصلية لـ f التي تنعدم عند 0 هي $F(x)=e^{x}-4e^{-x}-5x+3$

4) القيمة المتوسطة m للدالة f هي

$$m=e-\frac{4}{e}-2$$

ت 02:

$$\begin{cases} U_0=12 \\ U_{n+1}=\frac{2}{3}U_n+1 \end{cases}$$

1) البرهان أن $U_n>3$

$P(0)$: $U_0>3$ ، $12>3$ محققة $P(0)$

$P(n)$: $U_n>3$

$P(n+1)$: $U_{n+1}>3$

لدينا $U_n>3 \Rightarrow \frac{2}{3}U_n>2 \Rightarrow \frac{2}{3}U_n+1>3$

ومنه $P(n)$ محققة من أجل كل عدد طبيعي.

2) اتجاه التغير: $U_{n+1}-U_n=\frac{2}{3}U_n+1-U_n$

$$=-\frac{1}{3}U_n+1$$

لدينا $U_n>3 \Rightarrow -\frac{1}{3}U_n<-1 \Rightarrow -\frac{1}{3}U_n+1<0$

وبالتالي (U_n) متناقصة تماما.

التقارب: بما أن (U_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل بـ 3 اذن (U_n) متقاربة.

$$V_n=U_n+\alpha$$

قيمة α:

$$V_{n+1}=U_{n+1}+\alpha=\frac{2}{3}U_n+1+\alpha$$

$$=\frac{2}{3}(V_n-\alpha)+1+\alpha$$

$$=\frac{2}{3}V_n+\frac{-2\alpha+3+3\alpha}{3}$$

$$=\frac{2}{3}V_n+\frac{\alpha+3}{3}$$

$$\alpha+3=0$$

$$\boxed{\alpha=-3}$$

$$V_0=U_0-3=12-3=\boxed{9}$$

ج) عبارة V_n:

$$V_n=V_0\cdot q^n=9\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

عبارة U_n:

$$U_n=V_n+3=9\left(\frac{2}{3}\right)^n+3$$

$$\lim_{n\to+\infty}U_n=\lim_{n\to+\infty}9\left(\frac{2}{3}\right)^n+3=3$$

$$W_n=\ln(V_n)$$

$$W_{n+1}=\ln(V_{n+1})$$

$$W_{n+1}-W_n=\ln(V_{n+1})-\ln V_n=\ln\left(\frac{V_{n+1}}{V_n}\right)=\ln\left(\frac{2}{3}\right)$$

حسابية أساسها $\ln\frac{2}{3}$.

المجموع:

$$S_n=V_0+V_1+\dots+V_n=V_0\left(\frac{q^{n+1}-1}{q-1}\right)=9\left(\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1}{\frac{2}{3}-1}\right)$$

$$=-27\left(\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}-1\right)$$

الجداء:

$$P_n=(U_0-3)\times(U_1-3)\times\dots\times(U_n-3)$$

$$=V_0\times V_1\times\dots\times V_n$$

$$=9\left(\frac{2}{3}\right)^0\times 9\left(\frac{2}{3}\right)^1\times\dots\times 9\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$=9^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{0+1+\dots+n}$$

$$=9^{n+1}\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{(n+1)(n)}{2}}$$

ت 03:

أ) إشارة $f'(x)$:

x		-2		0	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f:

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ ↗	0	↘ -4 ↗	$+\infty$

ب) إشارة $f(x)$:

x		-2		1	
$f(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$

دراسة الوضع النسبي:

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
الوضعية	(C_f) تحت (T)	(C_f) يخترق (T)	(C_f) فوق (T)

x	0		$+\infty$
$g(x)$	‖	$+\infty \searrow -\infty$	

$g(1)=0$

إشارة $g(x)$

x	0		1		
		$+$	0	$-$	

$$f(x)=\frac{-1+\ln x}{x}-2x+2e$$

$$\lim_{x\to 0} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-(-2x+2e)=0$$

$y=-2x+2e$ م.م مائل لجوار $+\infty$:

الوضعية:

x	0		e		$+\infty$
الوضعية	‖	(C_f) تحت (Δ)	تقاطع	(C_f) فوق (Δ)	

$$f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$$

اتجاه تغير f:

لدينا $x^2>0$ اذن اشارة $f'(x)$ من اشارة البسط

	0		1		
		$+$	0	$-$	

f متزايدة تماما على $]0,1]$ و متناقصة تماما على $[1,+\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	‖ $-\infty$	$\nearrow$	$2,4$	$\searrow$	$-\infty$

نبين أن المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α: $0,4<\alpha<0,5$

f مستمرة ومتزايدة تماما على $]0,4\,;0,5[$

$f(0,4)\times f(0,5)<0$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $f(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α.

$$I=\int_1^2 \frac{-1+\ln x}{x}\,dx=\left[-\ln x+\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2=-0,45$$

المساحة:

$$S=\int_1^2 f(x)\,dx\simeq 1,98\ u.a$$

$f(-1)=-2$ ، $f'(-1)=-3$

$f''(-1)=0$ (نقطة انعطاف)

$$g(x)=[f(x)]^2$$

$$g'(x)=2f'(x)\cdot f(x)$$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$2f'(x)$		$+$	0	$-$	|	$+$	|	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

g متناقصة تماما على $]-\infty,-2]$ و $[0,1]$

و متزايدة تماما على $[-2,0]$ و $[1,+\infty[$.

$$f(x)=ax^3+bx^2-4$$

$f(-1)=-2$

$f'(-1)=-3$

$-a+b-4=-2$

$\boxed{-a+b=2}$

$f'(x)=3ax^2+2bx$

$\boxed{3a-2b=-3}$

$$\begin{cases}-2a+2b=4\\ 3a-2b=-3\end{cases}$$

بالجمع: $\boxed{a=1}$

بالتعويض: $\boxed{b=3}$

ت 04:

$$g(x)=-2x^2+2-\ln x$$

$\lim_{x\to 0} g(x)=+\infty$ ، $\lim_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$

$$g'(x)=-4x-\frac{1}{x}<0$$

g متناقصة تماما على $]0,+\infty[$