المستوى:الثالثة علوم تجريبية	مارس 2023
اختبار الفصل الثاني في مادة الرياضيات	المدة :2 سا

التمرين 1 (8 ن)

f دالة معرفة على $[4;7]$ بـ: $f(x)=\sqrt{x+2}+4$

1) بين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4;7]$

2) (u_n) متتالية عددية معرفة على $\mathbb{N}$ بـ : $u_0=4$ ومن اجل كل عدد طبيعي n, $u_{n+1}=f(u_n)$

أ) برهن بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4\leq u_n\leq 7$

ب) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1}-u_n=\frac{-u_n{}^2+9u_n-14}{\sqrt{u_n+2}+u_n-4}$

جـ) استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم بين أنها متقاربة.

3)أ) بين انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0\leq 7-u_{n+1}\leq\frac{1}{4}(7-u_n)$

ب) استنتج انه من اجل كل عدد طبيعي n: $0\leq 7-u_n\leq 3(\frac{1}{4})^n$،ثم استنتج نهاية المتتالية (u_n)

التمرين 2 (12 ن)

I) لتكن الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x)=2+(x-2)e^{-x+2}$

1) أدرس اتجاه تغير الدالة g و شكل جدول تغيراتها.

2) بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1{,}14<\alpha<1{,}15$

3) استنتج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

II) لتكن الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $f(x)=2x-1-(x-1)e^{-x+2}$

(C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(o,\vec{i},\vec{j})$

(طول الوحدة $2\,cm$) .

1)أ) احسب كلا من : $\lim_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}f(x)$

ب) بين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x)=g(x)$

جـ) استنتج اتجاه تغير الدالة f ثم شكل جدول تغيراتها.

2) أ) اثبت أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) .

ب) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

جـ) بين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، يطلب كتابة معادلته.

3) أحسب كلا من : $f(0)$ و $f(2)$ ثم أنشئ (T), (Δ) و (C_f). (يعطى : $f(\alpha) \approx 0,95$)

III) نعتبر الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x-1)\,e^{-x+2}$

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة عين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0.

2) أحسب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلاتها: $x = \alpha$, $x=1$

3) بين أن: $A(\alpha) = 8+4e+\frac{16}{\alpha-2}\ cm^2$

بالتوفيق.

<u>**التصحيح النموذجي**</u>

<table>
<tr><th>رقم التمرين</th><th>الحل</th><th>العلامة</th></tr>
<tr><td>التمرين 1</td><td>

1) نبين أن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$

f دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و f' دالتها المشتقة حيث :

من اجل كل x من $[4; 7]$ لدينا : $f'(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x+2}$

بما أن $f'(x) > 0$ إذن الدالة f متزايدة تماما على المجال $[4; 7]$

2) أ) البرهان بالتراجع انه من اجل كل عدد طبيعي n : $4 \leq u_n \leq 7$

ب) نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $u_{n+1} - u_n = \frac{-{u_n}^2+9u_n-14}{\sqrt{u_n+2}+u_n-4}$

من اجل كل عدد طبيعي n لدينا : $u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n+2} + 4 - u_n$

إذن $u_{n+1} - u_n = \frac{-{u_n}^2+9u_n-14}{\sqrt{u_n+2}+u_n-4}$

جـ) استنتاج اتجاه تغير المتتالية (u_n) ثم نبين أنها متقاربة.

مما سبق لدينا من اجل كل عدد طبيعي n $u_{n+1} - u_n = \frac{-{u_n}^2+9u_n-14}{\sqrt{u_n+2}+u_n-4}$

و منه $u_{n+1} - u_n = \frac{-(u_n-2)(u_n-7)}{\sqrt{u_n+2}+u_n-4}$

بما أن $u_{n+1} - u_n > 0$ إذن المتتالية (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$

- بما أن (u_n) متزايدة تماما على $\mathbb{N}$ و محدودة من الأعلى بالعدد 7 فإن المتتالية (u_n) متقاربة.

3)أ) نبين انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7-u_n)$

من اجل كل عدد طبيعي n : $7 - u_{n+1} = \frac{7-u_n}{3+\sqrt{u_n+2}}$

إذن $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7-u_n)$

</td><td></td></tr>
</table>

ب) استنتاج انه من اجل كل عدد طبيعي n : $0 \leq 7 - u_n \leq 3(\frac{1}{4})^n$

لدينا مما سبق $0 \leq 7 - u_{n+1} \leq \frac{1}{4}(7 - u_n)$

و منه

$$0 \leq 7 - u_1 \leq \frac{1}{4}(7 - u_0)$$

$$0 \leq 7 - u_2 \leq \frac{1}{4}(7 - u_1)$$

$$\vdots$$

$$0 \leq 7 - u_n \leq \frac{1}{4}(7 - u_{n-1})$$

بالضرب طرفا لطرف نجد $0 \leq 7 - u_n \leq 3(\frac{1}{4})^n$

- استنتاج نهاية المتتالية (u_n)

مما سبق لدينا $0 \leq 7 - u_n \leq 3(\frac{1}{4})^n$

حسب مبرهنة الحصر نجد $\lim_{n\to+\infty} (u_n) = 7$

التمرين 2

I) الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = 2 + (x-2)\, e^{-x+2}$

1) اتجاه تغير الدالة g و جدول تغيراتها.

- النهايات:

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty; \qquad \lim_{x\to+\infty} g(x) = 2$$

- الدالة المشتقة
g دالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و g' دالتها المشتقة حيث :
من اجل كل x من $\mathbb{R}$ لدينا : $g'(x) = (3-x)\, e^{-x+2}$
- إشارة $g'(x)$:
-

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-

و منه g دالة متزايدة تماما على المجال $]-\infty ; 3]$
و متناقصة تماما على المجال $[3 ; +\infty[$

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$g'(x)$	+	0	-
$g(x)$	2 ↗	$2+e^{-1}$	↘ $-\infty$

2) نبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α حيث : $1,14 < \alpha < 1,15$
باستعمال مبرهنة القيم المتوسطة

3) استنتاج إشارة $g(x)$ حسب قيم x .

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

II) 1)أ)حساب كلا من : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$; $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

ب) نبين أنه من أجل كل عدد حقيقي x فإن : $f'(x) = g(x)$

جـ) استنتاج اتجاه تغير الدالة f ثم جدول تغيراتها

- إشارة $f'(x)$: من إشارة $g(x)$

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	

و منه f دالة متناقصة تماما على المجال $]-\infty ; \alpha]$

و متزايدة تماما على المجال $[\alpha ;+\infty[$

- جدول التغيرات

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		-	0	+	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

2) أ) نبين أن المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y= 2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f)

$$\lim_{x\to-\infty}[f(x)-(2x-1)] = 0$$

و منه المستقيم (Δ) ذو المعادلة $y=2x-1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $-\infty$

ب) أ الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ) .

إشارة $f(x)-y$:

$-(x+1)e^{-x+1} = 0$ يكافئ $-(x+1) = 0$ لأن $e^{-x+1} > 0$ و منه $x= 1$

و منه إشارة $f(x)-y$ من إشارة $-x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f(x)-y$	$+$	0	$-$
الوضعية النسبية	(C_f) فوق (Δ)	(C_f) يقطع (Δ) في النقطة $A(1\,;1)$	(C_f) تحت (Δ)

جـ) نبين أن المنحنى (C_f) يقبل مماسا (T) يوازي (Δ)، يطلب تعيين معادلته.

معناه : $f'(x_0) = 2$ و منه $x_0 = 2$

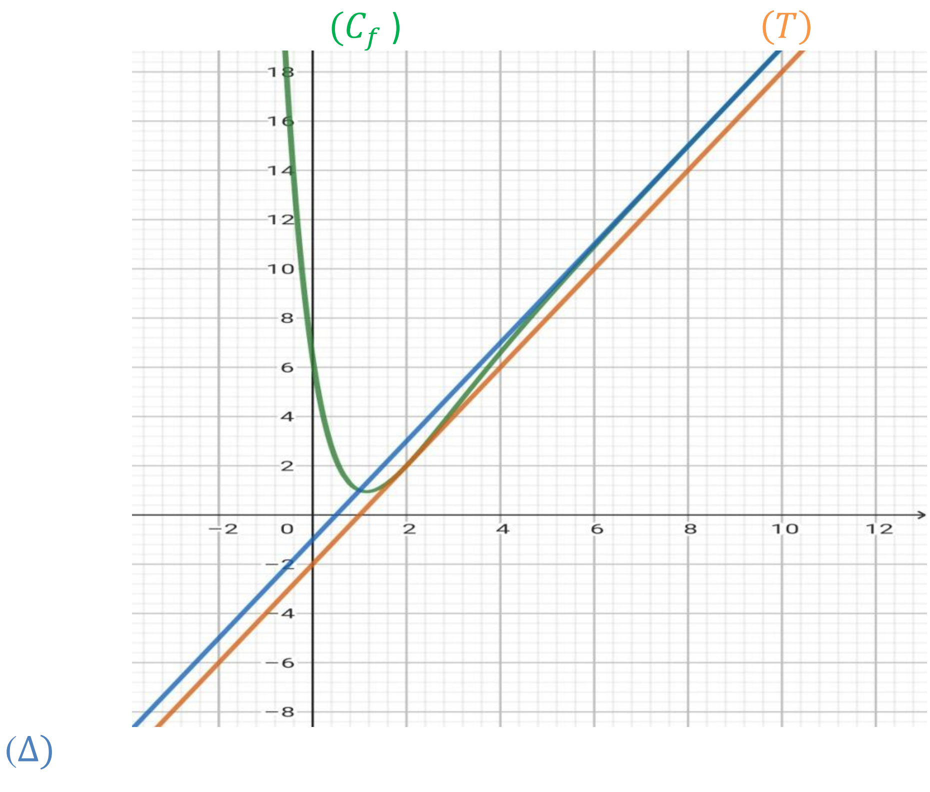
- معادلة المماس (T)

$$(T): y = 2x - 2$$

3) حساب كلا من : $f(0)$ و $f(2)$ ثم انشاء $(T), (\Delta)$ و (C_f)

$f(0) = -1-e^2$; $f(2)=4$

إنشاء $(T), (\Delta)$ و (C_f)



II) الدالة h المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $h(x) = (x-1)\,e^{-x+2}$

1) باستعمال المكاملة بالتجزئة نعين الدالة الأصلية H للدالة h على $\mathbb{R}$ و التي تنعدم عند 0.

$H(x) = -\,x\,e^{-x+2}$

2)حساب $A(\alpha)$ مساحة الحيز المستوي المحدد بالمنحنى (C_f) والمستقيم (Δ) و المستقيمين الذين معادلاتها: $x = \alpha\,,\ x=1$

$A(\alpha)=\int_1^\alpha y - f(x) = 4e - 4\alpha e^{-\alpha+2}\ cm^2$

3) نبين أن: $A(\alpha) = 8+4e + \frac{16}{\alpha-2}\ cm^2$

بما أن $g(\alpha)=0$ فإن $e^{-\alpha+2} = \frac{-2}{\alpha-2}$

إذن $A(\alpha) = 8+4e + \frac{16}{\alpha-2}\ cm^2$