الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

مديرية التربية لولاية تبسة — ثانوية محفوظ سعد -بئر العاتر-

امتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي — دورة مـاي 2021

الشعبة : علوم تجريبية

اختبار في مادة : الرياضيات — المدة :03 سا و نصف

على المتـرشـح أن يختار أحـد الموضـوعيـن الآتيـين:

المـوضـوع الأول

التمـرين الأول: (3 نقاط)

كل سؤال من الأسئلة التالية مستقل عن الأسئلة الأخرى وله جواب واحد صحيح فقط، عين الجواب الصحيح معللا اختيارك.

1. نعتبر العدد المركب $z=\dfrac{2+4i}{2-i}$
   ❶ $z=\dfrac{2}{3}i$. ❷ $z=\bar{z}$. ❸ z تخيلي صرف.
2. نعتبر العدد المركب $z=\sqrt{3}-i$
   ❶ $-\dfrac{5}{6}\pi$ عمدة لـ z. ❷ $-\dfrac{\pi}{6}$ عمدة لـ z. ❸ z^2 عدد حقيقي.
3. z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ ، الشكل الجبري لـ z هو :
   ❶ $-\dfrac{8}{3}-2i$. ❷ $\dfrac{8}{3}+2i$. ❸ $\dfrac{8}{3}-2i$.

التمرين الثاني: (6 نقاط)

نعتبر المتتالية (u_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $u_n=\dfrac{n(n+2)}{(n+1)^2}$.

المتتالية (v_n) معرفة بـ: $v_1=u_1$ و $v_2=u_1\times u_2$ ، ومن أجل كل عدد طبيعي $n\geq 3$:

$v_n=u_1\times u_2\times\cdots\times u_n=v_{n-1}\times u_n$.

1. تحقق أن $v_2=\dfrac{2}{3}$ ثم احسب v_3.
2. أ) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $u_n=1-\dfrac{1}{(n+1)^2}$.
   ب) بين أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $0<u_n<1$.
3. أ) أثبت أن المتتالية (v_n) متناقصة تماما.
   ب) برر كون (v_n) متتالية متقاربة.

4. أ) تحقق أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $v_{n+1} = v_n \times \dfrac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

ب) برهن بالتراجع أنه من اجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $v_n = \dfrac{n+2}{2(n+1)}$.

ج) احسب نهاية (v_n).

5. نعتبر المجموع S_n المعرف من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n بـ: $S_n = ln(u_1) + ln(u_2) + \cdots + ln(u_n)$.
أثبت ان : $S_7 = 2S_1$.

التمرين الثالث: (4 نقاط)

صندوق يحتوي على ثماني كريات لانفرق بينها عند اللمس موزعة كما يلي : أربع كريات حمراء مرقمة بـ: 2 ، 2 ، 1 ، 1 وثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: 3 ، 2 ، 3− وكرية بيضاء تحمل الرقم 1−.

1. نسحب عشوائيا أربع كريات في آن واحد. احسب احتمال الأحداث التالية:
A: " الحصول على أربع كريات تحمل نفس اللون ".
B: " الحصول على كريتين خضراويتين على الأقل ".
C: " الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم ".
D: " الحصول على أربع كريات جداء أرقامها سالب ".

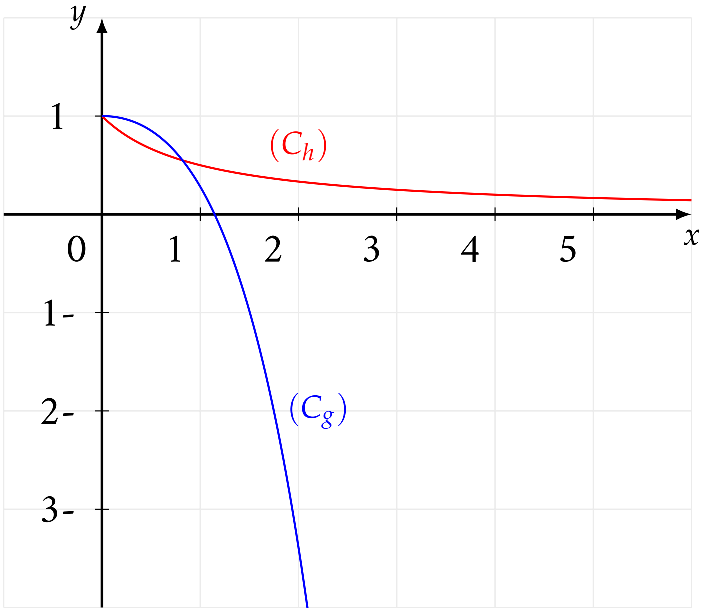
2. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

أ) عين قيم المتغير العشوائي X ثم عرف قانون احتماله.

ب) احسب $E(X)$ الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X.

التمـرين الرابع: (7 نقاط)

الجزء الأول: في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ (C_g) و (C_h) هما التمثيلان البيانيان على الترتيب للدالتين g و h المعرفتين على $\left[0;+\infty\right[$ بـ $g(x)=x+2-e^x$ و $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$.



العدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل.

1. أ) بقراءة بيانية تحقق أن $1,14<\alpha<1,15$ ، ثم أعط إشارة $g(x)$ على المجال $\left[0;+\infty\right[$.

ب) تحقق أن : $e^\alpha=\alpha+2$.

ج) احسب $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)-1}{x}$، ثم فسر النتيجة بيانيا .

الجزء الثاني:

1. لتكن f الدالة المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$، (C_f) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

أ) أثبت أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$ ، ثم فسر النتيجة بيانيا .

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left[0;+\infty\right[$ لدينا: $f'(x)=\dfrac{e^xg(x)}{(1+xe^x)^2}$.

ج) استنتج اتجاه تغير f ، ثم شكل جدول تغيراتها.

د) أثبت أن: $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$ ثم أعط أدق حصر ممكن لـ $f(\alpha)$.

2. أ) تحقق أن من أجل كل عدد حقيقي $x\in\left[0;+\infty\right[$: $h(x)-f(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)(1+xe^x)}$.

ب) استنتج الوضع النسبي لـ (C_f) و (C_h).

ج) أعد تمثيل (C_h) على ورقة الإجابة ثم مثل (C_f).

انتهى المـوضـوع الأول

المـوضـوع الثاني

التمـرين الأول: (3,5 نقاط)

في ثانوية محفوظ سعد شكل أستاذ رفقة سبعة تلاميذ خمسة منهم ذكور أحدهم اسمه "عياش" والأخريات إناث ناديا لنصرة فلسطين والتعريف بالقضية الفلسطينية.
يريد الأستاذ رئيس تحرير المجلة أن يختار معه من خلال التلاميذ السبعة لجنة الإشراف على مجلة "القدس"، يقوم فيها تلميذ واحد بجمع المقالات، وتلميذ آخر بجمع الخواطر والقصائد من تلاميذ الثانوية، وتلميذ آخر بتصميم المجلة.

1. أثبت أن عدد اللجان التي يمكن تكوينها هو: 210 لجنة.
2. احسب احتمال الأحداث التالية:
   الحدث A: تكوين لجنة تضم عياش.
   الحدث B: تكوين لجنة تضم تلميذا واحدا وتلميذتين.
   الحدث C: تكوين لجنة تضم ثلاث تلميذات.
   الحدث D: تكوين لجنة لا تضم التلميذات.
3. نعتبر X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل اختيار عدد الذكور في اللجنة المكونة.
   أ) عين القيم الممكنة للمتغير العشوائي.
   ب) عرف قانون احتمال المتغير العشوائي X.

التمـرين الثاني: (5,5 نقاط)

لتكن المتتاليتان (u_n) و (v_n) المعرفتان على $\mathbb{N}$ بـ: $u_n = \dfrac{2^n + 3n - 1}{2}$ ، $v_n = \dfrac{2^n - 3n + 1}{2}$ على الترتيب

1. احسب u_0 و u_1 و u_2 و v_0 وv_1 و v_2.
2. لتكن المتتالية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $w_n = u_n - v_n$
   أ) أثبت أن (w_n) متتالية حسابية معينا أساسها وحدها الأول.
   ب) احسب المجموع $S = w_0 + w_1 + \cdots w_{10}$.

   لتكن المتتالية (t_n) المعرفة على $\mathbb{N}$ بـ: $t_n = u_n + v_n$
3. أ) أثبت أن (t_n) متتالية هندسية معينا أساسها وحدها الأول.
   ب) احسب المجموع $S' = t_0 + t_1 + \cdots t_{10}$.
4. ليكن $S_1 = u_0 + u_1 + \cdots + u_{10}$ ، $S_2 = v_0 + v_1 + \cdots + v_{10}$.
   أ) تحقق أن $S = S_1 - S_2$ و $S' = S_1 + S_2$
   ب) استنتج قيمة كل من S_1 و S_2.

التمـرين الثالث: (4 نقاط)

في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ نعتبر كثير الحدود $P(z)$ حيث : $P(z)=az^2+bz+c$

1. عين الأعداد الحقيقية a، b، c إذا علمت أن: $P(1)=1$ و $P(1+i)=0$.
2. استنتج في $\mathbb{C}$ حلول المعادلة $P(z)=0$.
3. المستوي المركب منسوب إلى معلم متعامد ومتجانس $(O;\vec{u},\vec{v})$ ، نعتبر النقطتين A و B لاحقتاهما على الترتيب : $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$

أ) اكتب كلا من z_A و z_B على الشكل الأسي.

ب) بين أن المثلث OAB قائم ومتساوي الساقين.

ج) لتكن النقطة C التي لاحقتها $z_c=2$ ، بين أن الرباعي $OACB$ مربع.

التمـرين الرابع: (7 نقاط)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-1;0[\cup]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ ، و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) احسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

ب) احسب $\lim_{x\to0} f(x)$ ، $\lim_{x \overset{>}{\to} -1} f(x)$ ، وفسر النتيجتين بيانيا.

2. أ) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي $x\in]-1;0[\cup]0;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{x+2}{x(x+1)}$.

ب) ادرس اتجاه تغير f وشكل جدول تغيراتها.

3. أ) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة : $x^2=x+1 \quad \cdots \quad (E)$.

ب) نضع α الحل الموجب تماما للمعادلة (E) و β الحل السالب تماما. بين أن $\beta=-\dfrac{1}{\alpha}$.

ج) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في النقطتين ذات الفاصلتين α و $-\dfrac{1}{\alpha}$.

د) بين أن $y=\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)$ معادلة لـ (T) مماس (C_f) عند النقطة ذات الفاصلة α.

هـ) تحقق أن (T) يشمل النقطة $A\left(0;-1-\dfrac{1}{\alpha^2}\right)$.

4. مثل كلا من المماس (T) والمنحنى (C_f).

انتهى المـوضـوع الثاني

حل مقترح لامتحان بكالوريا تجريبية للتعليم الثانوي "شعبة علوم "تجريبية"

الموضوع الأول

التمرين الأول

1- $z=\frac{2+4i}{2-i}=\frac{(2+4i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{4+2i+8i-4}{4+1}=\frac{10i}{5}=2i$

ومنه z تخيلي صرف، الإجابة الصحيحة هي ❷

2- $z=\sqrt{3}-i$

لدينا $|z|=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+(1)^2}=2$ و $\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\frac{-1}{2}\end{cases}$ ومنه $k\in\mathbb{Z}$ $\quad Arg(z)=-\frac{\pi}{6}+2k\pi$

أي أن الإجابة الصحيحة هي ❷

3- z عدد مركب يحقق $\bar{z}+|z|=6+2i$ نستعمل الشكل الجبري لـ z أي نضع $z=x+iy$ حيث x و y عددان حقيقيان، فيصبح لدينا: $x-iy+\sqrt{x^2+y^2}=6+2i$

ومنه: $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+y^2}=6\\ -y=2\end{cases}$ أي $\begin{cases}x+\sqrt{x^2+4}=6\\ -y=2\end{cases}$ نحل في $\mathbb{R}$ المعادلة $x+\sqrt{x^2+4}=6$

لدينا: $x^2+4=(6-x)^2$ $\;x^2+4=x^2+36-12x$ ومنه: $x=\frac{32}{12}=\frac{8}{3}$

إذن: $z=\frac{8}{3}-2i$ والإجابة الصحيحة هي ❸

ملاحظة

يمكن للتلميذ أن يعوض مباشرة بـ $z=\frac{8}{3}-2i$ في العلاقة المعطاة ليتحقق أن تلك هي الإجابة الصحيحة الوحيدة الموجودة.

التمرين الثاني

1- التحقق من أن $v_2=\frac{2}{3}$

لدينا $v_2=u_1\times u_2=\frac{(1)(3)}{(2)^2}\times\frac{(2)(4)}{(3)^2}=\frac{2}{3}$

✫ حساب v_3 $\qquad v_3=v_2\times u_3=\frac{2}{3}\times\frac{3(5)}{(4)^2}=\frac{5}{8}$

2- ا) إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $\quad u_n=1-\frac{1}{(n+1)^2}$

لدينا: $u_n=\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}=\frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2}=\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2}=1-\frac{1}{(n+1)^2}$ وهو المطلوب.

ب) لدينا $n \succ 0$ و $n+2 \succ 0$ و $(n+1)^2 \succ 0$ ومنه $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2} \succ 0$

$u_n \succ 0 \qquad ...(1)$

ولدينا: $0 \prec \frac{1}{(n+1)^2}-$ أي: $1 \prec \frac{1}{(n+1)^2}-1$ ومنه $...(2) \qquad u_n \prec 1$ من (1) و (2) ينتج $0 \prec u_n \prec 1$

3- ا) إثبات كون (v_n) متناقصة تماما.

☆ طريقة (1)

$v_{n+1}-v_n = v_n u_{n+1}-v_n = v_n\left(u_{n+1}-1\right) =$

$v_n\left(1-\frac{1}{(n+2)^2}-1\right) = -\frac{v_n}{(n+2)^2}$

ولدينا من أجل كل عدد طبيعي n

$u_1 \succ 0$

$u_2 \succ 0$

.

.

.

$u_n \succ 0$

ومنه: $u_1 \times u_n \times ... \times u_n \succ 0$ أي: $v_n \succ 0$ ومنه

$-\frac{v_n}{(n+2)^2} \prec 0$

أي أن: (v_n) متناقصة تماما

☆ طريقة (2)

بما انه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n:

$v_n \succ 0$ (من طريقة (1)) نقارن بين $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ و 1

$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{v_n u_{n+1}}{v_n} = u_{n+1}$ مما سبق $u_{n+1} \prec 1$ ومنه

$\frac{v_{n+1}}{v_n} \prec 1$ إذن (v_n) متناقصة تماما.

ب) (v_n) متناقصة تماما ومحدودة من الأسفل إذن فهي متقاربة.

4- ا) التحقق من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n أن: $v_{n+1} = v_n\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

لدينا $u_{n+1} = \frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$

ومنه: $v_{n+1} = v_n u_{n+1} = v_n\frac{(n+1)(n+3)}{(n+2)^2}$ وهو المطلوب.

ب) البرهان بالتراجع للقضية التالية:

من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n : $\qquad v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$

نتحقق من صحة $p\,(1)$ (الخاصية الابتدائية)

من أجل $n=1$ لدينا: $v_1 = \frac{0+2}{2(0+1)} = \frac{2}{3}$ وبالتالي $p\,(1)$ صحيحة.

نفرض صحة $p\,(n)$ من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n ونبرهن صحة $p\,(n+1)$ أي $v_{n+1} = \frac{n+3}{2(n+2)}$

لدينا حسب الفرض $v_n = \frac{n+2}{2(n+1)}$ ومنه

$$v_n u_{n+1} = \frac{n+3}{2\,(n+2)}u_{n+1}$$

$$v_{n+1} = \left(\frac{n+3}{2\,(n+2)}\right)\left(\frac{(n+1)\,(n+3)}{(n+2)^2}\right)$$

بالاختزال نجد:

$v_{n+1}=\frac{n+3}{2(n+2)}$ أي أن $p(n+1)$ صحيحة

ج) حساب نهاية (v_n)

$$\lim_{n\to+\infty} v_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+3}{2(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{2n}=\frac{1}{2}$$

5- إثبات أن: $S_7=2S_1$

$S_7=2S_1$ تكافئ $\ln(u_1)+\ln(u_2)+...+\ln(u_7)=2\ln(u_1)$ تكافئ $\ln(u_2\times u_3\times ...\times u_7)=\ln(u_1)$

تكافئ $\frac{v_2}{v_1}\times\frac{v_3}{v_2}\times ...\times\frac{v_7}{v_6}=u_1$ تكافئ $\frac{v_7}{v_1}=u_1$ تكافئ $\frac{\frac{9}{2(8)}}{\frac{3}{4}}=\frac{3}{4}$ تكافئ $\frac{9}{16}=\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}$ ومنه المطلوب. $\frac{9}{16}=\frac{9}{16}$

التمرين الثالث

عدد الإمكانيات الكلية: $C_4^8=\frac{8!}{4!4!}=70$

-1

$$p(A)=\frac{C_4^4}{C_4^8}=\frac{1}{70}\qquad p(B)=C_3^3C_5^1+C_3^2C_5^2=\frac{5+30}{70}=\frac{35}{70}$$

$$p(C)=\frac{C_1^1C_2^1+C_1^1C_1^1+C_3^2C_1^1C_1^1}{C_4^8}=\frac{2+3}{70}=\frac{5}{70}\qquad p(D)=\frac{C_6^3C_2^1}{C_4^8}=\frac{40}{70}$$

X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة سحب عدد الكريات الحمراء المتبقية في الكيس.

ا) القيم الممكنة لـ: X : $X=\{0,1,2,3,4\}$

$$p(X=0)=\frac{C_4^4}{C_4^8}=\frac{1}{70}\qquad p(X=1)=\frac{C_4^1C_4^3}{C_4^8}=\frac{16}{70}$$

$$p(X=2)=\frac{C_4^2C_4^2}{C_4^8}=\frac{36}{70}\qquad p(X=3)=\frac{C_4^3C_4^1}{C_4^8}=\frac{16}{70}\qquad p(X=4)=\frac{C_4^4}{C_4^8}=\frac{1}{70}$$

قانون الاحتمال

$X=x_i$	0	1	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{1}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{36}{70}$	$\frac{16}{70}$	$\frac{1}{70}$

ب) حساب الأمل الرياضياتي للمتغير العشوائي X

$$E(X)=\sum_{i=1}^{5}p_ix_i=0\times\frac{1}{70}+1\times\frac{16}{70}+...+4\times\frac{1}{70}=\frac{140}{70}=2$$

التمرين الرابع

الجزء الأول

في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ (C_g) و (C_h) هما التمثيلان البيانيان على الترتيب للدالتين g و h المعرفتين على $\left[0;+\infty\right[$ بـ $g(x)=x+2-e^x$ و $h(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

العدد الحقيقي α هو فاصلة نقطة تقاطع (C_g) مع حامل محور الفواصل.

1- ا) بقراءة بيانية نرى أن g متناقصة تماما على المجال $]0,+\infty[$ و

$$\begin{cases} g(0)=1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty \end{cases}$$

ومنه حسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$

لدينا $g(1.14)\simeq -0.07$ و $g(1.15)\simeq 0.008$ ومنه $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$ ومنه

x	0 $\qquad\qquad$ α $\qquad\qquad$ $+\infty$
$g(x)$	$+$ $\qquad\qquad$ 0 $\qquad\qquad$ $-$

ب) لدينا $g(\alpha)=0$ يكافئ $\alpha+2-e^\alpha=0$ يكافئ $e^\alpha=\alpha+2$ وهو المطلوب.

ج) حساب النهاية $\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x}$

$\lim\limits_{x\to0}\frac{g(x)-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x+1-e^x-1}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{x}-\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1-1=0$ لأن $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{e^x-1}{x}\right)=1$

التفسير البياني (C_f) يقبل نصف مماس أفقي $y=1$ معادلة له لأجل كل $x\in[0,+\infty[$

الجزء الثاني

f الدالة المعرفة على $\left[0;+\infty\right[$ بـ: $f(x)=\dfrac{e^x-1}{xe^x+1}$. (C_f) تمثيلها البياني في نفس المعلم السابق.

1- ا) إثبات أن $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{xe^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x(1-e^{-x})}{e^x(x+e^{-x})}=0$$

(C_f) يقبل مستقيما مقاربا أفقيا $y=0$ معادلة له.

ب) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\left[0;+\infty\right[$ ومن أجل كل عدد حقيقي: $x\in\left[0;+\infty\right[$

$$f'(x)=\frac{e^x(xe^x+1)-(x+1)e^x(e^x-1)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^x(x+2-e^x)}{(xe^x+1)^2}=\frac{e^xg(x)}{(xe^x+1)^2}$$

إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

ومنه f متزايدة تماما على المجال $[0,\alpha]$ ومتناقصة تماما على المجال $[\alpha,+\infty[$

جدول تغيرات الدالة f

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

ج) لدينا $f(\alpha)=\frac{e^{\alpha}-1}{\alpha e^{\alpha}+1}$ ونعلم أن $e^{\alpha}=\alpha+2$ ومنه: $f(\alpha)=\frac{\alpha+2-1}{\alpha(\alpha+2)+1}=\frac{\alpha+2-1}{\alpha^2+2\alpha+1}=\frac{\alpha+1}{(\alpha+1)^2}=\frac{1}{\alpha+1}$

إعطاء أدق حصر ممكن لـ $f(\alpha)$ لدينا $1.14 \prec \alpha \prec 1.15$ ومنه $\frac{1}{1.15} \prec \frac{1}{\alpha} \prec \frac{1}{1.14}$

ومنه $0.86 \prec f(\alpha) \prec 0.87$

2- ا) التحقق أنه من أجل كل عدد حقيقي $x \in [0,+\infty[$

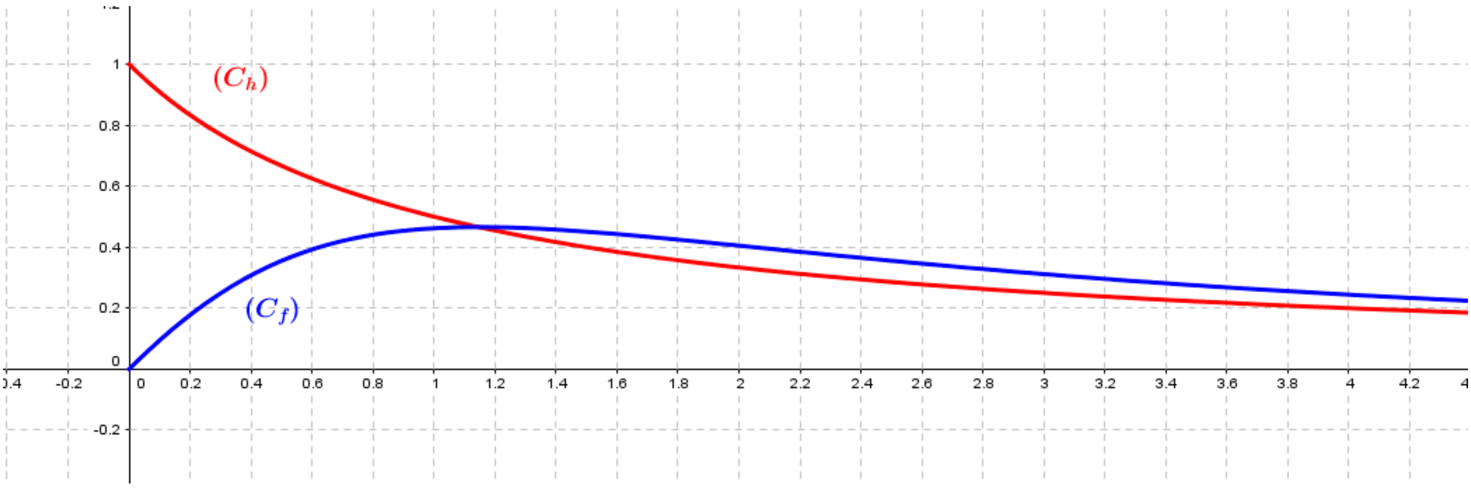
لدينا:

$$\begin{aligned} h(x).f(x) &= \frac{1}{x+1}-\frac{e^x-1}{xe^x+1}=\frac{xe^x+1-(e^x-1)(x+1)}{(x+1)(xe^x+1)} \\ &= \frac{xe^x+1-xe^x-e^x+x+1}{(x+1)(xe^x+1)} \\ &= \frac{x+2-e^x}{(x+1)(xe^x+1)}=\frac{g(x)}{(x+1)(xe^x+1)} \end{aligned}$$

ب) لدينا $x+1 \succ 0$ و $xe^x+1 \succ 0$ لأن $e^x \geqslant 0$ إذن إشارة $h(x)-f(x)$ من إشارة $g(x)$

x	0	α	$+\infty$
الوضع النسبي بين (C_f) و(C_h)	(C_f) فوق (C_h)	(C_f) يقطع (C_h) في $(\alpha, \frac{1}{\alpha+1})$	(C_f) تحت (C_h)

3- التمثيلان البيانيان (C_h) و (C_f)



الموضوع الثاني

التمرين الأول

1- سيختار الأستاذ معه ثلاثة تلاميذ يعني $p=3$ من اجل سبعة تلاميذ هذا يعني $n=7$
ومنه عدد اللجان التي يمكن تكوينها: $A_7^3=210$

-2

$$p(A)=\frac{A_1^1\times A_6^2\times A_3^1}{A_7^3}=\frac{90}{210} \qquad p(B)=\frac{A_5^1\times A_2^2\times A_3^1}{A_7^3}=\frac{30}{210}$$

$$p(C)=0 \qquad p(D)=\frac{A_5^3}{A_7^3}=\frac{60}{210}$$

3- ا) في هذا السؤال ننبه أن لغة التمرين مهمة ويجب على التلميذ أن يركز جيدا، الاستاذ في اللجنة المكونة، ومنه القيم الممكنة للمتغير العشوائي X هي: $X=\{2,3,4\}$

ب)

$$p(X=2)=p(B)=\frac{30}{210} \quad p(X=3)=\frac{A_5^2\times A_2^1\times A_3^2}{A_7^3}=\frac{120}{210} \quad p(X=4)=p(D)=\frac{60}{210}$$

☆ قانون الاحتمال

$X=x_i$	2	3	4
$p(X=x_i)$	$\frac{30}{210}$	$\frac{120}{210}$	$\frac{60}{210}$

التمرين الثاني

1- حساب u_0 و u_1 و u_2 و v_0 وv_1 و v_2.

$$u_0=\frac{1}{2} \qquad u_1=2 \qquad u_2=\frac{9}{2} \qquad v_0=1 \qquad v_1=0 \qquad v_2=-\frac{1}{2}$$

2- ا) اثبات أن (w_n) متتالية حسابية معينا أساسها وحدها الأول

$$\begin{aligned}
w_{n+1}-w_n &= u_{n+1}-v_{n+1}-u_n+v_n \\
&= \frac{2^{n+1}+3(n+1)-1}{2}-\left(\frac{2^{n+1}-3(n+1)+1}{2}\right)-\left(\frac{2^n+3n-1}{2}\right)+\frac{2^n-3n+1}{2} \\
&= \frac{2^{n+1}+3n+2-2^{n+1}+3n+2-2^n-3n+1+2^n-3n+1}{2} \\
&= \frac{6}{2}=3
\end{aligned}$$

ومنه (w_n) متتالية حسابية أساسها $r=3$ وحدها الأول $w_0=-1$

ب) حساب المجموع:

لدينا $S=w_0+w_1+\ldots+w_{10}=\frac{(w_0+w_{10})}{2}\times(11)=\frac{(28)}{2}\times(11)=154$

3- ا) من أجل كل عدد طبيعي n لدينا $t_n=u_n+v_n=\frac{2^n+3n-1}{2}+\frac{2^n-3n+1}{2}=\frac{2\times 2^n}{2}=2^n$ ومنه (t_n) متتالية هندسية أساسها $q=2$ وحدها الاول $t_0=1$.

ب) حساب المجموع S'

لدينا $S'=t_0+t_1+\ldots+t_{10}=(1)\left(\frac{1-2^{11}}{1-2}\right)=-1+2^{11}=2^{11}-1$

4- ا) التحقق أن $S=S_1-S_2$

لدينا:

$$\begin{aligned}
S_1-S_2 &= (u_0+u_1+\ldots+u_{10})-(v_0+v_1+\ldots+v_{10}) \\
&= (u_0-v_0)+(u_1-v_1)+\ldots+(u_{10}-v_{10})=w_0+w_1+\ldots+w_{10}=S
\end{aligned}$$

طريقة (2) التحقق أن $S'=S_1+S_2$ بنفس الطريقة السابقة

ب) لدينا $\begin{cases} S_1-S_2=154 S_1+S_2=2^{11}-1 \end{cases}$ نحل جملة المعادلتين في $\mathbb{R}^2$

فنجد $S_1=\frac{2201}{2}$ و $S_2=\frac{1833}{2}$

التمرين الثالث

-1 تعيين a ، b و c

$$\begin{cases} P(1)=1 \\ P(1+i)=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a+b+c=1 \\ a(1+i)^2+0(1+i)+c=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c+(2a+b)i=0 \end{cases} \text{ يكافئ}$$

$$\begin{cases} a+b+c=1 \\ b+c=1 \\ 2a+b=0 \end{cases} \text{ يكافئ } \begin{cases} a=1 \\ b=-2 \\ c=2 \end{cases}$$

-2 $(1+i)$ هو جذر لـ $P(z)$ ومنه $(1+i)$ هو الجذر الآخر لـ $P(z)$ ، لأن $P(z)$ كثير حدود من الدرجة الثانية يقبل حلين مترافقين في $\mathbb{C}$

-3 ا) $z_A=1+i$ ، $z_B=1-i$ و $z_A=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}$ ، $z_B=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}}$

ب) $\frac{z_A}{z_B}=\frac{1+i}{1-i}=\frac{(1+i)^2}{2}=\frac{2i}{2}=i$ ولدينا $\left|\frac{z_A}{z_B}\right|=1$ و $Arg\left(\frac{z_A}{z_B}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه إذن المثلث OAB مثلث قائم في O ومتساوي الساقين.

ج) $z_C=2$ لدينا $OA=AC=BC=OB=\sqrt{2}$ و $\left(\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}\right)=\frac{\pi}{2}$ ومنه $OACB$ مربع طول ضلعه $\sqrt{2}$.

التمرين الرابع

-1 ا) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\frac{x^2}{x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)=+\infty$

ب) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=-\infty$ و $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ >}} f(x)=+\infty$ إذن (C_f) يقبل مستقيمين مقاربين عموديين $x=-1$ و $x=0$ معادلتان لهما على الترتيب.

-2 ا) f قابلة للاشتقاق على مجالات مجموعة تعريفها ومن أجل كل $x\in D_f$

$$f'(x)=\frac{\frac{2x(x+1)-x^2}{(x+1)^2}}{\frac{x^2}{x+1}}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{x^2}=\frac{x(x+2)}{x^2(x+1)}=\frac{(x+2)}{x(x+1)}$$

ب)

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$+$	

f متناقصة تماما على المجال $]-1,0[$ f متزايدة تماما على المجال $]0,+\infty[$

x	-1		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$-\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3- ا) $(E): x^2 = x+1$ حلا (E) هما $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

ب) نضع $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ و $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

لدينا $\alpha \times \beta = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) \times \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1$ ومنه $\beta = \frac{-1}{\alpha}$

ج) فاصلتا نقطة تقاطع (C_f) مع حامل محور الفواصل هما حلا المعادلة $f(x)=0$ في D_f

$f(x)=0$ تكافئ $\ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)=0$ تكافئ $\frac{x^2}{x+1}=1$ تكافئ $x^2 = x+1$ تكافئ (E) و α و β ينتميان إلى D_f

$$\begin{aligned}(T): y = f'(\alpha)(x-\alpha)+f(\alpha) y &= \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)}(x-\alpha) = \frac{(\alpha+1)+1}{\alpha(\alpha+1)}(x-\alpha)\\ &= \left(\frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha) = \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^3}+\frac{+1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)\\ &= \left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}\right)(x-\alpha)\end{aligned}$$

د) لدينا $\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\alpha^3}\right)(0-\alpha) = -1-\frac{1}{\alpha^2}$ ومنه $A \in (T)$

4- إنشاء (C_f) و (T)