

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين التاليين

الموضوع الأول :

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- عين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x - 5y = 3$

ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p; q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m = 8p + 1$ و $m = 5q + 4$

- بين أن الثنائية $(p; q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m \equiv 9[40]$

ج- عين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m \equiv 9[40]$

2. ليكن n عددا طبيعيا.

أ- بين أنه من أجل كل k من \mathbb{N} : $2^{3k} \equiv 1[7]$.

ب- ما هو باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 ؟

3. أ- حل العدد 1998 الى جداء عوامل أولية ثم استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998

ب- عين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2 - 34d^2 = 1998$

حيث $d = \text{pgcd}(a; b)$ و $m = \text{ppcm}(a; b)$

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع

(نسحب الكرة الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرة الموالية).

1 أحسب احتمال الحوادث التالية :

" A الحصول على الكرتيين بيضاويين "

" B الحصول على كرتيين من نفس اللون "

2 نعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرة بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرة سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كرتيين مجموع النقاط المحصل عليها .

أ. عين قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X و احسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

ب. عين قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة.

3 تخيف الى الكيس $n-3$ كرة سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

ما هو عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بحددها الأول $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي

$$n \text{ غير معدوم} : u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

1. أحسب الحدود u_2 و u_3 و u_4 ثم ضع تخميناً حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) .

2. أ- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n \leq n + 3$.

ب- أثبت أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم: $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n)

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $v_n = u_n - n$.

أ- بين المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول.

ب أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ثم أستنتج u_n بدلالة n .

4. نضع : $S_n = \frac{2}{3}v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n$ و $S_n' = u_1 + u_2 + \dots + u_n$

أحسب بدلالة n المجموعين S_n و S_n' ثم أحسب $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n}$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1. ادرس تغيرات الدالة g ثم شكل جدول تغيراتها

2. بين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,35 < \alpha < 0,36$ ثم استنتج إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} .

II - الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب :

$$f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.. (الوحدة 2 cm)

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = g(x)$ ثم أستنتج تغيرات الدالة f و شكل جدول تغيراتها.

3. أ. برهن أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$.

ب. حدد وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

4. أكتب معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات الفاصلة 0

5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C)

انتهى الموضوع الأول

الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

- أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبّرراً الإجابة .
- (1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$.
 - (2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0 [6]$ فإن $x \equiv 0 [6]$.
 - (3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.
 - (4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل $(4 + 10k; 9 + 24k)$ مع $k \in Z$.
 - (5) M و N عددان طبيعيين كتابتهما في النظام العشري هي : abc و \overline{bca} على الترتيب .
إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

التمرين الثاني: (04 نقاط)

- لدينا وعائين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء . نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .
1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

$$أ - \text{بين أن } P(A) = \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$$

$$ب \text{ عين النهاية } \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A)$$

$$2. \text{ نعتبر الحادثة } B \text{ الوعاء } U_2 \text{ يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . تحقق أن } P(B) = \frac{3}{2(n+3)}$$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

- أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n DA$.
 - ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n DA$.
 - ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئا
- اشرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 .

4. فيما يلي نفرض أن $n > 10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

$$\text{مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح } X = 2n - 20$$

$$أ - \text{عين قانون الاحتمال المتغير العشوائي } X$$

ب أحسب أمله الرياضياتي .

ج- بين أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 .

التمرين الثالث: (05 نقاط)

$$1. \begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases} \text{ : عين العددين المركبين } \alpha \text{ و } \beta \text{ حيث}$$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقها على الترتيب

$$z_I = 1 \text{ و } z_A = 1 - 2i \text{ و } z_B = -2 + 2i .$$

أ - أنشئ النقط I و A و B

ب عين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات القطر $[AB]$

3. D نقطة لاحقتها $z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$ أكتب z_D على شكل الجبري ثم بين أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) .

$$4. E \text{ نقطة من الدائرة } (C) \text{ لاحقتها } z_E \text{ حيث } z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$$

أ - أكتب العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي .

$$z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}i \text{ ب استنتج أن}$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

I - g دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ ب

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$

1. ادرس تغيرات الدالة g .

2. أحسب $g(1)$ ثم أستنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0; +\infty[$.

II - دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ ب

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2. بين أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما x : $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$. ثم شكل جدول تغيرات الدالة f

3. بين أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1 يطلب كتابة معادلته .

4. أ- بين أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C_f)

ب- أدرس وضعية (C_f) بالنسبة للمستقيم (Δ) .

5. أنشئ (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

6. ناقش بيانياً حسب قيم الوسيط m عدد حلول المعادلة $(m+1)x + \ln(x) = 0$.

انتهى الموضوع الثاني

التمرين الأول: (04 نقاط)

1. أ- تعين مجموعة الثنائيات $(x; y)$ من الأعداد الصحيحة حلول المعادلة $(E): 8x - 5y = 3$
 لدينا $8 = 5 + 3$ و منه $(F): 8(1) - 5(1) = 3 \dots (F)$ بطرح (F) من (E) نجد أن $8(x-1) = 5(y-1)$ و
 $pgcd(8;5)=1$ حسب مبرهنة غوص فإن $\begin{cases} x-1=5k \\ y-1=8k \end{cases} : k \in Z$ أي $\begin{cases} x=1+5k \\ y=1+8k \end{cases} : k \in Z$ إذن مجموعة الحلول هي
 $S = \{(1+5k; 1+8k) : k \in Z\}$
- ب. ليكن m عددا صحيحا بحيث توجد الثنائية $(p; q)$ من الأعداد الصحيحة تحقق: $m = 5q + 4$ و $m = 8p + 1$
 - إثبات أن الثنائية $(p; q)$ هي حل للمعادلة و استنتج أن: $m \equiv 9[40]$
 لدينا $8p + 1 = 5q + 4$ أي $8p - 5q = 3$ أي أن الثنائية $(p; q)$ حل للمعادلة (E) .
 $(p; q) = (1+5k; 1+8k)$ و منه $m = 8p + 1 = 8 + 40k + 1$ أي $m = 40k + 9$ إذن $m \equiv 9[40]$
- ج- تعين أصغر عدد صحيح m أكبر من 2000 و يحقق $m \equiv 9[40]$: $m \geq 2000$ أي أن $40k + 9 \geq 2000$ يعني
 أن $k \geq \frac{1991}{40}$ إذن $k \geq 50$ بالتعويض بأصغر عدد لي هو 50 نجد أن $m = 40 \times 50 + 9 = 2009$
2. ليكن n عددا طبيعيا.
- أ- إثبات أنه من أجل كل k من \mathbb{N} : $2^{3k} \equiv 1[7]$ لدينا $2^3 \equiv 1[7]$ بالرفع الى قوى k نجد $2^{3k} \equiv 1[7]$
- ب- باقي القسمة الإقليدية للعدد 2^{1442} على 7 : لدينا $1442 = 3 \times 480 + 2$ و $2^{3 \times 480} \equiv 1[7]$ بالضرب في 2^2
 نجد $2^{3 \times 480 + 2} \equiv 4[7]$ إذن باقي قسمة 2^{1442} على 7 هو 4 .
3. أ- تحللي العدد 1998 الى جداء عوامل أولية : $1998 = 2 \times 3^3 \times 37$
 استنتج الأعداد الطبيعية التي مربعاتها تقسم العدد 1998 : هي 1 و 3
- ب- تعين الثنائيات من الأعداد الطبيعية حيث: $m^2 - 34d^2 = 1998$ حيث $d = pgcd(a; b)$ و
 $m = ppcm(a; b)$ لدينا d قاسم للعدد m و منه d^2 قاسم للعدد $m^2 - 34d^2$ أي انه قاسم للعدد 1998 إذن
 $d^2 = 1$ أو $d^2 = 9$ إذن $d = 1$ أو $d = 3$
 لما $d = 1$: $m^2 = 34 + 1998$ أي $m^2 = 2032$ و 2032 ليس مربع تام إذن m غير موجودة لأنها عدد طبيعي .
 لما $d = 3$: $m^2 = 34 \times 9 + 1998$ أي $m^2 = 2304$ و منه $m = 48$: $a \cdot b = m \cdot d$ أي أن $a \cdot b = 144$ نضع $a = 3a'$ و
 $b = 3b'$ حيث $pgcd(a'; b') = 1$ و منه نجد $a' \cdot b' = 16$ يعني أن $(a'; b') = (1; 16)$ أو $(a'; b') = (16; 1)$ إذن
 $(a; b) = (3; 48)$ أو $(a; b) = (48; 3)$.

التمرين الثاني: (04 نقاط)

يحتوي كيس على 7 كرات بيضاء و 3 سوداء لا نفرق بينها باللمس نسحب عشوائيا كرتين من الكيس مع الإرجاع
 (نسحب الكرية الأولى نسجل لونها ثم نعيدها الى الكيس ثم نسحب الكرية الموالية).

$$1 \text{ حساب احتمال الحوادث التالية: } P(A) = \frac{7^2}{10^2} = \frac{49}{100} \text{ و } P(B) = \frac{7^2 + 3^2}{10^2} = \frac{58}{100}$$

A " الحصول على الكريتين بيضاويين "

B " الحصول على كريتين من نفس اللون "

2 تعرف لعبة حظ كما يلي: تمنح لكل كرية بيضاء العلامة α حيث α عدد حقيقي موجب و لكل كرية سوداء العلامة $-\alpha$.

ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل سحب كريتين مجموع النقاط المحصل عليها .
أ. بتعني قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X :

x_i	-2α	0	2α
$P(X = x_i)$	$\frac{9}{100}$	$\frac{42}{100}$	$\frac{49}{100}$

$$E(X) = \frac{9}{100}(-2\alpha) + 0 + \frac{49}{100}(2\alpha) = \frac{80}{100}\alpha = \frac{4}{5}\alpha : E(X) \text{ أمله الرياضي}$$

ب. بتعني قيمة العدد α حتى تكون اللعبة مربحة : يعني أن $E(X) > 0$ يكافئ أن $\alpha > 0$

3 تخفيف الى الكيس $n-3$ كرية سوداء و نعيد عملية السحب المعرفة أعلاه

حساب عدد الكريات السوداء التي تم إضافتها علما أن احتمال الحادثة A يساوي $\frac{1}{4}$:

$$P(A) = \frac{7^2}{(n+7)^2} = \frac{49}{(n+7)^2} \text{ و } P(A) = \frac{1}{4} \text{ بما } n \text{ عدد طبيعي يعني أن } \frac{49}{(n+7)^2} = \frac{1}{4} \text{ يكافئ } (n+7)^2 = 4 \times 49 \text{ إذن } n+7 = 2 \times 7 \text{ أي أن } n = 7$$

التمرين الثالث : (04 نقاط)

لتكن (u_n) متتالية عددية معرفة على مجموعة الأعداد الطبيعية \mathbb{N} بعدها الأول $u_1 = 2$ و من أجل كل عدد طبيعي

$$n \text{ غير معدوم : } u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$$

$$1. \text{ حساب الحدود } u_2 \text{ و } u_3 \text{ و } u_4 : u_2 = \frac{2}{3}u_1 + \frac{1}{3} + 1 = \frac{4+1+3}{3} = \frac{8}{3} \text{ و } u_3 = \frac{2}{3}u_2 + \frac{2}{3} + 1 = \frac{16+6+9}{9} = \frac{31}{9}$$

$$\text{ و } u_4 = \frac{2}{3}u_3 + \frac{4}{3} + 1 = \frac{62+36+27}{27} = \frac{125}{27}$$

تخمينا حول اتجاه تغير المتتالية (u_n) : المتتالية متزايدة لاحظنا أن $u_1 \leq u_2 \leq u_3 \leq u_4$

2. أ- البرهان أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ؛ $u_n \leq n+3$:

$$u_1 \leq 1+3 \text{ محققة}$$

نفرض أن $u_n \leq n+3$ صحيحة و لنبرهن صحة $u_{n+1} \leq n+4$

$$u_n \leq n+3 \text{ يعني أن } \frac{2}{3}u_n \leq \frac{2n+6}{3} \text{ بإضافة } \frac{1}{3}n+1 \text{ نجد } \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n+1 \leq \frac{2n+6+n+3}{3}$$

$$u_{n+1} \leq n+3 \text{ إذن } u_{n+1} \leq n+4 \text{ صحيحة لأن } n+3 \leq n+4$$

و منه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \leq n+3$.

ب- إثبات أنه من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n)$ لدينا

$$u_{n+1} - u_n = \frac{-u_n + n + 3}{3} \quad \text{إذن} \quad u_{n+1} - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \quad \text{أن} \quad u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n$$

. استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) : بما أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n فإن $u_n \leq n+3$ و

$$u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n+3-u_n) \quad \text{إذن المتتالية } (u_n) \text{ متزايدة}$$

3. (v_n) متتالية عددية معرفة من أجل كل عدد طبيعي n غير معدوم ب: $v_n = u_n - n$.

أ- إثبات أن المتتالية (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{2}{3}$ يطلب تعيين حدها الأول : $v_{n+1} = u_{n+1} - n - 1$ أي

$$v_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - n - 1 = \frac{2}{3}u_n - \frac{2}{3}n \quad \text{منه} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}(u_n - n) \quad \text{أي} \quad v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n \quad \text{ومنه} \quad (v_n) \text{ متتالية}$$

$$\text{هندسية أساسها } \frac{2}{3} \text{ و حدها الأول } v_1 = u_1 - 1 = 1$$

$$\text{ب- كتب عبارة الحد العام } v_n \text{ بدلالة } n : v_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

$$\text{استنتاج } u_n \text{ بدلالة } n : \text{ بما أن } u_n = v_n + n \text{ فإن } u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} + n$$

$$4. \text{ نضع : } S_n = \frac{2}{3}v_1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 v_2 + \dots + \left(\frac{2}{3}\right)^n v_n \quad \text{و} \quad S_n' = u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

حساب بدلالة n المجموعين S_n : مجموعة متتالية هندسية أساسها $\frac{4}{9}$ و حدها الأول $v_1 = \frac{2}{3}$ إذن

$$S_n = \frac{2}{3}v_1 \left[\frac{1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n}{1 - \frac{4}{9}} \right] \quad \text{و منه} \quad S_n = \frac{2}{3} \times \frac{9}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] \quad \text{إذن} \quad S_n = \frac{6}{5} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right]$$

$S_n' = u_1 + u_2 + \dots + u_n$ تعني أن $S_n' = (v_1 + 1) + (v_2 + 2) + \dots + (v_n + n)$ مجموع متتاليتين حسابية (متتالية الأعداد الطبيعية)

$$S_n' = 3 \left[1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n \right] + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{أي أن} \quad S_n' = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} + \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{و منه} \quad (v_n) \text{ هندسية}$$

$$\text{حساب} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{6}{5n} \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n \right] = 0$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1 - الدالة المعرفة على \mathbb{R} ب :

$$g(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

1. دراسة تغيرات الدالة g : النهايات $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x^2 e^{-x}) = 1$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^2 e^{-x}) = -\infty$

$$\text{المشتقة} \quad g'(x) = (-2x + 2)e^{-x} + (x^2 - 2x + 2)e^{-x} \quad \text{أي} \quad g'(x) = (x^2 - 4x + 4)e^{-x} \quad \text{إذن}$$

$$g'(x) = (x-2)^2 e^{-x} \text{ موجبة و تتعدم عند } 2$$

جدول تغيرات

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	1

2. إثبات أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلاً وحيداً α حيث $0,35 < \alpha < 0,36$ لدينا $g(0,35) = -0,002$ و $g(0,36) = 0,016$ بما الدالة g متزايدة على \mathbb{R} فحسب مبرهنة القيم المتوسطة المعادلة السابقة تقبل حل

وحيد α

إشارة $g(x)$ على \mathbb{R} موجبة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و سالبة على المجال $]-\infty; \alpha]$

III - الدالة المعرفة على \mathbb{R} بـ : $f(x) = x - 1 + (x^2 + 2)e^{-x}$

و (C) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.. (الوحدة 2cm)

1. حساب النهايات: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [x + x^2 e^{-x}] = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x[1 + x e^{-x}] = +\infty$

2. اثبات انه من أجل كل عدد حقيقي x فإن $f'(x) = g(x)$: $f'(x) = 1 + 2x.e^{-x} - (x^2 + 2)e^{-x}$ ومنه

$$f'(x) = g(x) \text{ إذن } f'(x) = 1 - (x^2 - 2x + 2)e^{-x}$$

استنتج تغيرات الدالة f : f متزايدة على المجال $[\alpha; +\infty[$ و متناقصة على المجال $]-\infty; \alpha]$

جدول تغيرات:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

3. أ. البرهان أن المستقيم (Δ) الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C) عند $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + 2)e^{-x} = 0 \text{ و منه محققة}$$

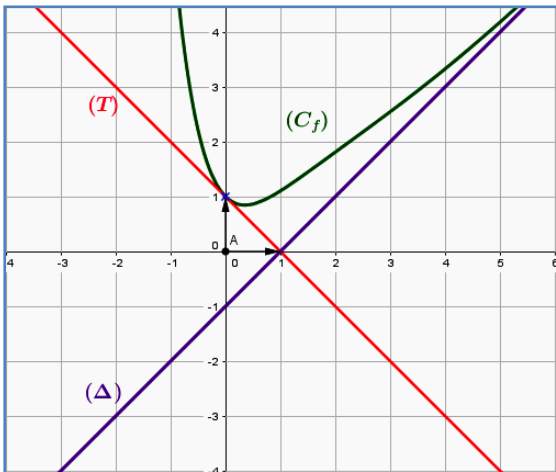
ب. تحدي وضعية (C) بالنسبة للمستقيم (Δ) : $[f(x) - y] = (x^2 + 2)e^{-x}$ الفرق موجب تماماً و منه (C) يقع فوق

المستقيم (Δ)

4. كتابة معادلة المماس (T) للمنحنى (C) في النقطة ذات

$$\text{الفاصلة } 0 : y = f'(0)x + f(0) \text{ أي } y = -x + 1$$

5. أنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C):



انتهى الموضوع الأول

التمرين الأول: (04 نقاط)

أذكر إن كانت الجمل التالية صحيحة أم خاطئة مبزرا الإجابة .

(1) من أجل كل عدد طبيعي n ، 3 يقسم العدد $2^{2n} - 1$ لدينا $2^2 \equiv 1 [3]$ بالرفع الى قوى n نجد $2^{2n} \equiv 1 [3]$ و منه $2^{2n} - 1 \equiv 0 [3]$ و منه **صحيحة**.

(2) إذا كان x عددا صحيحا حلا للمعادلة $x^2 - x \equiv 0 [6]$ فإن $x \equiv 0 [6]$:

$x \equiv$	0	1	2	3	4	5	[6]
$x^2 - x \equiv$	0	0	2	0	0	2	[6]

و منه **خاطئة**

(3) إذا كان $x^2 \equiv y^2 [17]$ فإن $x \equiv y [17]$.

$x^2 \equiv y^2 [17]$ يعني إن $x^2 - y^2 \equiv 0 [17]$ يكافئ أن $x^2 - y^2$ مضاعف للعدد 17 و 17 عدد أولي و

$(x-y)(x+y) = x^2 - y^2$ إذن 17 قاسم $(x+y)$ أو 17 قاسم للعدد $(x-y)$ أي أن $x \equiv y [17]$ أو $x \equiv -y [17]$ و منه

خاطئة .

(4) مجموعة حلول المعادلة $12x - 5y = 3$ المعرفة في Z^2 ، هي مجموعة الثنائيات (x, y) من الشكل

$(4 + 10k ; 9 + 24k)$ مع $k \in Z$: $12(4 + 10k) - 5(9 + 24k) = 12 \times 4 + 120k - 5 \times 9 - 120k = 48 - 45 = 3$ و منه

$12(4 + 10k) - 5(9 + 24k) = 3$ إذن محققة و منه **صحيحة**

(5) M و N عدنان طبيعيين كتابتهما في النظام العشري هي : abc و bca على الترتيب .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 فإن $M - N$ يقبل القسمة على 27 .

إذا كان M يقبل القسمة على 27 يعني $M \equiv 0 [27]$ أي أن $100a + 10b + c \equiv 0 [27]$ أي أن

$M - N \equiv -N [27]$ أي أن $M - N \equiv -100b - 10c - a [27]$

$M - N \equiv -a - 100b - 10c [27]$ و $-999 \equiv 0 [27]$ أي أن و منه $M - N \equiv -1000a - 100b - 10c [27]$ أي

$M - N \equiv -10(100a + 10b + c) [27]$ أي أن $M - N \equiv -10M [27]$ و $M \equiv 0 [27]$ إذن $M - N \equiv 0 [27]$ **صحيحة**.

التمرين الثاني: (04 نقاط) :

لدينا وعائين U_1 و U_2 يحتويان على كرات لا نفرق بينها عند اللمس . الوعاء U_1 يحتوي على n كرة بيضاء و ثلاث

كرات سوداء (n عدد طبيعي غير معدوم) و الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين و كرة واحدة سوداء .

نسحب عشوائيا كرة من U_1 نضعها في U_2 ثم نسحب كرة من U_2 نضعها في U_1 .

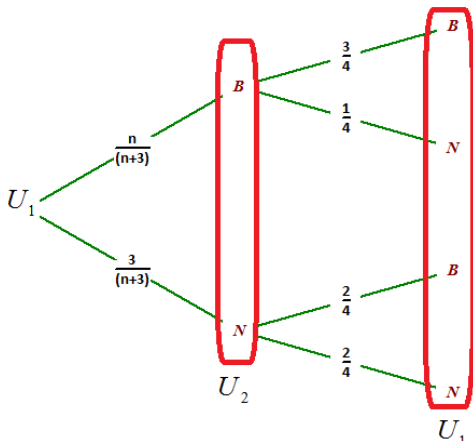
1. نعتبر الحادثة A يبقى الوعاءان على ما كانا عليه.

$$P(A) = \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$$

الحادثة A هي أن نسحب كرة بيضاء من الوعاء U_1 و نضعها

في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها

في الوعاء U_1 أو نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها



في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة سوداء و نضعها في الوعاء U_1

$$P(A) = \frac{n}{n+3} \times \frac{3}{4} + \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{3(n+2)}{4(n+3)}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} P(A) = \frac{3}{4} : \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A) \text{ النهاية}$$

2. نعتبر الحادثة B الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء فقط . التحقق أن $P(B) = \frac{3}{2(n+3)}$

الحادثة B هي : أن نسحب كرة سوداء من الوعاء U_1 و نضعها في الوعاء U_2 ثم نسحب من الوعاء U_2 كرة بيضاء و نضعها في الوعاء U_1 :

$$P(B) = \frac{3}{n+3} \times \frac{2}{4} = \frac{3}{2(n+3)}$$

3. يدفع لاعب $20DA$ و يقوم بالتجربة السابقة

- أ. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرة واحدة بيضاء اللاعب يكسب $2n DA$.
 ب. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على كرتين بيضاوين اللاعب يكسب $n DA$
 ج. إذا كان بعد التجربة الوعاء U_2 يحتوي على 3 كرات بيضاء اللاعب لا يكسب شيئاً
 شرح لماذا لا يكون للاعب أي ربح إذا كان n لا يفوق 10 :
 اللاعب:

يأخذ $2n DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $2n-20$ يكون رابح إذا كانت $n > 10$

أو يأخذ $n DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو $n-20$ يكون رابح إذا كانت $n > 20$

أو يأخذ إما $0 DA$ بعد دفع $20DA$ الفرق هو -20 هنا هو خاسر

إذن إذا كان n اصغر من 10 فإن اللاعب خاسر في الحالات الثلاثة المذكور أعلاه

4. فيما يلي نفرض أن $n > 10$ نعتبر X المتغير العشوائي الذي يأخذ قيمة الربح الجبري للاعب

مثلاً : إذا وجد كرة واحدة بيضاء يكون الربح $X = 2n - 20$

أ - تعيين قانون الاحتمال المتغير العشوائي X

x_i	$2n-20$	$n-20$	-20
$P(X = x_i)$	$\frac{6}{4(n+3)}$	$\frac{3(n+2)}{4(n+3)}$	$\frac{n}{4(n+3)}$

$$E(X) = \frac{6(2n-20) + 3(n-20)(n+2) - 20n}{4(n+3)} = \frac{3n^2 - 62n - 240}{4(n+3)} : \text{ ب حسب أمله الرياضي}$$

ج- إثبات أن اللعبة تكون رابحة عندما يكون 25 كرة بيضاء على الأقل في الوعاء U_1 : اللعبة رابحة يعني أن $E(X) > 0$

أي أن $3n^2 - 62n - 240 > 0$ نحسب مميز كثير الحدود $3n^2 - 62n - 240$ نجد $\Delta = 6724 = 82^2$ إذن الجذران هما

$$-\frac{10}{3} \text{ و } 24 \text{ ومنه } E(X) > 0 \text{ لما } n \geq 25$$

التمرين الثالث: (05 نقاط)

1. بتعين العددين المركبين α و β حيث : $\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\bar{\alpha} + \beta = 6i \end{cases}$ يكافئ أن $2\bar{\alpha} - \alpha = 1 + 6i$ بوضع $\alpha = x + iy$

نجد $x - 3iy = 1 + 6i$ و منه $\begin{cases} x = 1 \\ -3y = 6 \end{cases}$ إذن $\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \end{cases}$ و منه $\alpha = 1 - 2i$ بالتعويض في معادلة من معادلتنا

الجملة نجد $1 - 2i + \beta = -1$ إذن $\beta = -2 + 2i$

2. المستوي منسوب الى المعلم المتعامد المتجانس $(O; \vec{u}, \vec{v})$ نعتبر النقط I و A و B لواحقتها على الترتيب

$$z_I = 1 \text{ و } z_A = 1 - 2i \text{ و } z_B = -2 + 2i$$

أ- أنشاء النقط I و A و B

ب- بتعين z_w لاحقة النقطة w مركز الدائرة (C) ذات

القطر $[AB]$: المركز هو منتصف القطعة $[AB]$ أي

أن

$$z_w = \frac{z_A + z_B}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$3. D \text{ نقطة لاحقتها } z_D = \frac{3+9i}{4+2i}$$

كتلبق z_D على شكل الجبري :

$$z_D = \frac{3+9i}{4+2i} = \frac{(3+9i)(4-2i)}{16+4} = \frac{30+30i}{20} = \frac{3}{2} + \frac{3}{2}i$$

إثبات أن النقطة D تنتمي إلى الدائرة (C) :

$$|z_A - z_w| = \left| \frac{3}{2} - 2i \right| = \frac{5}{2} \text{ و } |z_D - z_w| = \left| \frac{4}{2} + \frac{3}{2}i \right| = \frac{5}{2}$$

4. E نقطة من الدائرة (C) لاحقتها z_E حيث

$$z_E = e^{i\frac{\pi}{4}} z_I + \left(1 - e^{i\frac{\pi}{4}}\right) z_w$$

أ - كتلبق العدد $z_E + \frac{1}{2}$ على الشكل الآسي : $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ يعني

$$\text{أن } z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ و منه } z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \text{ إذن}$$

$$z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} \text{ هو المطلوب .}$$

ب استنتج أن $z_E = \frac{3\sqrt{2}-2}{4} + \frac{3\sqrt{2}}{4}i$ لدينا $z_E + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$ و منه $z_E + \frac{1}{2} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{4} + i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$ و منه

$$z_E = \left(\frac{3\sqrt{2}-2}{4} + i\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)$$

التمرين الرابع: (07 نقاط)

1 - دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$$

1. دراسة تغيرات الدالة g :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} [x^2 - 1 + \ln(x)] = -\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{المشتقة: } g'(x) = 2x + \frac{1}{x} \text{ موجبة إذن الدالة } g \text{ متزايدة على }]0; +\infty[$$

$$2. \text{ حساب: } g(1) = 1^2 - 1 + \ln(1) = 0$$

استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x على المجال $]0; +\infty[$: بما أن الدالة g متزايدة على $]0; +\infty[$ و تنعدم

عند 1 فإن $g(x)$ موجبة على المجال $]1; +\infty[$ و سالبة على المجال $]0; 1[$.

II - دالة عددية معرفة على $]0; +\infty[$ بـ

$$f(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$$

و (C_f) تمثيلها البياني في المعلم المتعامد و المتجانس $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

$$1. \text{ حساب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ و } \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \text{ لأن } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x} = -\infty \text{ و } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 \text{ بالتزايد المقارن.}$$

$$2. \text{ إثبات أن من أجل كل عدد حقيقي موجب تماما } x : f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{\left(\frac{1}{x}\right) \cdot x - \ln(x)}{x^2} \text{ و منه } f'(x) = \frac{x^2 - 1 + \ln(x)}{x^2} \text{ إذن } f'(x) = \frac{g(x)}{x^2} \text{ محققة}$$

جدول تغيرات الدالة f :

x	0	1	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

3. إثبات أن (C_f) يقبل مماساً (T) معامل توجهه 1: $f'(x) = 1$ تكافئ $\frac{g(x)}{x^2} = 1$ يعني أن $g(x) = x^2$ يكافئ أن

$$\ln(x) = 1 \text{ يكافئ أن } x = e$$

$$\text{معادلته } y = (x - e) + f(e) \text{ أي أن } y = x - 1 - \frac{1}{e} \text{ هي المعادلة المطلوبة}$$

4. أ- إثبات أن (Δ) المستقيم الذي معادلته من الشكل $y = x - 1$ مقارب للمنحنى (C_f) :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - y] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right] = 0 \text{ و منه محققة}$$

$$\text{ب- درس وضعية } (C_f) \text{ بالنسبة للمستقيم } (\Delta) : \text{ ندرس إشارة الفرق } [f(x) - y] = \left[-\frac{\ln(x)}{x} \right]$$

و هو موجب على المجال على المجال $]0; 1[$ إي أن (C_f) يقع فوق المستقيم (Δ) على هذا المجال.

و سالب على المجال على المجال $]1; +\infty[$ إي أن (C_f) يقع تحت المستقيم (Δ) على هذا المجال.

5. إنشاء (Δ) و (T) و المنحنى (C_f)

6. المناقشة بيانيا حسب قيم الوسيط m عدد

• $(m+1).x + \ln(x) = 0$ حلول المعادلة

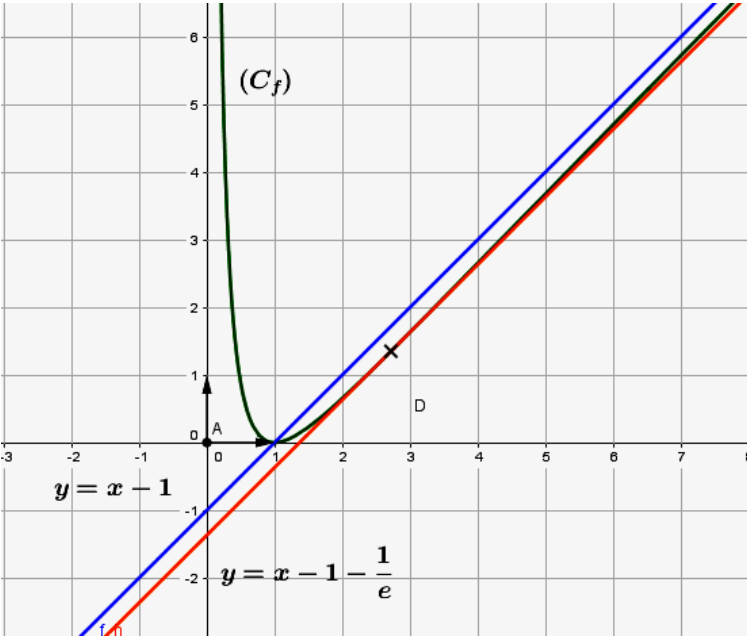
$(m+1).x + \ln(x) = 0$ يكافئ

$m = -1 - \frac{\ln(x)}{x}$ منه و $(m+1) + \frac{\ln(x)}{x} = 0$

بإضافة x نجد $x + m = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$ و منه

$x + m = f(x)$ حلها هو إيجاد فواصل تقاطع

(C_f) مع المستقيم $(\Delta_m): y = x + m$



لما $m \in]-\infty; -1 - \frac{1}{e}[$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) لا يتقاطعان و منه ليس للمعادلة حلول

لما $m = -1 - \frac{1}{e}$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة واحدة و منه للمعادلة حل وحيد

لما $m \in]-1 - \frac{1}{e}; -1[$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطتان و منه للمعادلة حلين

لما $m \in [-1; +\infty[$ نلاحظ أن (Δ_m) و (C_f) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة حل وحيد