موضوع تجريبي للتدرب رقم 02 مع الحل المفصل

التمرين الأول (المتتاليات العددية) : * 05 نقاط *

في الشكل أدناه المنحني (C_f) يمثل الدالة f المعرفة على $]-1;+\infty[$ بـ : $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$.

و المستقيم (d) ذا المعادلة $y=x$.

1) عين إحداثيات نقط تقاطع المنحني (C_f) و المستقيم (d) .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة f على $]-1;+\infty[$ ، ثم بين أنه إذا كان : $x\in[1;2]$ فإن : $f(x)\in[1;2]$.

3) نعرف على مجموعة الأعداد الطبيعية $\mathbb{N}$ المتتالية (u_n) كما يلي : $\begin{cases} u_0=\dfrac{3}{2} \\ u_{n+1}=f(u_n) \end{cases}$.

أ- باستعمال (C_f) و (d) أنشئ على حامل محور الفواصل الحدود : u_0 ، u_1 ، u_2 و u_3 مظهرا خطوط الإنشاء ، ثم أعط تخمينا حول إتجاه تغير و تقارب المتتالية (u_n) .

ب- برهن أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $1<u_n<2$.

ج- أدرس رتابة المتتالية (u_n) ، ثم استنتج أنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $u_n\geq\dfrac{3}{2}$ و أن المتتالية (u_n) متقاربة .

4) أ- بين أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2-u_{n+1}\leq\dfrac{4}{5}(2-u_n)$.

ب- برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $2-u_n\leq\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$.

ج- أحسب نهاية المتتالية (u_n) .

5) المتتالية العددية (v_n) معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $v_n=\dfrac{u_n-2}{u_n-1}$.

أ- برهن أن المتتالية (v_n) هندسية يطلب تحديد أساسها و حدها الأول v_0 .

ب- أكتب عبارة الحد العام v_n بدلالة n ، ثم استنتج عبارة الحد العام (u_n) بدلالة n و حدد نهايتها من جديد .

6) نضع من أجل كل $n\in\mathbb{N}$: $S_n=\dfrac{1}{u_0-1}+\dfrac{1}{u_1-1}+\dots\dots\dots+\dfrac{1}{u_n-1}$.

- عبر عن S_n بدلالة n ، ثم احسب : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{S_n}{n}$.

التمرين الثاني (الإحتمالات) : * 04 نقاط *

يحتوي كيس غير شفاف على أربع كريات حمراء تحمل الأرقام : 0 ، 0 ، 1 ، 2 و أربع كريات خضراء تحمل الأرقام : 1 ، 1 ، 1 ، 2 و كريتين سوداوين تحملان الرقمين : 1 ، 2 .

(كل الكريات متماثلة و لا يمكن التمييز بينها عند اللمس) .

نسحب عشوائيا من الكيس ثلاث كريات على التوالي بدون إرجاع .

- نعتبر الأحداث التالية :

A : " الحصول على ثلاث كريات من نفس اللون " .

B : " الحصول على ثلاث كريات تحمل نفس الرقم " .

C : " الحصول على ثلاث كريات جداء الأرقام المسجلة عليها غير معدوم " .

1) أحسب الإحتمالات التالية : $P(A)$ ، $P(B)$ ، $P(A\cap B)$ ، $P(A\cup B)$ و $P(C)$.

2) نعتبر المتغير العشوائي X الذي يرفق بكل تجربة جداء الأرقام المسجلة على الكريات المسحوبة .

أ- حدد قيم X الممكنة ، ثم عرف قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X .

ب- أحسب الإحتمال : $P\left(e^{X^2-X}>1\right)$.

التمرين الثالث (الأعداد المركبة) : * 05 نقاط *

1) حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ المعادلة : $\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+18\right)=0$.

2) في المستوي المركب المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{u},\vec{v}\right)$ نعتبر النقط : A ، B ، C و D التي لواحقها على الترتيب : $z_A=2i$ ، $z_B=-2i$ ، $z_C=3-3i$ و $z_D=3+3i$.

أ- ما طبيعة الرباعي $ABCD$ ؟ أحسب مساحته .

ب- بين أن النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز ω يطلب تعيين إحداثييها .

3) أ- أكتب العدد z_D على الشكل الأسي ، ثم استنتج الطويلة و عمدة للعدد المركب α إذا علمت أن :

$\alpha\times z_D=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

ب- أعط الشكل الجبري للعدد المركب α ، ثم إستنتج القيمة المضبوطة لكل من $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{\pi}{12}$.

ج- عين قيم العدد الطبيعي n التي من أجلها يكون العدد α^n تخيليا صرفا .

د- بين أن العدد $\left(\sqrt{2}\,\alpha\right)^{1440}$ حقيقي.

4) أ- نعتبر (Π) هي مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\arg\left(z^2+4\right)=\arg\left(z+2i\right)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ مع $(k\in\mathbb{Z})$

- عين طبيعة المجموعة (Π) .

ب- لتكن (C) مجموعة النقط M ذات اللاحقة z حيث : $\left|z-z_C\right|^2+\left|z-z_D\right|^2=\left|z_D-z_C\right|^2$.

- تحقق أن النقطة O تنتمي إلى المجموعة (C) ، ثم حدد طبيعة هذه الأخيرة .

التمرين الرابع (الدوال اللوغاريتمية) : * 06 نقاط *

I) الدالة g معرفة على المجال $]0;+\infty[$ كما يلي : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) احسب نهاية الدالة g عند 0 و عند $+\infty$ ، ثم فسر بيانيا النهاية عند 0 .

2) ادرس إتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها .

3) أ- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

ب - تحقق أن : $1,83<\alpha<1,84$.

4) إستنتج إشارة $g(x)$ على المجال $]0;+\infty[$.

II) الدالة f معرفة على $]0;+\infty[$ بـ : $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$ ، (C) التمثيل البياني للدالة f في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) احسب كلا من : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ و فسر النتائج بيانيا .

2) أ- بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x من $]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{2(2x+1)}{\left(x^2+x\right)^2}\times g(x)$.

ب- إستنتج إتجاه تغير الدالة f و شكل جدول تغيراتها .

ج- بين أن : $f(\alpha)=\dfrac{2}{\alpha(2\alpha+1)}$ ، ثم أعط حصرا للعدد $f(\alpha)$.

3) اكتب معادلة المماس (T) للمنحني (C) في النقطة ذات الفاصلة 1 .

4) أنشئ المماس (T) و مثل المنحني (C) .

5) نعتبر المستقيمات (d_m) المعرفة بالمعادلة $y=m^2x-1$ حيث : m وسيط حقيقي .

أ- بين أن جميع المستقيمات (d_m) تمر بنقطة ثابتة يطلب تحديد إحداثييها .

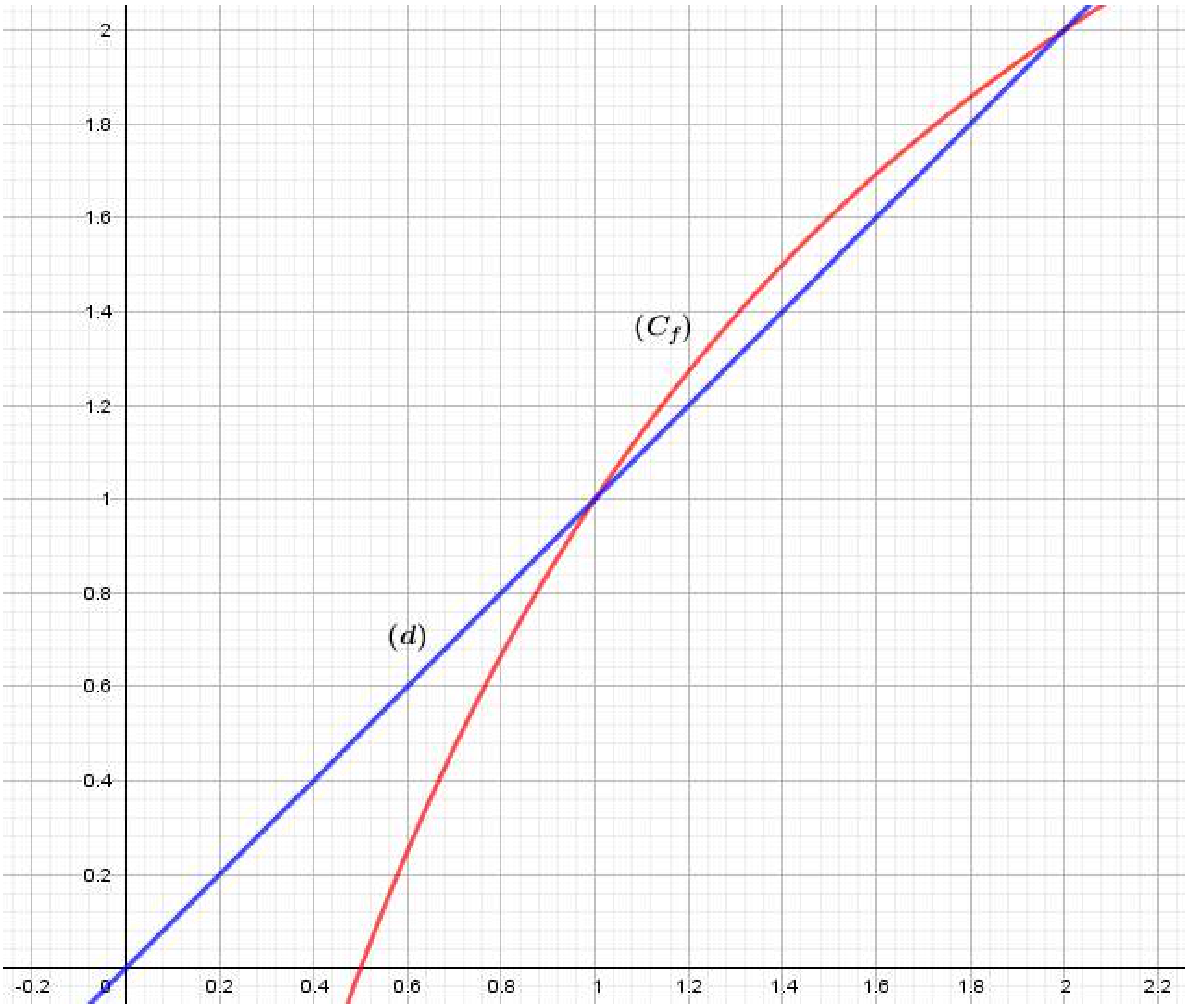
ب- ناقش بيانيا عدد حلول المعادلة : $f(x)=m^2x-1$.

6) الدالة h معرفة على المجال $]-\infty;0[$ كما يلي : $h(x)=\dfrac{2\ln|x|}{x^2+|x|}$ و (C_h) تمثيلها البياني .

أ- بين أن المنحني (C_h) هو صورة المنحني (C) بواسطة تحويل نقطي بسيط يطلب تعيينه .

ب- مثل (C_h) في نفس المعلم السابق .

(الوثيقة المرفقة بالتمرين الأول) :



إنتهـــى ـــــــــــــــــــ ك . أ : بلقاسم عبدالرزاق

حل مقترح للتمرين الأول (المتتاليات العددية) :

1) نحل المعادلة $f(x)=x$ أي : $\dfrac{4x-2}{x+1}=x$ أي نجد : $x^2-3x+2=0$ ، لدينا مجموع المعاملات يساوي 0 و منه : $x_1=1$ و $x_2=2$ ، إذن : $(C_f)\cap(d)=\{(1;1),(2,2)\}$.

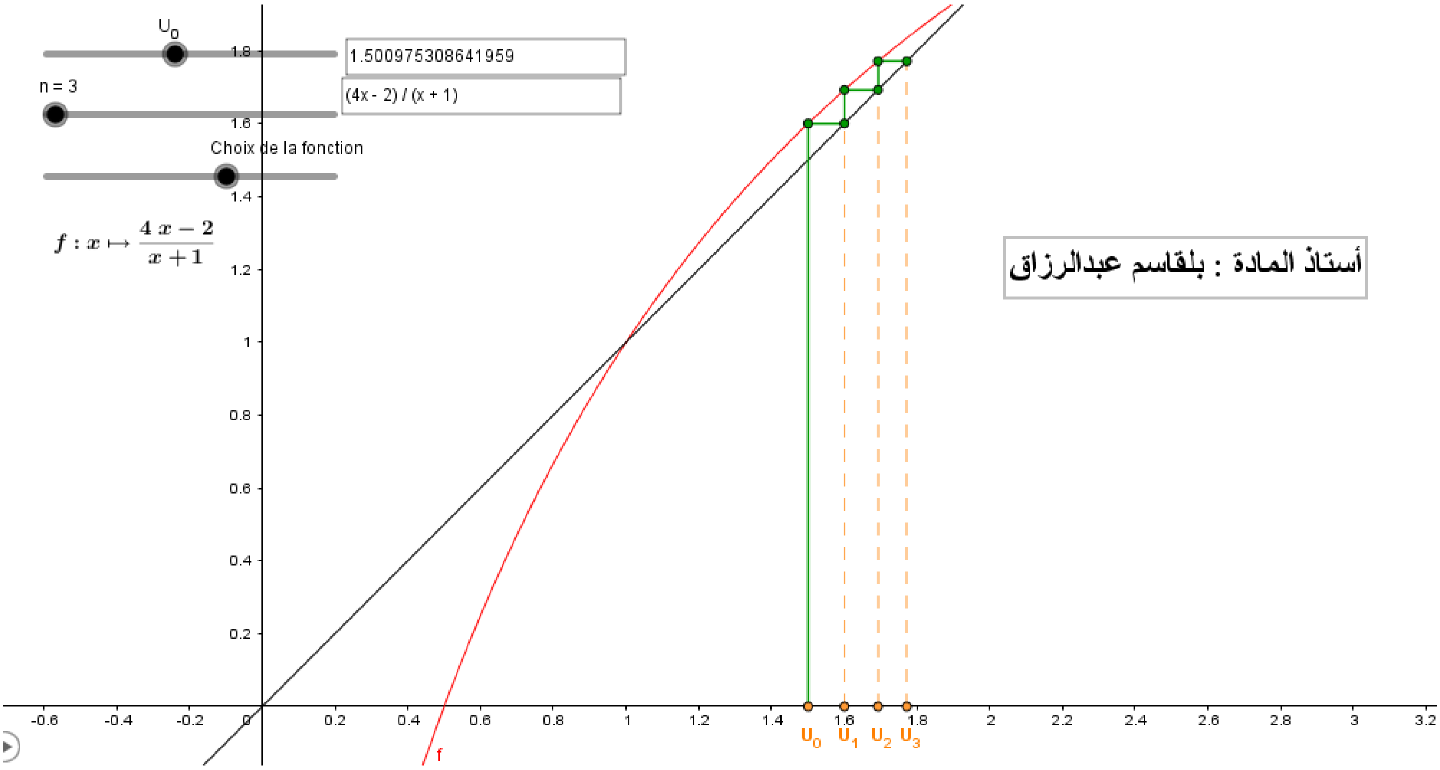
2) لدينا من أجل كل $x\in]-1;+\infty[$: $f'(x)=\dfrac{3}{(x+1)^2}$ أي : $f'(x)>0$ ، إذن الدالة f متزايدة تماما على $]-1;+\infty[$.

لدينا : $x\in[1,2]$ أي : $1<x<2$ ، بما أن الدالة f متزايدة على $]-1;+\infty[$ فإن : $f(1)<f(x)<f(2)$ أي نجد :

$1<f(x)<2$ و بالتالي : $\boxed{f(x)\in[1,2]}$.

3) لدينا : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و من أجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1}=f(u_n)$.

أ) الإنشاء و التخمين :



ـ نلاحظ أن : $u_0<u_1<u_2<u_3$ أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متزايدة .

كما نلاحظ أن الحدود تتقارب نحو فاصلة نقطة تقاطع (C_f) و (d) أي كتخمين نقول : المتتالية (u_n) متقاربة .

ب) نستعمل البرهان بالتراجع لنبين الخاصية : $1<u_n<2$ ..... $P(n)$.

ـ نتحقق من صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي لدينا : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $1<\dfrac{3}{2}<2$ و منه : $1<u_0<2$ (محققة) .

ـ نفرض صحة $P(n)$ من أجل n كيفي أي : $1<u_n<2$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $1<u_{n+1}<2$.

لدينا فرضا أن : $1<u_n<2$ و حسب الجواب (2) : بما أن : $u_n\in]1,2[$ فإن : $f(u_n)\in]1,2[$ أي : $1<f(u_n)<2$

و منه : $1<u_{n+1}<2$ ، إذن : من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{1<u_n<2}$.

ج) أولا نحسب $u_{n+1}-u_n$:

$u_{n+1}-u_n=\dfrac{4u_n-2}{u_n+1}-u_n=\dfrac{4u_n-2-u_n^2-u_n}{u_n+1}=\dfrac{-u_n^2+3u_n-2}{u_n+1}$ ، نجد من أجل $1<u_n<2$ فإن : $(-u_n^2+3u_n-2)>0$

و $u_n+1>0$ و منه : يكون : $u_{n+1}-u_n>0$ ، إذن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$.

ـ بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و $u_0=\dfrac{3}{2}$ فإنه من أجل كل $n\in\mathbb{N}$ فإن : $u_n\geq\dfrac{3}{2}$.

- بما أن : المتتالية (u_n) متزايدة تماما و محدودة من الأعلى فهي متقاربة .

4) أ) لنبين أنه من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ يكون : $2-u_{n+1} \le \frac{4}{5}(2-u_n)$.

نحسب أولا $2-u_{n+1}$: $2-u_{n+1} = 2-\frac{4u_n-2}{u_n+1} = \frac{2u_n+2-4u_n+2}{u_n+1} = \frac{-2u_n+4}{u_n+1}$.

لدينا : $1<u_n<2$ و منه : $0<-2u_n+4<2$ إذن يمكن كتابة : $2-u_{n+1} = (-2u_n+4)\times\frac{1}{u_n+1}$.

نعلم أن : $u_n \ge \frac{3}{2}$ أي : $u_n+1 \ge \frac{5}{2}$ أي : $\frac{1}{u_n+1} \le \frac{2}{5}$ أي : $(-2u_n+4)\frac{1}{u_n+1} \le \frac{2}{5}(-2u_n+4)$ أي : $\frac{-2u_n+4}{u_n+1} \le \frac{2}{5}\times 2(-u_n+2)$

و منه : $\frac{-2u_n+4}{u_n+1} \le \frac{4}{5}(-u_n+2)$ ، إذن : $\boxed{2-u_{n+1} \le \frac{4}{5}(2-u_n)}$ هو المطلوب .

ب) لنبرهن بالتراجع عن الخاصية : $2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ ...... $P(n)$.

- لنتحقق صحة الخاصية من أجل $n=0$ أي : $2-\frac{3}{2} \le \frac{1}{2}$ أي : $\frac{1}{2} \le \frac{1}{2}$ و منه : $2-u_0 \le \frac{1}{2}$ (محققة) .

- نفرض صحة الخاصية من أجل n كيفي أي : $2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ و نبرهن صحتها من أجل $n+1$ أي : $2-u_{n+1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$

لدينا من جهة أن : $2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ أي : $\frac{4}{5}(2-u_n) \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n \times \frac{4}{5}$ و منه : $\frac{4}{5}(2-u_n) \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

و من جهة أخرى لدينا : $2-u_{n+1} \le \frac{4}{5}(2-u_n)$ ، إذن : من هذا و ذاك نجد : $2-u_{n+1} \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$.

و أخيرا من أجل كل عدد طبيعي n فإن : $\boxed{2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n}$.

ج) لدينا : $2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$ و نعلم أن : $2-u_n > 0$ و بالتالي : $0 < 2-u_n \le \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{2}\left(\frac{4}{5}\right)^n = 0$ و منه : $\lim_{n\to+\infty}(2-u_n)=0$ و هذا يدل على أن : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$.

5) من أجل كل $n \in \mathbb{N}$ لدينا : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$.

أ- لدينا : $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}-2}{u_{n+1}-1} = \frac{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-2}{\frac{4u_n-2}{u_n+1}-1} = \frac{\frac{2u_n-4}{u_n+1}}{\frac{3u_n-3}{u_n+1}} = \frac{2u_n-4}{3u_n-3} = \frac{2}{3}\left(\frac{u_n-2}{u_n-1}\right)$ أي : $v_{n+1} = \frac{2}{3}\times v_n$.

و منه المتتالية (v_n) هندسية أساسها $q=\frac{2}{3}$ و حدها الأول $v_0 = \frac{u_0-2}{u_0-1} = -1$.

ب- نجد : $\boxed{v_n = -\left(\frac{2}{3}\right)^n}$ و لدينا : $v_n = \frac{u_n-2}{u_n-1}$ أي : $v_n.u_n - v_n = u_n-2$ أي : $v_n.u_n - u_n = v_n-2$ أي : $u_n(v_n-1) = v_n-2$

و منه نجد : $u_n = \frac{v_n-2}{v_n-1}$ ، إذن : $\boxed{u_n = \frac{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-2}{-\left(\frac{2}{3}\right)^n-1}}$ ، أي : $\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = 2}$ لأن : $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$.

6) لدينا : $S_n=\frac{1}{u_0-1}+\frac{1}{u_1-1}+......+\frac{1}{u_n-1}$.

$u_n=\frac{v_n-2}{v_n-1}$: أي $u_n-1=\frac{-1}{v_n-1}$: أي $\frac{1}{u_n-1}=-(v_n-1)$ ، أي : $S_n=-(v_0-1)-(v_1-1)+......-(v_n-1)$

أي : $S_n=-[(v_0-1)+(v_1-1)+......+(v_n-1)]$ أي : $S_n=-[(v_0+v_1+.....+v_n)+(-1-1......-1)]$

و منه : $S_n=-\left[-\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{2}{3}}-1(n+1)\right]$ أي : $\boxed{S_n=3-3\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1}+(n+1)}$.

لدينا : $\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n}$ و منه : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=1}$.

حل مقترح للتمرين الثاني (الإحتمالات) :

1) حساب إحتمال الأحداث :

الحدث A : (V,V,V) أو (R,R,R) أي : $P(A)=\frac{A_4^3+A_4^3}{A_{10}^3}=\frac{2\times24}{720}=\frac{48}{720}$ و منه : $\boxed{P(A)=\frac{1}{15}}$.

الحدث B : $(1,1,1)$ أو $(2,2,2)$ أي : $P(B)=\frac{A_5^3+A_3^3}{A_{10}^3}=\frac{60+6}{720}=\frac{66}{720}$ و منه : $\boxed{P(B)=\frac{11}{120}}$.

الحدث $A\cap B$: (V_1,V_1,V_1) أي : $P(A\cap B)=\frac{A_3^3}{A_{10}^3}=\frac{6}{720}$ و منه : $\boxed{P(A\cap B)=\frac{1}{120}}$.

بما أن الحدثين A و B كيفيين فإن : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

أي نجد : $P(A\cup B)=\frac{1}{15}+\frac{11}{120}-\frac{1}{120}=\frac{18}{120}$ و منه : $\boxed{P(A\cup B)=\frac{3}{20}}$.

الحدث C : هنا كأننا نجزء الكريات الموجودة في الكيس لكريات تحمل رقم معدوم و أخرى لا تحمل رقم معدوم .

أي : $P(C)=\frac{A_8^3}{A_{10}^3}=\frac{336}{720}$ و منه : $\boxed{P(C)=\frac{7}{15}}$.

2) أ ـ لدينا : X يعبر عن جداء الأرقام الظاهرة في السحب .

و منه قيم المتغير العشوائي X هي : 0 ، 1 ، 2 ، 4 ، 8 .

قانون الإحتمال للمتغير العشوائي X يكون كما يلي :

$P(X=0)=\frac{3(A_2^1\times A_8^2)+3(A_2^2\times A_8^1)}{720}=\frac{336+48}{720}=\frac{384}{720}$ أو $P(X=0)=1-P(C)=1-\frac{336}{720}=\frac{384}{720}$.

$P(X=1)=\frac{A_5^3}{720}=\frac{60}{720}$ ، $P(X=2)=\frac{3(A_5^2\times A_3^1)}{720}=\frac{3\times60}{720}=\frac{180}{720}$.

$P(X=4)=\frac{3(A_3^2\times A_5^1)}{720}=\frac{3\times30}{720}=\frac{90}{720}$ ، $P(X=8)=\frac{A_3^3}{720}=\frac{6}{720}$.

x_i	0	1	2	4	8
$P(X=x_i)$	$\frac{384}{720}$	$\frac{60}{720}$	$\frac{180}{720}$	$\frac{90}{720}$	$\frac{6}{720}$

ب ـ لدينا : $e^{X^2-X}>1$ تكافئ : $X^2-X>0$ و منه : $X(X-1)>0$.

بعد دراسة الإشارة نجد أنه يكون : $X(X-1)>0$ لما : $X>1$.

إذن : $P(X=2)+P(X=4)+P(X=8)=P\left(e^{X^2-X}>1\right)$ أي : $P\left(e^{X^2-X}>1\right)=\frac{180}{720}+\frac{90}{720}+\frac{6}{720}=\frac{276}{720}$

و منه نجد : $\boxed{P\left(e^{X^2-X}>1\right)=\frac{23}{60}}$.

حل مقترح للتمرين الثالث (الأعداد المركبة) :

1) حل المعادلة :

لدينا : $\left(z^2+4\right)\left(z^2-6z+18\right)=0$ تكافئ : $z^2+4=0$ أو $z^2-6z+18=0$.

و منه : $z^2+4=0$ أو $\Delta=-36=(6i)^2$ أي : $z^2=-4$ و منه : $\begin{cases} z_1=2i \\ z_1=-2i \end{cases}$ أو $\begin{cases} z_3=3-3i \\ z_4=3+3i \end{cases}$.

إذن : $\boxed{S=\{-2i,2i,3-3i,3+3i\}}$.

2) أ- بما أن النقطتان A و B متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل و أيضا النقطتان C و D متناظرتان بالنسبة لحامل محور الفواصل (لديه ضلعان متوازيان و ضلعان غير متوازيان) ، أيضا و لدينا أيضا : $AD=BC$
بالتالي : الرباعي $ABCD$ شبه منحرف متقايس الضلعين .

- بالنسبة لمساحة شبه المنحرف نطبق القانون باستعمال الأعداد المركبة و نجد مساحته ببساطة .

ب- بما أن للقطعتين $[AB]$ و $[CD]$ نفس المحور و الذي هو حامل محور الفواصل (xx') فهذا يدل على أن الدائرة التي تشمل النقط A ، B ، C و D مركزها سيكون ينتمي لحامل محور الفواصل ، إذن : $\omega(x,0)$.

لكن نعلم أن : $\omega A=\omega D$ أي : $|z_A-z_\omega|=|z_D-z_\omega|$ أي : $|2i-x|=|3+3i-x|$ أي : $|-x+2i|=|3-x+3i|$

و منه : $\sqrt{(-x)^2+2^2}=\sqrt{(3-x)^2+3^2}$ أي : $\sqrt{x^2+4}=\sqrt{x^2-6x+18}$ أي : $x^2+4=x^2-6x+18$ أي : $6x=14$

أي : $x=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$ و منه : $\boxed{\omega\left(\frac{7}{3},0\right)}$.

إذن : النقط A ، B ، C و D تنتمي إلى نفس الدائرة ذات المركز $\omega\left(\frac{7}{3},0\right)$.

3) أ- لدينا : $z_D=3+3i$ أي : $|z_D|=3\sqrt{2}$ و $\arg(z_D)=\theta\begin{cases}\cos\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$ و منه : $\arg(z_D)=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

إذن : $\boxed{z_D=3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

لدينا : $\alpha\times z_D=3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ أي : $\alpha\times 3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}=3e^{i\frac{\pi}{3}}$ و منه : $\alpha=\frac{3e^{i\frac{\pi}{3}}}{3\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}$ أي : $\alpha=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}$

أي : $\boxed{\alpha=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}}$ إذن : $|\alpha|=\frac{\sqrt{2}}{2}$ و $\arg(\alpha)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$.

ب- لدينا : $\frac{\frac{3+3\sqrt{3}i}{2}}{3+3i}=\frac{3\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{3+3i}=\frac{3\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)}{z_D}=\alpha$.

أي : $\boxed{\frac{\left(1+\sqrt{3}\right)+\left(\sqrt{3}-1\right)i}{4}}=\frac{18-18i+18\sqrt{3}i+18\sqrt{3}}{72}=\frac{\left(3+3\sqrt{3}i\right)(6-6i)}{72}=\frac{3+3\sqrt{3}i}{6+6i}=\alpha$.

- بالمطابقة بين الشكل الأسي و الشكل الجبري للعدد α نجد :

$\sin\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}}$ و $\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}=\boxed{\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}}$.

ج- العدد α^n تخيلي صرف معناه : $\arg(\alpha^n)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $n.\arg(\alpha)=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $\frac{n.\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+k\pi$ أي : $\frac{n}{12}=\frac{1}{2}+k$

بضرب الطرفين في 12 نجد : $\boxed{n=12k+6}$ مع $(k\in\mathbb{N})$.

د- لدينا : $\left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}=\left(\sqrt{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440}=\left(e^{i\frac{\pi}{12}}\right)^{1440}=e^{i\frac{1440\pi}{12}}=e^{i120\pi}=1$ و منه : العدد $\left(\sqrt{2}\alpha\right)^{1440}$ حقيقي .

4) أ- لدينا : $\arg(z^2+4)=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي : $\arg[(z-2i)(z+2i)]=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$

لأن : $z^2+4=z^2-(2i)^2$ ، أي : $\arg(z-2i)+\arg(z+2i)=\arg(z+2i)+\frac{\pi}{2}+2k\pi$ و بالتالي نجد :

$\arg(z-2i)=\frac{\pi}{12}+2k\pi$ أي : $\arg(z-z_A)=\frac{\pi}{2}+2k\pi$ أي : $(\vec{u};\overrightarrow{AM})=\frac{\pi}{2}+2k\pi$.

إذن : المجموعة (Π) هي نصف المستقيم الذي مبدؤه النقطة A و يشكل زاوية قيسها $\frac{\pi}{2}$ مع حامل محور الفواصل باستثناء النقطة A .

ب- لدينا : $(C): |z-z_C|^2+|z-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$.

- النقطة $O\in(C)$ معناه : $|z_O-z_C|^2+|z_O-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي : $|-z_C|^2+|-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$

و منه : $|z_C|^2+|z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي : $\left(\sqrt{18}\right)^2+\left(\sqrt{18}\right)^2=\left(\sqrt{36}\right)^2$ أي : $36=36$ (محققة)

إذن : النقطة $O\in(C)$.

لدينا : $(C): |z-z_C|^2+|z-z_D|^2=|z_D-z_C|^2$ أي تصبح : $(C):\ CM^2+DM^2=CD^2$.

فكرة مهمة :

العلاقة : $CM^2+DM^2=CD^2$ تدل على أن النقطة M ممكن أن تنطبق على C أو على D .

أو تدل على أن المثلث MCD قائم في M و في الحالتين النقطة M تكون في الدائرة ذات القطر $[CD]$.

إذن : المجموعة (C) هي الدائرة ذات القطر $[CD]$.

ملاحظة : يمكن استخدام الشكل الجبري $(z=x+iy)$ للوصول إلى المعادلة الديكارتية للدائرة (C) .

حل مقترح للتمرين الرابع (الدالة اللوغاريتمية) :

الجزء الأول : $g(x)=\frac{x+1}{2x+1}-\ln x$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim_{x\to0}g(x)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)=+\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to0}\frac{x+1}{2x+1}=1$ و $\lim_{x\to0}-\ln x=+\infty$.

*) $\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{2x+1}-\ln x\right)=-\infty$ ، لأن : $\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{2x+1}=\frac{1}{2}$ و $\lim_{x\to0}-\ln x=-\infty$.

*) التفسير البياني للنهاية عند 0 : المستقيم ذو المعادلة $x=0$ مقارب للمنحنى (C_g) .

2) الدالة g قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $g'(x)=\frac{-1}{(2x+1)^2}-\frac{1}{x}$.

نلاحظ أنه من أجل كل $x\in]0;+\infty[$ تكون $g'(x)<0$ إذن : الدالة g متناقصة تماما على $]0;+\infty[$.

*) جدول التغيرات :

x	0 $+\infty$
$g'(x)$	$-$
$g(x)$	$+\infty \searrow -\infty$

3) أ) *) الدالة g مستمرة و رتيبة على المجال $]0;+\infty[$ صورة هذا الأخير هي المجال $]-\infty;+\infty[$ و بما أن : $0\in]-\infty;+\infty[$ فإن : المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0;+\infty[$.

ب) لدينا : $\begin{cases} g(1{,}83)=0{,}002 \\ g(1{,}84)=-0{,}002 \end{cases}$ أي : $g(1{,}84)<0<g(1{,}83)$ و منه : $1{,}83<\alpha<1{,}84$.

4) إشارة $g(x)$:

x	0 α $+\infty$
$g(x)$	$+$ 0 $-$

<u>الجزء الثاني :</u> $f(x)=\frac{2\ln x}{x^2+x}$.

1) حساب النهايات :

*) $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0} f(x)=\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}\left(\frac{2\ln x}{x^2+x}\right)=-\infty$ لأن : $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(x^2+x)=0^+$ و $\lim\limits_{x\xrightarrow{>}0}(2\ln x)=-\infty$.

*) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{2\ln x}{x^2+x}\right)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{2\ln x}{x(x+1)}\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2.\frac{\ln x}{x}\times\frac{1}{x+1}\right)=0$ ، لأن : $\begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x+1}=0\end{cases}$.

*) التفسير البياني :

- المستقيم ذو المعدلة $x=0$ مقارب للمنحني (C) .
- المستقيم ذو المعادلة $y=0$ مقارب للمنحني (C) بجوار $+\infty$.

2) أ) الدالة f قابلة للإشتقاق على $]0;+\infty[$ و عبارة دالتها المشتقة هي : $f'(x)=2.\frac{\frac{1}{x}(x^2+x)+(2x+1).\ln x}{(x^2+x)^2}$

أي : $f'(x)=2.\frac{(x+1)-(2x+1).\ln x}{(x^2+x)^2}$ (نستخرج $(2x+1)$ عامل مشترك) تصبح :

$f'(x)=2(2x+1).\frac{\frac{x+1}{2x+1}-\ln x}{(x^2+x)^2}$ و منه نجد : $\boxed{f'(x)=\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}\times g(x)}$ هو المطلوب .

ب) نعلم أنه على المجال $]0;+\infty[$ يكون : $\frac{2(2x+1)}{(x^2+x)^2}>0$ إذن : إشارة $f'(x)$ من إشارة $g(x)$.

و بالتالي : لما $x\in]-\infty;\alpha]$ تكون : $g(x)\geq 0$ أي : $f'(x)\geq 0$ إذن : الدالة f متزايدة على $]-\infty;\alpha]$.

و لما $x\in]\alpha;+\infty[$ تكون : $g(x)<0$ أي : $f'(x)<0$ إذن : الدالة f متناقصة على $]\alpha;+\infty[$.

ج) نعلم أن : $g(\alpha)=0$ أي : $\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}-\ln\alpha=0$ و منه : $\ln\alpha=\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}$.

*) لنحسب $f(\alpha)$ نجد : $f(\alpha)=\frac{2\ln\alpha}{\alpha^2+\alpha}=\frac{2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}}{\alpha^2+\alpha}=2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\times\frac{1}{\alpha^2+\alpha}=2\times\frac{\alpha+1}{2\alpha+1}\times\frac{1}{\alpha(\alpha+1)}$

و منه نتحصل على : $\boxed{f(\alpha)=\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}}$ هو المطلوب .

*) جدول التغيرات :

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

د) حصر $f(\alpha)$:

لدينا : $1,83<\alpha<1,84$ أي : $4,66<2\alpha+1<4,68$ أي : $\frac{1}{4,68}<\frac{1}{2\alpha+1}<\frac{1}{4,66}$ و منه نجد :

$0,213<\frac{1}{2\alpha+1}<0,214...(1)$ و لدينا : $1,83<\alpha<1,84$ أي : $\frac{1}{1,84}<\frac{1}{\alpha}<\frac{1}{1,83}$ و منه :

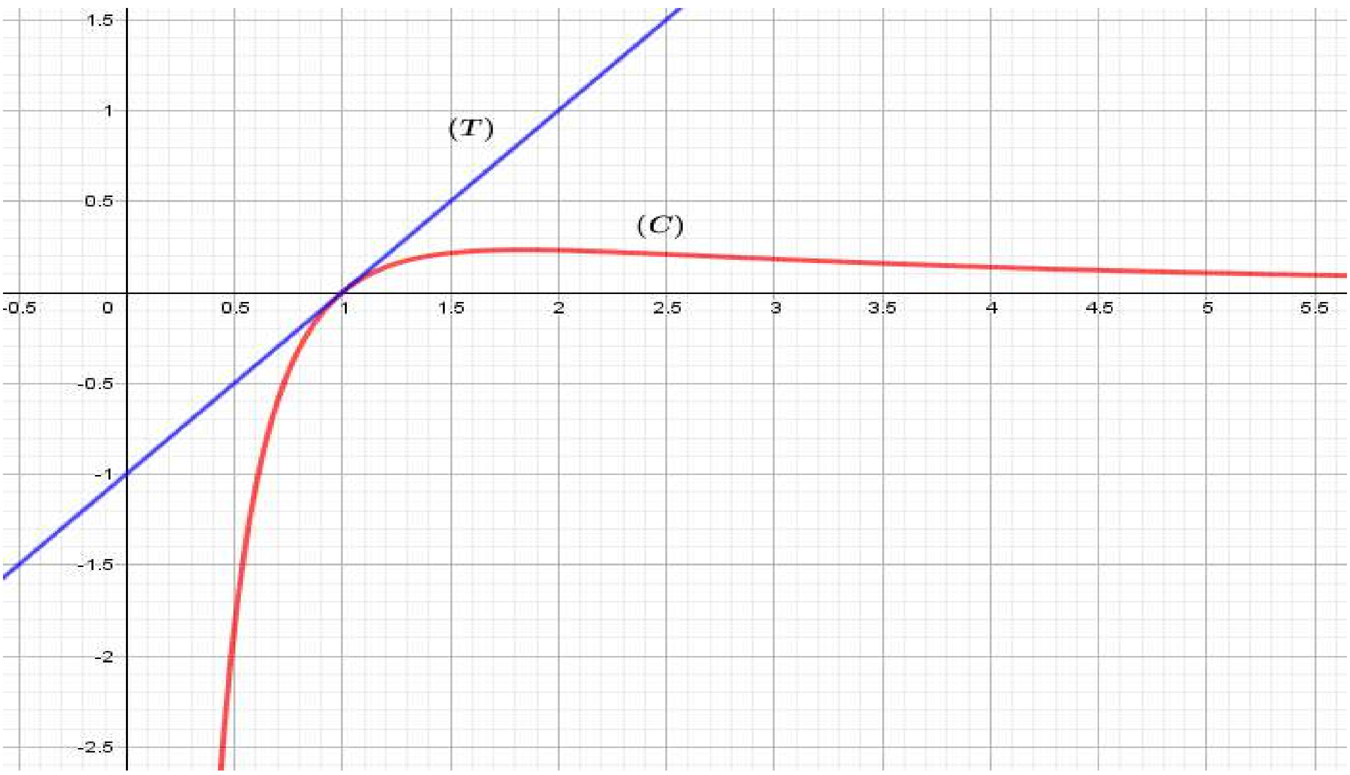
$0,543<\frac{1}{\alpha}<0,546\ ...(2)$ بضرب (1) في (2) نجد : $0,115<\frac{1}{\alpha(2\alpha+1)}<0,116$

أي : $0,230<\frac{2}{\alpha(2\alpha+1)}<0,232$ إذن : $\boxed{0,230<f(\alpha)<0,232}$.

3) كتابة معادلة المماس (T) :

لدينا : $(T):y=f'(1)(x-1)+f(1)$ أي : $(T):y=(x-1)+0$ و منه : $\boxed{(T):y=x-1}$.

4) الإنشـــــاء :



5) أ) لدينا : $(d_m): y = m^2x - 1$.

إذا كان : $x = 0$ فإن : $y = -1$ و النقطة $A(0,-1)$ تنتمي إلى جميع المستقيمات (d_m) .

ب) المناقشة البيانية لحلول المعادلة : $f(x) = m^2x - 1$. (ملاحظة : $m^2 \geq 0$) .

*) في حالة $m^2 = 0$ أي : $m = 0$ المعادلة تقبل حلا وحيدا .

*) في حالة $0 < m^2 < 1$ أي : $-1 < m < 1$ المعادلة تقبل حلين متمايزين .

*) في حالة $m^2 = 1$ أي : $m = 1$ أو $m = -1$ المعادلة تقبل حلا مضاعفا هو 1 .

*) في حالة $m^2 > 1$ أي : $m > 1$ أو $m < -1$ فإن المعادلة لا تقبل حلولا .

6) أ) لدينا : $h(x) = \dfrac{2\ln|x|}{x^2 + |x|}$.

بما أن : $x \in]-\infty, 0[$ فإن : $|x| = -x$ و منه : $h(x) = \dfrac{2\ln(-x)}{x^2 - x}$ أي : $h(x) = f(-x)$.

إذن : (C_h) نظير (C) بالنسبة إلى حامل محور التراتيب .

أي : (C_h) هو صورة (C) بواسطة التناظر بالنسبة إلى حامل محورالتراتيب .

ب) الإنشـــــاء :